


UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
OMNIBUS SAPIENTIA UNICUIQUE EXCELLENTIA

Université Paris 1 Panthéon Sorbonne,

Institut de démographie



Cours d'analyse démographique et modèles de populations niveau : **Master de démographie** par Alexandre Avdeev,

Chapitre 10

Modèles de la mortalité

Version 2022

- Ajustement avec une fonction analytique: l'idée de Gompertz et son développement par Makeham, Perks, Helligmen et Pollard ;
- Modèle de la mortalité infantile de Bougeois-Pichat
- Présentation tabulaire ou les tables type de mortalité :
 - Nations Unies,
 - A. Coale & P. Demeni,
 - S. Ledermann ;
- [Modèle relationnelle de mortalité de W.Brasse](#)

Lecture :

Nations Unies, *Manuel X 'Techniques indirectes d'estimation démographique'* Nations Unies, 1984, ST/ESA/SER.A/81 (disponible sur le site WEB des NU)

Kennet Hill, « Méthodes d'estimation indirecte », dans G.Cazelli, J.Vallin et G.Wunsch (dir.) *Démographie: Analyse et Synthèse*, vol. III, *Observation, méthodes auxiliaires, enseignement et recherche*. Paris, INED, 2006, p.243-265

Josianne Duchène, « Les tables-types de mortalité », *ibid*, 2006, p.267-286

Rolland Pressat, *Éléments de démographie mathématique*. Edition de l'AIDELF, Paris, 1995, p.1-48

H. Leridon et L. Toulemon, *Démographie. – Approche statistique et dynamique des populations*. Economica, Paris, 1997, p.211-232

Samuel H. Preston, Patrick Heuveline and Michel Guillot – *Demography. Measuring and Modeling Population Processes*. Blackwell Publishing, 2000, p.191-201

Jaques Vallin, Graziella Cazelli – “La table de mortalité d'une génération”, dans G.Cazelli, J.Vallin et G.Wunsch (dir.) *Démographie: Analyse et Synthèse*, vol. I, *La dynamique des populations*. Paris, INED, 2001, p.165-212

Logiciels: Mortpak Lite v.4.3 <https://www.un.org/en/development/desa/population/publications/mortality/mortpak.asp>

1

La simplification et la réduction du nombre des hypothèses dans les projections (rappel) :

Problèmes:

- La désagrégation de la population (subdivision en groupes par âge et par sexe dans lesquels la mortalité, la fécondité et la migration sont plus ou moins *homogènes*) permet de d'obtenir une représentation précise d'un phénomène étudié, mais **la multiplication des séries de nombres est encombrante**.
- L'application de la méthode des composantes demande des taux de fécondité, de mortalité et de migration par âge et par sexe pour chaque intervalle de la période de projection, par conséquent **des hypothèses se multiplient**.

Solution plausible – réduction de l'information d'entrée d'un modèle :

- Construire un modèle et d'associer, ou de mettre en correspondance, les distributions des taux par âge avec le nombre réduit (un, deux ou trois) des paramètres.
- Le modèle représente un standard pour les distributions des taux par âge (risque), basé sur l'expérience de plusieurs populations pour lesquelles la qualité des données est bonne.

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

2

L'aspect mathématique de la table de mortalité

Survivants et décédés à l'âge x (fonctions de survie et du risque de décès)

exemple : France 2001-2002

Quotients de mortalité par âge et par sexe (fonction de la force de mortalité)

sur papier semi logarithmique

Tables de mortalité (rappel)

1. Indicateurs principaux
($l_x; n d_x; n q_x; n p_x; n m_x; n a_x; n L_x; T_x; e_x; D_x$)
2. Méthodes de constructions
(à partir des taux par âge, des quotients etc.)
3. Relations entre les indicateurs d'une table de mortalité

Décès par âge et par sexe (fonction de la densité de décès)

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 3

3

Relations entre les indicateurs de la table de mortalité (rappel d'écriture avec le temps discret)

$$n q_x = 1 - e^{-n \cdot m_x} \quad n q_x = \frac{n \cdot m_x}{1 + (n - a_x) \cdot m_x} \quad \text{si } a = \frac{n}{2} \rightarrow \quad n q_x = \frac{2n \cdot m_x}{2 + n \cdot m_x}$$

$$n q_x = 1 - n p_x; \quad n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}; \quad l_{x+n} = l_x \cdot (1 - n q_x) = l_x \cdot n p_x; \quad l_x = \prod_{i=0}^x n p_i$$

$$n d_x = l_x - l_{x+n}; \quad \sum_{x=0}^{\omega} n d_x = (l_0 - l_n) + (l_n - l_{2n}) + \dots + (l_{\omega-n} - l_{\omega}) = l_0; \quad \leftarrow (l_{\omega} = 0) \quad \text{Si } l_0 = 1; \quad \therefore \sum_{x=0}^{\omega} n d_x = 1;$$

$$D_x = \sum_{x=0}^x n d_x; \quad l_x + D_x = l_0 = \sum_{x=0}^{\omega} n d_x = D_{\omega}; \quad n L_x = n \cdot \frac{(l_x + l_{x+n})}{2}; \quad n L_x = n \cdot \frac{l_x - l_{x+n}}{\ln l_x - \ln l_{x+n}} \quad T_x = \sum_x n L_x$$

$$\bar{e} = \sum_{x=0}^{\omega} (x + a_x) \cdot n d_x = e_0 \quad e_0 = \sum_{x=0}^{\omega-n} n L_x \quad e_0 = a + \sum_{x=0}^{\omega-1} x \cdot n d_x \quad e_x = \frac{T_x}{l_x}$$

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 4

4

Approche mathématique de la mortalité

1. Correspondance des indicateurs (discrets) de table de mortalité classique aux fonctions (continues)

| Indicateurs de table : | Fonctions correspondantes : |
|--|---|
| S_x – nombre de survivants à l'âge exact x (l_x) | $\rightarrow S(x)$ – fonction survie := $l(x)$ |
| ${}_n d_x$ – nombre de décès entre l'âge x et $x+n$ | $\rightarrow d(x)$ – fonction décès (densité de décès) |
| ${}_n q_x$ – quotient annuel de mortalité à l'âge x | $\rightarrow q(x)$ – fonction quotient := $\mu(x)$ $\mu(x)$ – force de mortalité |
| D_x – nombre de décédés avant l'âge exact x | $\rightarrow D(x)$ – fonction de risque de décès |

2. Passage des suites des indicateurs de la table de mortalité à des fonctions

$S(x)$ – fonction survie = on peut imaginer une interpolation à partir de l'ensemble de points de la suite $\{x, S_x\}$

$d(x)$ – fonction de la densité de décès \rightarrow difficile à partir de la suite $d(x, x+\Delta x)$, puisque si $\Delta x \rightarrow 0$, la valeur limite est nulle et par conséquent il ne pas possible de dénombrer des décès à une date (moment) ponctuel dont la durée est proche à zéro. La solution mathématique est de passer à **la densité de décès sur une intervalle infinitésimal** $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x+\Delta x)}{\Delta x}$

Alors $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{S(x) - S(x+\Delta x)}{\Delta x} = -S'(x) = d(x)$ Il en résulte que le nombre de décès sur un intervalle infinitésimal $(x, x + dx) = d(x)dx$

$q(x)$ – fonction quotient (force de mortalité) se fabrique aussi à partir de $S(x)$ avec les même précautions que pour $d(x)$

$q(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x, x+\Delta x)}{\Delta x \cdot S(x)} = \frac{d(x)}{S(x)} = \frac{S'(x)}{S(x)} \rightarrow q(x) = -[\ln S(x)]' \rightarrow S(x) = e^{-\int_0^x \mu(x) dx}$ juste pour écriture $q(x) := \mu(x)$

voir le cours d'analyse chapitre 5 diapositive 35

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 5

5

Relations entre les indices de table et les fonctions continues associées

x_m et x_M – deux points d'inflexions de la fonction survie, qui correspondent au minimum et au maximum de densité des décès.

$S(x)$ est donc concave sur les intervalles $(0, x_m)$ et $(x_M, \omega) : S''(x) \geq 0$, si $x \in \left\{ \begin{matrix} (0, x_m) \\ (x_M, \omega) \end{matrix} \right.$

Par conséquent sur ces intervalle $d(x)$ est décroissante, donc $d(x) > d(x+\theta) = d_x$ et $\mu(x) > q_x$

En revanche $S(x)$ est convexe sur l'intervalle $(x_m, x_M) : S''(x) \leq 0$, si $x \in (x_m, x_M)$

alors $d(x) < d(x+\theta) = d_x$ et $\mu(x) < q_x$

Par définition $\mu(x) = \frac{S'(x)}{S(x)} \rightarrow \ln S(x) = -\int \mu(x) dx + \ln C \rightarrow$

$S(x) = C \cdot e^{-\int \mu(x) dx + \ln C} = C \cdot e^{-F(x)}$ Ln C – une constante arbitraire
F(x) – une fonction de x

Sachant que ${}_1q_n = 1 - \frac{S_{x+n}}{S_x}$ on peut écrire ${}_1q_n = 1 - \frac{S_0 \cdot e^{-\int_0^{x+n} \mu(\xi) d\xi}}{S_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu(\xi) d\xi}} \rightarrow$

${}_1q_x = 1 - e^{-\int_x^{x+1} \mu(\xi) d\xi} = 1 - e^{-\mu}$ ou simplement $e^{-\mu(x)} = {}_1p_x = 1 - {}_1q_x$

Ce qui donne une possibilité pour μ d'être > 1 sous la condition que $\ln(1 - q_x) > 1$

Cette condition est remplie dès que $1 - q_x < e^{-1} := {}_1q_x > 0,632$

D'après les tables de Kannisto-Tatcher une telle situation a lieu après l'âge de 110 ans voir <http://www.demogr.mpg.de/databases/ktadb/>

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 6

6

Une hypothèse : le risque est une fonction paramétrique de l'âge

La formule de Gompertz-Makeham

L'idée de Gompertz, 1825:
 résistance individuelle à la mort $\frac{1}{\mu(x)}$ augmente avec l'âge à taux constant $k \rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = [\ln \mu(x)]' = k$

Quotients de mortalité (probabilité de mourir)
 France, 2000-2002

$\ln S_{x|} = a + b \cdot c^{-x}$

$\mu(x) = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x}$

à partir de l'âge ~30-40 ans le logarithme du taux de mortalité est une fonction linéaire de l'âge

$\ln[\mu(x)] = \ln \alpha + \beta \cdot x$

α – est le paramètre de niveau (de l'espérance de vie « naturelle »)

β – est le paramètre la vitesse de extinction

Makeham, 1860: $\mu(x) = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x} + \gamma$

où γ – paramètre qui détermine l'influence des facteurs de la mortalité « exogène » (accidents, infection etc.)

GOMPERTZ Benjamin, 1825. – On the nature of the function expressive of the law of the human mortality and on a new mode of determining the value of life contingencies, Philosophical Transactions of the Royal Statistical Society, vol. 27, n° 2, p. 513- 583.
 MAKEHAM William M., 1860. – On the law of mortality and the construction of annuity tables, The Assurance Magazine and Journal of the Institute of Actuaries, vol. 8, p. 301-310.
 MAKEHAM William M., 1867. – On the law of mortality, Journal of the Institute of the Actuaries, n° 13, p. 325-67.

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

7

Application de la formule de Gompertz pour extrapoler (« fermer ») une table de mortalité

$\mu(x) = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x} \Rightarrow S(x) = C \cdot a^{b^x}$ On peut estimer les paramètres C , a et b à partir de trois valeurs d'une table de mortalité

$$b = \frac{\left[\frac{\ln \frac{S(x+2n)}{S(x+n)}}{\ln \frac{S(x+n)}{S(x)}} \right]^{\frac{1}{n}}}{\left[\frac{\ln \frac{S(x+n)}{S(x)}}{\ln \frac{S(x+n)}{S(x)}} \right]}; \quad a = \exp \left(\frac{\ln \frac{S(x+n)}{S(x)}}{b^x \cdot (b^n - 1)} \right); \quad C = S(x) \cdot \exp(-b^x \cdot \ln a)$$

Exemple: France, table de mortalité 2000-2020

| x | S(x) | $\hat{S}(x)$ |
|-----|-------|--------------|
| 75 | 61250 | 61250 |
| 80 | 47391 | 47391 |
| 85 | 30554 | 30554 |
| 90 | | 14418 |
| 95 | | 3988 |
| 100 | | 442 |
| 105 | | 10 |
| 110 | | 0 |

$$b = \frac{\left[\frac{\ln \frac{S(85)}{S(80)}}{\ln \frac{S(80)}{S(75)}} \right]^{\frac{1}{5}}}{\left[\frac{\ln \frac{S(80)}{S(75)}}{\ln \frac{S(80)}{S(75)}} \right]} = 0,999886;$$

$$a = \exp \left(\frac{\ln \frac{S(80)}{S(75)}}{b^{75} \cdot (b^5 - 1)} \right) = 1,113403$$

$C = S(75) \cdot \exp(-b^{75} \cdot \ln a) = 87860,06$

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

8

Problème d'estimation de la mortalité aux âges très élevés

On observe qu'aux âges très élevés la croissance de la force de mortalité ralentit avec l'augmentation de l'âge

Perks W. (1932) – "On Some Experiments in the Graduation of Mortality Statistics" *Journal of the Institute of Actuaries*, 109, p.225-240

Vaupel J.W., K.S.Manton and E.Sallard (1979)– "The impact of heterogeneity in Individual Frailty on the Dynamic of Mortality" *Demography*, Vol.16, no.3, p.439-454

Horiuchi, Shiro and A.J.Coale (1990) – "Age patterns of Mortality for Older Women: An Analysis Using the Age-specific Rate of Mortality Change with Age" *Mathematical Population Studies*. Vol.2, no.4, p.245-267

Solution de Perks: recours à un modèle logistique :

soit $\mu(x)$ – la force de mortalité à l'âge exact x telle que $\mu(x) = \frac{\beta \cdot \gamma^x}{1 + \beta \cdot \gamma^x}$
(son estimateur est le taux de mortalité)

et son complément à un $1 - \mu(x) = \frac{1}{1 + \beta \cdot \gamma^x}$ d'où

$$\frac{\mu(x)}{1 - \mu(x)} = \beta \cdot \gamma^x \Rightarrow \text{donc logit de } \mu(x); \ln \left[\frac{\mu(x)}{1 - \mu(x)} \right] = a \cdot x \text{ est une fonction linéaire de l'âge}$$

logit de $\mu(x)$ → $\ln \left[\frac{\mu(x)}{1 - \mu(x)} \right]$

Possibilité d'ajustement de la fonction $\mu(x)$ « force de la mortalité » ou fonction quotient par morceau

Exemple du Roland Pressat (1995), p.4-5

Soit sur un intervalle la courbe de survie pourrait être approximée par une parabole quadratique

$$S(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 + f \cdot x^4$$

à partir de cet ajustement il est possible d'estimer les valeurs de la fonction de décès (densité) et de celle de quotient (force de mortalité) :

$$d(x) = -S'(x); \quad \mu(x) \equiv q(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)}$$

prenons 5 points d'âge (x) notés respectivement -2; -1; 0; +1; +2, alors pour l'âge 0 la densité de décès $d(0)$ sera égale à $-S'(0) = -b$

On peut estimer le paramètre b , à partir du système d'équations:

$$\begin{cases} S(-1) = a - b + c - d + f \\ S(+1) = a + b + c + d + f \\ S(-2) = a - 2b + 4c - 8d + 16f \\ S(+2) = a + 2b + 4c + 8d + 16f \end{cases}$$

Qui nous donne $-b = d(x) = \frac{8 \cdot [S(x-1) - S(x+1)] - [S(x-2) - S(x+2)]}{12}$

et $q(x) = \frac{d(x)}{S(x)} = \frac{8 \cdot [S(x-1) - S(x+1)] - [S(x-2) - S(x+2)]}{12 \cdot S(x)}$

Voir à titre d'exemple la table de mortalité française de 1816 dans la HMDB <https://www.mortality.org/>

Mortalité aux âge très jeunes (ajustement parabolique)

Aux âges précoces la diminution de la mortalité avec l'augmentation de l'âge est très rapide et non linéaire d'évidence

Bourgeois-Pichat J. (1946) – « De la mesure de la mortalité infantile » *Population*, Vol.1, N°1, p.53-68
 Bourgeois-Pichat J. (1951) – « La mesure de la mortalité infantile. II, Les causes de décès » *Population*, Vol.6, N°3, p.459-480
 Lantoin C., et R.Pressat (1984) – « Nouveaux aspects de la mortalité infantile » *Population*, Vol.39, N°2, p.253-264

Solution de Bourgeois-Pichat : décomposition de la mortalité infantile en mortalité « endogène » et celle « exogène ». Soit $D(n)$ est la probabilité de mourir avant l'âge exact $n+1$, telle que

$$D(n) = a + b \cdot [\ln(n + 1)]^3$$

a – la mortalité exogène (accidents, infections etc.) : supposée d'être indépendante de l'âge (une constante)
 b – le paramètre de la mortalité « endogène », celle-ci est dépendante de l'âge en jours
 n – l'âge révolu en jours (on ajoute 1 pour transformer l'âge révolu à l'âge atteint dans la journée puisque $\ln(0)$ n'existe pas).

Dans ce modèle l'expression $[\ln(n + 1)]^3$ représente une fonction de la « mortalité infantile naturelle », **a** est le paramètre du niveau historique de la mortalité infantile, et **b** est le paramètre de la position.

11

11

Évolution de la mortalité infantile dans l'optique du modèle de JBP

Échelle logarithmique pour mieux voir les valeurs élevées

Échelle linéaire pour mieux voir les valeurs faibles

12

12

Modèle paramétrique généralisé de la mortalité

Heligmen L. and H.Pollard (1980) – "The Age Patterns of Mortality" *Journal of the Institute of Actuaries*. Vol.107, Part 1, no 434, p.49-80

Solution de Heligmen and Pollard: modèle représentant la somme de trois courbes (trois fonctions exponentielles*) et comporte huit paramètres

La première composante diminue rapidement.

La deuxième composante gère la surmortalité accidentelle et maternelle

La troisième composante est de même nature que la formule logistique pour les âges élevés

$$\frac{{}_1q_x}{{}_1p_x} = A^{(x+B)^C} + D \cdot e^{-E \cdot (\ln x - \ln F)^2} + G \cdot H^x$$

Il est aussi possible de décrire la mortalité ainsi, mais dans ce cas q_x peut théoriquement, mais jamais en pratique dépasser 1

$${}_1q_x = A^{(x+B)^C} + D \cdot e^{-E \cdot (\ln x - \ln F)^2} + \frac{G \cdot H^x}{1 + G \cdot H^x}$$

Mortalité croissant selon la loi de Gompertz-Perks

Surmortalité aux âges moyens

Mortalité infantile et juvénile
 A - niveau de la MI;
 B - paramètre de position
 C - paramètre de vitesse

* - rappel : $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

13

Paramètres du modèle de Helligmen-Pollard (estimation → Mortpak for Windows, procédure UNARB)

$$\frac{{}_1q_x}{{}_1p_x} = A^{(x+B)^C} + D \cdot e^{-E \cdot (\ln x - \ln F)^2} + G \cdot H^x$$

La première composante diminue rapidement.

La deuxième composante gère la surmortalité accidentelle et maternelle

La troisième composante a la même nature que la formule logistique pour les âges élevés (vieillesse)

**A - niveau de la MI;
B - paramètre de position
C - paramètre de vitesse**

**F - paramètre de position
E - paramètre de l'extension (largeur)
D - paramètre de niveau (hauteur)**

**G - niveau de base de la mortalité
H - la vitesse de croissance**

OU

H^{x-x_0} ← x_0 - âge, où $q_x/p_x=1$ → ($q_x = 0.5$)

$q_x/p_x = G \cdot H^x$

$q_x = G \cdot H^x / (1 + G \cdot H^x)$

$q(x) = G \cdot H^{(x-x_0)}$

Lecture : A.Rogers and K.Gard « Application of the Helligmen-Pollard model mortality schedule » // *Population Bulletin of the United Nations*, No. 30 -1991, p.79-105

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) https://www.un.org/en/development/desa/population/publications/mortality/mortpak.asp

14

II. Modèles tabulaires : tables types

Lecture :

Josianne Duchène « Les tables types de mortalité » Dans: G.Caselli, J.Vallin et G.Wunsch *Démographie: Analyse et Synthèse*, vol. VIII *Observation, méthodes auxiliaires, enseignement et recherche*, INED, Paris, 2006 p.267- 290

UN. Introduction aux tables-types de mortalité sur <https://www.un.org/en/development/desa/population/publications/mortality/model-life-tables.asp>



1. Tables types de mortalité des Nations Unies, 1955: modèle avec un seul paramètre

United Nations (1955) – *Age and Sex Patterns of Mortality: Model Life Tables for Underdeveloped Countries*. NY

Données de base: 158 tables de mortalité des pays en développement (mauvaise qualité des données)

Principe de construction: les équations récurrentes ou les calculs en chaîne $\rightarrow {}_5q_x$ (probabilité de mourir entre l'âge x et $x+5$) est la fonction quadratique de ${}_5q_{x-5}$ à l'exception de ${}_1q_0$ et ${}_4q_5$ pour lesquelles les amplitudes d'intervalles = 1 et 4)

$${}_5q_x = A + B \cdot {}_5q_{x-5} + C \cdot {}_5q_{x-5}^2$$

+ **Avantage:** simplification des hypothèses, modèle avec une seule entrée (mortalité infantile: ${}_1q_0 \rightarrow {}_4q_5 \rightarrow {}_5q_{10}$ etc.)

– **Désavantage:** biais systématique (erreur moyenne $\neq 0$) ou la reproduction de l'erreur initial à cause des calculs en chaîne (surestimation de l'espérance de vie de ≈ 2 ans en moyen .
(Cf Gabriel K.R., Ronen I. – Estimates of mortality from infant mortality rates. *Population Studies*, 1958, vol.12, no. 2, p.164-169 : ont proposé de passer de ${}_1q_0$ à ${}_4q_5$ par une relation quadratique et d'estimer les quotients de mortalité comme une fonction linéaire de ${}_1q_0$: ${}_nq_5 = A+B \cdot {}_1q_0$)

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

15

15

2. Tables types de mortalité régionales de Coale–Demeny, 1966 et 1983: modèle à deux entrées

Coale A.J. and P. Demeny (1966) – *Regional Model Life Tables and Stable Population*. Princeton. Princeton University Press

Coale A.J. and P.Demeny with B.Vaughan (1983) – *Regional Model Life Tables and Stable Population*. NY, Academic Press

<https://www.sciencedirect.com/book/9780121770808/regional-model-life-tables-and-stable-populations>

Données de base: initialement 326 tables de décès par sexe et de population au recensement par âge et par sexe, 192 tables de mortalité sélectionnées d'après étude visuelle de la dispersion des ${}_5q_x$

Principe de construction: classification des tables selon la similarité des structures des taux de mortalité par âge (plus exactement – selon la similarité de la densité de probabilité de mourir).

1e étape: pour chaque âge tous les valeurs de ${}_nq_x$ ont été ordonnées

2e étape: pour chaque rang de ${}_nq_x$ les tables de mortalité type ont été préliminairement construites.

3e étape: chaque table initiale a été comparée avec une table type préliminaire ayant à peu près le même niveau de mortalité générale (e_0) et les tables défailtantes ont été rejetées

4e étape: 192 tables sélectionnées ont été réparties en 4 groupes selon la similarité des distributions des survivants

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

16

16

Particularités de la mortalité régionale dans les tables type de Coale-Demeny.

Type « Nord »
Donnée de base: 9 tables en provenance de Suède (avant 1920), de Norvège et d'Islande
Particularités: la mortalité infantile et la mortalité aux âge très élevés sont relativement basse

Type « Sud »
Donnée de base: 22 tables en provenance d'Espagne, du Portugal et d'Italie méridionale
Particularités: la mortalité avant l'âge de 5 ans et après l'âge de 65 est élevé, mais la mortalité dans l'intervalle d'âge 40-60 ans est faible.

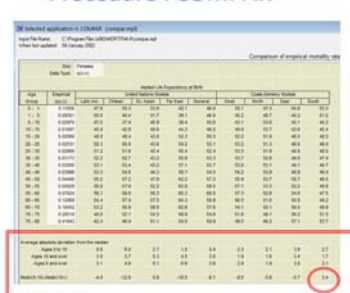
Type « Est »
Donnée de base: 31 tables en provenance d'Allemagne, d'Autriche, de Tchécoslovaquie, du Nord de l'Italie, d'Hongrie et de Pologne
Particularités: la mortalité infantile et après l'âge de 50 ans est très élevée.

Type « Ouest »
Donnée de base: toutes les autres tables (130) de l'Europe de l'Ouest, des populations européennes d'outre-mer, de Japon (milieu de 20e siècle) et de Taiwan
Particularités: il n'y a pas des déviations substantielles.

Procédure : COMPAR

compare les taux ou les quotients de mortalité avec tous les tables type de l'ONU et Coale-Demeny

Procédure : COMPAR



17

17

Sélection d'une table de mortalité dans les tables la mortalité type régionales de Coale-Demeny.

1ère étape: Choisir la famille des table (Nord, Sud, Est, sinon – Ouest) à partir de l'analyse de la mortalité par âge.

2ème étape: Choisir le niveau de mortalité à partir de l'espérance de vie à l'âge 10 ans (e_{10})

24 niveau de mortalité dans chaque famille

Niveau 1 → $e_{10}=20,0$
 Niveau 2 → $e_{10} = 22,5$ (niveau 1 + 2,5)
 Niveau 3 → $e_{10} = 25,0$ (niveau 2 + 2,5)

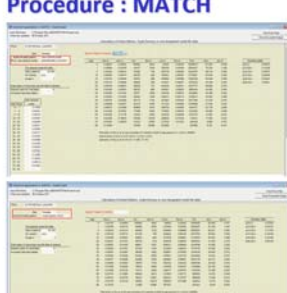
 Niveau 24 → $e_{10} = 77,5$ (niveau 23 + 2,5)

La dernière révision (modification) des tables de Princeton date de 1989 et concerne les âges >80 ans: croissance exponentielle de Gompertz a été remplacé par la croissance linéaire du $[\ln({}_5m_x) - \ln({}_5m_{x-5})]$, et l'augmentation de e_0 jusqu'à 80 ans (niveau) pour toutes les familles de tables – types

Procédure : MATCH

calcule tables de mortalités des familles UN et Coale-Demeny correspondant à un niveau de mortalité (e_x)

Procédure : MATCH



18

18

3. Tables type de mortalité : le système Ledermann

Ledermann, S. et J.Breas (1959) – « Les dimensions de la mortalité » *Population*, vol.14, N°4, p.637-682 (ACP)
 Ledermann, Sully (1969) – *Nouvelles tables-types de Mortalité*. INED, Travaux et Document, cahier N° 53. Paris PUF
 Le Bras Hervé. « Nouvelles tables-types de mortalité. Présentation d'un cahier de l'I.N.E.D. », *Population*, 23^e année, n°4, 1968. pp. 739-744;

Données de base: 154 tables de mortalité (presque la même base que l'ONU a utilisées pour les tables type 1955)

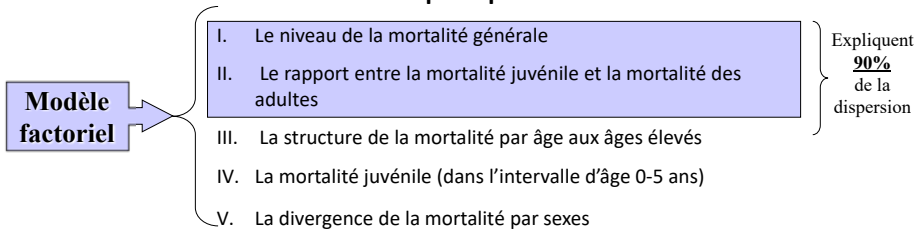
Principe de construction: analyse factorielle (analyse des composantes principales), modèle de régressions avec un ou deux paramètres, et sept ou cinq variables indépendantes (entrées) respectivement.

+ **Avantage:** flexibilité extrême du modèle grâce à la multitude des variables indépendantes, moyens statistiques d'évaluation de la magnitude de la divergence entre valeurs observées et celles estimées

- **Désavantage:** les relations dures entre la mortalité féminine et celle masculine (p.ex. l'impossible scénario où $e_0^h > e_0^f$)
 Il est souvent difficile d'estimer les variables faute des données nécessaires

Tables type de Ledermann (suite)

5 facteurs principaux:



Modèle à un paramètre: $\lg {}_5q_x = a_0(x) + a_1(x) \cdot \lg Q \pm 2 \cdot s_x$ s_x – erreur type (c'est optionnel)

Variables indépendantes: $e_0, {}_1q_0, {}_5q_0, {}_{15}q_0, {}_{20}q_{30}, {}_{20}q_{45}, m_{50+}$

Modèle à deux paramètres: $\lg {}_5q_x = b_0(x) + b_1(x) \cdot \lg Q_1 + b_2(x) \cdot \lg Q_2 \pm 2 \cdot s_x$

Variables indépendantes en couple: $Q_1 = {}_5q_0 \times 1000$ et $Q_2 = {}_{20}q_{45} \times 1000$;

il est possible par ailleurs d'appliquer les couples ${}_{15}q_0$ et ${}_{20}q_{30}$; ${}_{15}q_0$ et m_{50+}

Toutes les variables indépendantes se réfèrent à chaque sexe à l'exception de ${}_{20}q_{30}$ qui se réfère à la mortalité féminine uniquement.

Tables-type de Ledermann : 1 entrée

Soit

lg – logarithme décimale (de base 10) ou \log_{10} ;

${}_nq_x$ – quotients p.1000;

s_x – l'erreur-type sur la valeur médiane

Modèle : $lg {}_5q_x = a_0(x) + a_1(x) \cdot lg Q \pm 2 \cdot s_x$

Algorithmme :

- 1) $Q = \left(1 - \frac{S_{30}^F}{S_{30}^M}\right) \cdot 1000 = (1 - 97197 / 99168) \cdot 1000 = 19,875$
- 2) $lg Q = lg(19,8754) = 1,2983$
- 3) $lg {}_nq_x = a_0(x) + a_1(x) \cdot lg Q \pm 2 \cdot s_x$
- 4) ${}_nq_x = 10^{(lg {}_nq_x)} = 10^{a_0(x) + a_1(x) \cdot lg Q \pm 2 \cdot s_x}$

Table type : paramètres

| âge | Ledermann 1 entrée | | | 20Q30(F) | | |
|-----|--------------------|--------------------|---------|--------------------|--------------------|---------|
| | tableau 104 M | | | tableau 104 F | | |
| x | a ₀ (x) | a ₁ (x) | s(x) | a ₀ (x) | a ₁ (x) | s(x) |
| 0 | -0.22091 | 1.06009 | 0.12323 | -0.47773 | 1.14473 | 0.13166 |
| 1 | -2.36521 | 1.90995 | 0.17434 | -2.63745 | 2.02657 | 0.18514 |
| 5 | -1.94537 | 1.49323 | 0.14533 | -2.50610 | 1.73814 | 0.13046 |
| 10 | -1.57599 | 1.23648 | 0.09729 | -2.28551 | 1.57130 | 0.10862 |
| 15 | -1.06772 | 1.09915 | 0.09499 | -1.84746 | 1.45595 | 0.09631 |
| 20 | -0.97845 | 1.13048 | 0.10637 | -1.63270 | 1.41370 | 0.08679 |
| 25 | -1.00334 | 1.14990 | 0.08888 | -1.47801 | 1.36204 | 0.06163 |
| 30 | -0.90987 | 1.12231 | 0.07638 | -1.32682 | 1.30808 | 0.03721 |
| 35 | -0.72924 | 1.06959 | 0.06405 | -1.01560 | 1.18517 | 0.02110 |
| 40 | -0.34395 | 0.93501 | 0.06912 | -0.65000 | 1.04094 | 0.01186 |
| 45 | 0.14075 | 0.76160 | 0.06993 | -0.13285 | 0.83607 | 0.03159 |
| 50 | 0.56188 | 0.62471 | 0.07062 | 0.25087 | 0.71293 | 0.04141 |
| 55 | 0.92476 | 0.51882 | 0.07344 | 0.56041 | 0.63438 | 0.05162 |
| 60 | 1.28459 | 0.42093 | 0.06699 | 0.92137 | 0.54406 | 0.05226 |
| 65 | 1.64323 | 0.32596 | 0.06177 | 1.28508 | 0.45518 | 0.05612 |
| 70 | 1.90536 | 0.27648 | 0.05324 | 1.70368 | 0.34393 | 0.05278 |
| 75 | 2.23374 | 0.19048 | 0.05130 | 2.10525 | 0.22992 | 0.05179 |
| 80 | 2.56071 | 0.09595 | 0.04824 | 2.45976 | 0.12846 | 0.05045 |

Estimations : France 2008-2010 (calculs en %)

| Hommes | | | Femmes | | | |
|---------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|
| médiane | +2s | -2s | médiane | +2s | -2s | |
| 0 | 14.30 | 25.23 | 8.11 | 10.20 | 18.70 | 5.56 |
| 1 | 1.30 | 2.91 | 0.58 | 0.99 | 2.31 | 0.42 |
| 5 | 0.98 | 1.92 | 0.50 | 0.56 | 1.03 | 0.31 |
| 10 | 1.07 | 1.67 | 0.68 | 0.57 | 0.94 | 0.34 |
| 15 | 2.29 | 3.54 | 1.48 | 1.10 | 1.72 | 0.71 |
| 20 | 3.09 | 5.04 | 1.89 | 1.59 | 2.38 | 1.07 |
| 25 | 3.09 | 4.65 | 2.05 | 1.95 | 2.59 | 1.47 |
| 30 | 3.53 | 5.01 | 2.48 | 2.35 | 2.79 | 1.98 |
| 35 | 4.66 | 6.13 | 3.40 | 3.34 | 3.68 | 3.03 |
| 40 | 7.41 | 10.19 | 5.39 | 5.03 | 5.31 | 4.76 |
| 45 | 13.48 | 18.60 | 9.77 | 8.97 | 10.37 | 7.75 |
| 50 | 23.60 | 32.67 | 17.05 | 15.01 | 18.17 | 12.41 |
| 55 | 39.66 | 55.62 | 28.28 | 24.21 | 30.71 | 19.09 |
| 60 | 67.78 | 92.27 | 49.79 | 42.44 | 53.98 | 33.36 |
| 65 | 116.53 | 154.87 | 87.88 | 75.17 | 97.34 | 58.05 |
| 70 | 183.79 | 234.85 | 143.83 | 141.32 | 180.21 | 110.83 |
| 75 | 302.72 | 383.39 | 239.02 | 253.37 | 321.62 | 199.61 |
| 80 | 484.49 | 605.01 | 387.97 | 423.20 | 533.88 | 335.46 |

21

21

Tables-type de Ledermann : 2 entrées

Soit

$S_{15}MF$ – paramètre d’une table de mortalité les deux sexe confondus ;

$S_{20}F$ et $S_{30}F$ – paramètres d’une table de mortalité le sexe féminin;

Modèle : $lg {}_5q_x = b_0(x) + b_1(x) \cdot lg Q_1 + b_2(x) \cdot lg Q_2 \pm 2 \cdot s_x$

- 1) $Q_1 = (1 - S_{15}MF/S_{10}) \cdot 1000 = [1 - (99422 + 99524) / 200000] \cdot 1000 = 5.2700$; $\log_{10}(5.2700) = 0.7218$
- 2) $Q_2 = (1 - S_{20}F/S_{30}F) \cdot 1000 = (1 - 97197 / 99168) \cdot 1000 = 19.8754$; $\log_{10}(19.8754) = 1.2983$
- 3) ${}_nq_x = 10^{[b_0(x) + b_1(x) \cdot \log Q_1 + b_2(x) \cdot \log Q_2 \pm 2S_x]}$

France 2008-2010

| Ledermann 2 entrées | | | | | | | | | | France 2008-2010 | | | | | | |
|---------------------|----------------|----------------|----------------|---------|----------------|----------------|----------------|---------|---------|------------------|--------|---------|--------|--------|--------|--|
| x | tableau 2 (M) | | | | | tableau 2 (F) | | | | | Hommes | | | Femmes | | |
| | b ₀ | b ₁ | b ₂ | s | b ₀ | b ₁ | b ₂ | s | médiane | +2s | -2s | médiane | +2s | -2s | | |
| 0 | 0.30603 | 0.95702 | -0.19020 | 0.05356 | 0.10203 | 1.05296 | -0.23089 | 0.04901 | 0 | 5.62 | 7.19 | 4.39 | 3.65 | 4.57 | 2.91 | |
| 1 | -1.65487 | 1.29012 | 0.22450 | 0.08940 | -1.89282 | 1.35238 | 0.25978 | 0.09834 | 1 | 0.37 | 0.56 | 0.24 | 0.26 | 0.41 | 0.17 | |
| 5 | -1.57653 | 0.66989 | 0.61807 | 0.12285 | -2.10866 | 0.72182 | 0.79513 | 0.10006 | 5 | 0.51 | 0.90 | 0.29 | 0.28 | 0.44 | 0.18 | |
| 10 | -1.35880 | 0.39446 | 0.72114 | 0.08586 | -2.08334 | 0.36719 | 1.09159 | 0.09992 | 10 | 0.73 | 1.08 | 0.49 | 0.40 | 0.63 | 0.25 | |
| 15 | -0.98183 | 0.15600 | 0.89535 | 0.09327 | -1.77215 | 0.13678 | 1.27726 | 0.09495 | 15 | 1.96 | 3.02 | 1.28 | 0.97 | 1.50 | 0.62 | |
| 20 | -0.90656 | 0.13058 | 0.95990 | 0.10525 | -1.60596 | 0.04857 | 1.35025 | 0.08660 | 20 | 2.72 | 4.41 | 1.67 | 1.52 | 2.27 | 1.02 | |
| 25 | -0.96542 | 0.06887 | 1.05993 | 0.08849 | -1.46792 | 0.01831 | 1.33812 | 0.06151 | 25 | 2.89 | 4.34 | 1.92 | 1.92 | 2.54 | 1.44 | |
| 30 | -0.86001 | 0.09056 | 1.00400 | 0.07564 | -1.31302 | 0.02508 | 1.27532 | 0.03705 | 30 | 3.23 | 4.57 | 2.28 | 2.30 | 2.72 | 1.94 | |
| 35 | -0.70102 | 0.05125 | 1.00264 | 0.06377 | -0.98301 | 0.05919 | 1.10784 | 0.01989 | 35 | 4.34 | 5.82 | 3.24 | 3.15 | 3.45 | 2.87 | |
| 40 | -0.29549 | 0.08803 | 0.82001 | 0.06845 | -0.65493 | -0.00895 | 1.05263 | 0.01170 | 40 | 6.80 | 9.32 | 4.96 | 5.07 | 5.35 | 4.81 | |
| 45 | 0.18151 | 0.07403 | 0.66488 | 0.06931 | -0.16206 | -0.05306 | 0.90539 | 0.03075 | 45 | 12.54 | 17.25 | 9.11 | 9.44 | 10.88 | 8.20 | |
| 50 | 0.58836 | 0.04809 | 0.56188 | 0.07033 | 0.21643 | -0.06256 | 0.79466 | 0.04078 | 50 | 22.52 | 31.13 | 16.29 | 15.96 | 19.26 | 13.23 | |
| 55 | 0.93095 | 0.01124 | 0.50414 | 0.07327 | 0.54471 | -0.02851 | 0.67163 | 0.05165 | 55 | 39.23 | 54.97 | 27.99 | 24.90 | 31.58 | 19.63 | |
| 60 | 1.29465 | 0.01826 | 0.39707 | 0.06686 | 0.94088 | 0.03544 | 0.49776 | 0.05210 | 60 | 66.58 | 90.59 | 48.94 | 40.99 | 52.11 | 32.25 | |
| 65 | 1.68789 | 0.08112 | 0.21998 | 0.06108 | 1.32087 | 0.06500 | 0.37026 | 0.05565 | 65 | 107.66 | 142.63 | 81.26 | 70.55 | 91.16 | 54.60 | |
| 70 | 1.94367 | 0.06957 | 0.18560 | 0.05268 | 1.77280 | 0.12553 | 0.17993 | 0.05060 | 70 | 171.73 | 218.88 | 134.74 | 125.03 | 157.84 | 99.04 | |
| 75 | 2.27473 | 0.07445 | 0.09322 | 0.05044 | 2.17311 | 0.12324 | 0.06891 | 0.04956 | 75 | 281.51 | 355.12 | 223.16 | 224.66 | 282.26 | 178.82 | |
| 80 | 2.61077 | 0.09091 | -0.02282 | 0.04692 | 2.52033 | 0.11001 | -0.01526 | 0.04857 | 80 | 443.37 | 550.30 | 357.21 | 380.12 | 475.41 | 303.94 | |

22

22

4. Modèle relationnel de mortalité de W.Brass

Brass, William – "On the Scale of Mortality" in W.Brass, ed. *Biological Aspects of Demography*. London: Taylor and Francis Lmt; NY: Barnes & Noble Inc.1971, p.69-110

Rolland Pressat – *Elements de démographie mathématique*, Paris, édition de l'AIDELF, 1995 p.41-47 ("Familles de tables de mortalité")

La base théorique: la logit-transformation de $q(x)$, la probabilité de mourir avant l'âge x

$$\text{logit}[q(x)] = \frac{1}{2} \cdot \ln \left[\frac{q(x)}{1-q(x)} \right] \quad \text{où } 0 \leq q(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -\infty \leq \text{logit}[q(x)] \leq +\infty$$

Soit $\text{logit}[q(x)] = Y(x)$ alors $\hat{Y}(x)$ étant la prédiction de la valeur de $Y(x)$ entre $-\infty$ et $+\infty$ permet de prédire la valeur de $q(x)$

$$\text{Donc } \hat{q}(x) = \frac{\exp[2 \cdot \hat{Y}(x)]}{1 + \exp[2 \cdot \hat{Y}(x)]} \quad \text{et} \quad \hat{p}(x) = 1 - \hat{q}(x) = \frac{1}{1 + \exp[2 \cdot \hat{Y}(x)]}$$

Modèle (d'origine) de W.Brass $\hat{Y}(x) = \alpha + \beta \cdot Y^s(x)$ où $Y^s(x)$ – un standard quelconque

Modification de Ewbank, Gomez de Leon et Soto (1983) (*)

quand λ et $\kappa \rightarrow 0$, ce modèle s'approche de sa version classique. L'augmentation du score de λ et de κ respectivement augmente la survie aux jeunes âges ou la diminue aux âges élevés

$$T^s(x) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{p^s(x)}{1-p^s(x)} \right)^\kappa - 1}{2 \cdot \kappa} & \text{quand } p^s(x) \geq 0,5; \\ \sin & \\ \frac{1 - \left(\frac{p^s(x)}{1-p^s(x)} \right)^\lambda}{2 \cdot \lambda} & \text{quand } p^s(x) < 0,5; \end{cases}$$

*1) Ewbank D.C., J.C.Gomez de Leon, M.A. Soto (1983) – "A Reducible Four-parameter System of Model Life Tables" *Population Studies*. V.37, no 1, p.105-127

23

23

Tables de mortalité construites à partir de logit système (standard général de Brass)

$\alpha=0$

$\beta=1$

Application pour les projections:

1. Choisir le standard (critères: la qualité des données et similarité avec la population à projeter)
2. Analyser la dynamique des paramètres α et β (tendance, régression, etc.)
3. Calculer les tables de mortalité

24

24

Modèle relationnel de mortalité de W. Brass (exemple, France)

$\hat{Y}(x) = \alpha + \beta \cdot Y^s(x)$ $p(x) = S_x/S_0$ $p(x)$ étant la probabilité de survie jusqu'à l'âge x

logit $p(x) = \alpha + \beta \cdot \text{logit } p_s(x)$ Deux tables de mortalités différentes sont reliées par la relation linéaire.

$\text{logit}[p(x)] = 0.5 \cdot \ln\{p(x)/[1-p(x)]\}$ $p(x) = e^{2 \cdot \text{logit}[p(x)]} / \{1 + e^{2 \cdot \text{logit}[p(x)]}\}$

| âge | p_x | logit(p_x) | Brass(p_x) | $p_x(\text{modèle})$ | $p_x(\text{modèle})$ |
|-----|---------|----------------|----------------|----------------------|----------------------|
| 1 | 0.99608 | 2.76887 | 0.86690 | 2.76926 | 0.99608 |
| 5 | 0.99526 | 2.67348 | 0.60160 | 2.41407 | 0.99206 |
| 10 | 0.99479 | 2.62598 | 0.54980 | 2.34472 | 0.99089 |
| 15 | 0.99422 | 2.57378 | 0.51320 | 2.29572 | 0.98996 |
| 20 | 0.99201 | 2.41077 | 0.45500 | 2.21780 | 0.98829 |
| 25 | 0.98824 | 2.21561 | 0.38290 | 2.12127 | 0.98583 |
| 30 | 0.98398 | 2.05888 | 0.31500 | 2.03036 | 0.98306 |
| 35 | 0.97919 | 1.92565 | 0.24970 | 1.94294 | 0.97988 |
| 40 | 0.97229 | 1.77893 | 0.18160 | 1.85176 | 0.97596 |
| 45 | 0.96164 | 1.61081 | 0.10740 | 1.75242 | 0.97083 |
| 50 | 0.94449 | 1.41704 | 0.02120 | 1.63702 | 0.96353 |
| 55 | 0.91668 | 1.19903 | -0.08320 | 1.49725 | 0.95232 |
| 60 | 0.87744 | 0.98420 | -0.21000 | 1.32748 | 0.93432 |
| 65 | 0.82702 | 0.78233 | -0.37460 | 1.10711 | 0.90152 |
| 70 | 0.76205 | 0.58198 | -0.58180 | 0.82971 | 0.84016 |
| 75 | 0.67370 | 0.36248 | -0.86730 | 0.44748 | 0.70991 |
| 80 | 0.54873 | 0.09777 | -1.24900 | -0.06355 | 0.46827 |
| 85 | 0.38207 | -0.24039 | -1.72110 | -0.69561 | 0.19921 |

a 1.60864 ordonnée à l'origine

b 1.33882 pente

25

France, Hommes, 2008-2010

Le standard de Brass (général)
n'est pas convenable.

25

Modèle relationnel de mortalité de W. Brass (application, RT)

Le standard étant la mortalité des femmes françaises en 2008-2010
L'estimation des valeurs ajustées pour les femmes tchèques en 2011

| âge | Rép. Tchèque p_x | standard logit $\text{logit}(p_x)$ | France(p_x) | logit $p_x(\text{modèle})$ | $p_x(\text{modèle})$ |
|-----|--------------------|------------------------------------|-----------------|----------------------------|----------------------|
| 1 | 0.99766 | 3.02661 | 2.85984 | 3.0190 | 0.99762 |
| 5 | 0.99714 | 2.92777 | 2.76759 | 2.9108 | 0.99705 |
| 10 | 0.99680 | 2.87131 | 2.72009 | 2.8550 | 0.99670 |
| 15 | 0.99617 | 2.78080 | 2.67137 | 2.7978 | 0.99630 |
| 20 | 0.99498 | 2.64435 | 2.58522 | 2.6967 | 0.99547 |
| 25 | 0.99355 | 2.51882 | 2.48758 | 2.5821 | 0.99431 |
| 30 | 0.99231 | 2.43021 | 2.39037 | 2.4680 | 0.99287 |
| 35 | 0.99039 | 2.31765 | 2.28018 | 2.3386 | 0.99078 |
| 40 | 0.98730 | 2.17672 | 2.14051 | 2.1747 | 0.98725 |
| 45 | 0.98200 | 1.99968 | 1.96806 | 1.9722 | 0.98101 |
| 50 | 0.97356 | 1.80311 | 1.77302 | 1.7433 | 0.97030 |
| 55 | 0.95979 | 1.58633 | 1.57173 | 1.5070 | 0.95320 |
| 60 | 0.93698 | 1.34957 | 1.38353 | 1.2861 | 0.92905 |
| 65 | 0.90162 | 1.10770 | 1.20278 | 1.0739 | 0.89547 |
| 70 | 0.84664 | 0.85423 | 1.01646 | 0.8552 | 0.84690 |
| 75 | 0.76367 | 0.58644 | 0.80951 | 0.6123 | 0.77288 |
| 80 | 0.63380 | 0.27428 | 0.55409 | 0.3125 | 0.65136 |
| 85 | 0.43805 | -0.12454 | 0.22458 | -0.0743 | 0.46293 |

a -0.33789 ordonnée à l'origine


b 1.17382 pente

26

République Tchèque Femmes 2011

Ajustement est satisfaisant
(grâce au choix raisonné du
standard)

26



5 Nouvelles tables type des Nations Unies établies pour les pays en voie de développement (1982)

United Nations (1982) – *Model Life Tables for Developing Countries*. NY, United Nations, Population Studies, no. 77

<https://www.un.org/en/development/desa/population/publications/manual/model/life-tables.asp>

Données de base: initialement 286 (143+143) tables de mortalité (54 – Afrique, 50 – Amérique Latine, 39 – Asie), après la sélection seulement 72 tables ont été retenues (dont une de l'Afrique – Tunisie)

Principe de construction:

- 1) sélection et classification des tables en appliquant la procédure de Coale-Demeny,
- 2) analyse de composants principaux et
- 3) approche relationnelle de W.Brass pour déterminer les paramètres du modèle dans chaque classe (cluster).

Structure: 4 familles de tables régionales sont retenues; elles sont dérivées du modèle à un paramètre ($k=1$) avec e_{10} comme entrée unique et la possibilité de modifier le scénario de mortalité en modifiant les autres paramètres du modèle de base.

$$\text{logit } {}_n q_x = U_{0x}^C + \sum_{i=1}^k a_i \cdot U_{ix}^C$$

U_{0x}^C – le standard ou la moyenne pour la famille C

U_{ix}^C – les caractéristiques de la déviation du standard C

a_i – l'ampleur de la déviation du standard

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 27

27

Particularités de la mortalité régionale dans les tables type de Nations Unies 1983

Type « Amérique Latine »

Donnée de base: Tables en provenance de l'Amérique Latine, Philippines, Sri Lanka et Thaïlande

Particularités: la mortalité juvénile et la mortalité des jeunes adultes sont extrêmement hautes, en revanche la mortalité infantile et la mortalité aux âges élevés est relativement basse

Type « Chili »

Donnée de base: Chili (1950, 1960, 1970)

Particularités: la mortalité infantile est très élevée à cause (probablement) des maladies respiratoires

Type « Asie du Sud »

Donnée de base: Tables en provenance des pays d'Asie du Sud, d'Asie de l'Ouest et de Tunisie

Particularités: la mortalité est forte aux âges jeunes et aux âges élevés

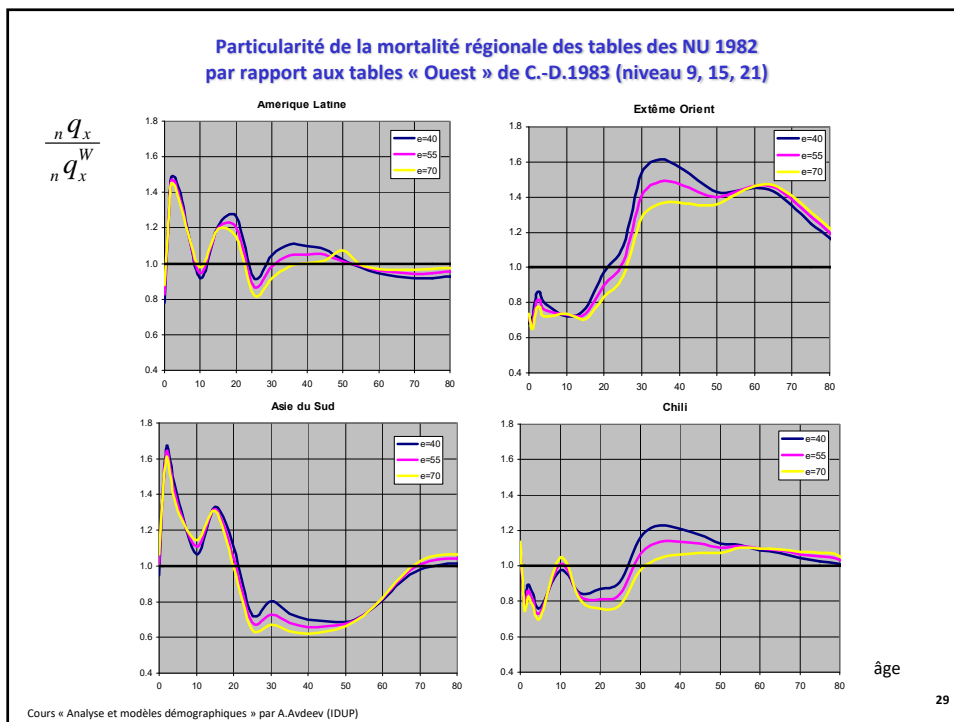
Type « Extrême Orient »

Donnée de base: Tables en provenance des pays d'Asie de l'Est mais aussi de la Malaisie, de la Guyane et de Trinidad et Tobago

Particularités: la mortalité est forte après l'âge 40 et surtout parmi les personnes âgées, probablement à cause de la tuberculose et de l'hépatite B.

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP) 28

28



29

Choix d'une table (type) de mortalité à partir des données incomplètes et déficientes

Procédure : BESTFIT
 recherche un-, deux-, ou trois-composants UN et CD tables de mortalité qui ajuste mieux les valeurs de ${}_nq_x$

Selected application is BESTFIT (death.mpl)

Input File Name: C:\Program Files\IBRM\DRTPM\F\death.mpl
 When last updated: 13 February 2002

TITLE: HYPOTHETICAL FEMALES
 Sex: Females
 Model life table pattern: User-defined model
 TITLE, user-defined model: BRASS-AFRICAN STANDARD

TITLE: HYPOTHETICAL MALES
 Sex: Males
 Model life table pattern: United Nations Chilean

Age Group: 0 - 1
 $q(x)$: 0.22000

| Age Group | $q(x)$ | Predicted $q(x)$ values based on | | | Predicted $q(x)$ values extrapolated to age 100+ based on one component fit | | | | | | | | | | |
|-----------|---------|----------------------------------|----------------|------------------|---|--------|---------|---------|--------|--------|--------|---------|---------|--------|-------|
| | | one component | two components | three components | Age | $m(x)$ | $q(x)$ | $Q(x)$ | $L(x)$ | $S(x)$ | $T(x)$ | $e(x)$ | $q(x)$ | | |
| 0 - 1 | 0.22000 | 0.19800 | 0.13147 | 0.21986 | 0.21982 | 1 | 0.14375 | 0.13147 | 100000 | 13147 | 91454 | 0.82026 | 4926915 | 49 359 | 0.303 |
| 1 - 5 | 0.16600 | 0.12537 | 0.16933 | 0.15391 | 0.15391 | 5 | 0.02417 | 0.12537 | 86023 | 10889 | 318677 | 0.90277 | 2844483 | 48 415 | 1.361 |
| 5 - 10 | 0.04991 | 0.04991 | 0.05470 | 0.05066 | 0.05071 | 10 | 0.01125 | 0.05470 | 75964 | 4155 | 369433 | 0.96106 | 3625764 | 47 730 | 2.500 |
| 10 - 15 | 0.01908 | 0.01908 | 0.02226 | 0.01989 | 0.01981 | 15 | 0.00450 | 0.02226 | 71809 | 1586 | 350049 | 0.97126 | 3283051 | 46 347 | 2.500 |
| 15 - 20 | 0.01191 | 0.01191 | 0.01378 | 0.01261 | 0.01241 | 20 | 0.00289 | 0.01378 | 70211 | 3853 | 344846 | 0.96489 | 2961362 | 44 323 | 2.666 |
| 20 - 25 | 0.00264 | 0.00264 | 0.00108 | 0.00353 | 0.00409 | 25 | 0.01040 | 0.00108 | 67505 | 3432 | 329326 | 0.94775 | 2554056 | 37 241 | 2.548 |
| 25 - 30 | 0.04410 | 0.04410 | 0.05230 | 0.03778 | 0.02842 | 30 | 0.01074 | 0.05230 | 64106 | 3353 | 312120 | 0.94668 | 2227130 | 34 741 | 2.491 |
| 30 - 35 | 0.04020 | 0.04020 | 0.05433 | 0.04351 | 0.03506 | 35 | 0.01117 | 0.05433 | 60754 | 3201 | 295526 | 0.94395 | 1919101 | 31 521 | 2.507 |
| 35 - 40 | 0.04500 | 0.04500 | 0.06223 | 0.05074 | 0.04404 | 40 | 0.01241 | 0.06223 | 57425 | 2466 | 270708 | 0.93963 | 1619471 | 28 180 | 2.527 |
| 40 - 45 | 0.06200 | 0.06155 | 0.06844 | 0.06088 | 0.06404 | 45 | 0.01438 | 0.06844 | 53993 | 3749 | 269787 | 0.93210 | 1348764 | 24 832 | 2.547 |
| 45 - 50 | 0.08300 | 0.07751 | 0.09390 | 0.07293 | 0.08182 | 50 | 0.01793 | 0.09390 | 50244 | 4316 | 240714 | 0.90221 | 1079997 | 21 496 | 2.598 |
| 50 - 55 | 0.16204 | 0.15204 | 0.19166 | 0.16125 | 0.16566 | 55 | 0.02260 | 0.19166 | 46926 | 5136 | 211715 | 0.87261 | 830203 | 18 274 | 2.566 |
| 55 - 60 | 0.15022 | 0.14827 | 0.19182 | 0.14149 | 0.14149 | 60 | 0.03149 | 0.14827 | 40802 | 5968 | 189508 | 0.82743 | 622180 | 15 247 | 2.570 |
| 60 - 65 | 0.19042 | 0.20395 | 0.16085 | 0.20501 | 0.20501 | 65 | 0.04522 | 0.20395 | 34824 | 7090 | 158004 | 0.78913 | 432060 | 12 419 | 2.551 |
| 65 - 70 | 0.25897 | 0.27299 | 0.21208 | 0.24340 | 0.24340 | 70 | 0.06213 | 0.27299 | 27744 | 7574 | 119976 | 0.67629 | 275786 | 9 841 | 2.525 |
| 70 - 75 | 0.36975 | 0.38590 | 0.29569 | 0.30801 | 0.30801 | 75 | 0.09594 | 0.38590 | 20170 | 7726 | 81127 | 0.55629 | 155621 | 7 225 | 2.488 |
| 75 - 80 | 0.49333 | 0.51919 | 0.37826 | 0.39951 | 0.39951 | 80 | 0.14082 | 0.51919 | 12306 | 6319 | 45130 | 0.44961 | 74894 | 6 020 | 2.341 |
| 80 - 85 | 0.58211 | 0.60578 | 0.49212 | 0.39539 | 0.39539 | 85 | 0.18153 | 0.60578 | 6067 | 3675 | 20246 | 0.34983 | 29595 | 4 873 | 2.255 |
| | | | | | | 90 | 0.23818 | 0.79228 | 2392 | 1937 | 7963 | 0.26512 | 9119 | 3 896 | 2.189 |
| | | | | | | 95 | 0.37187 | 0.84800 | 151 | 126 | 345 | 0.12479 | 394 | 2 617 | 1.811 |
| | | | | | | 100 | 0.43887 | | 23 | 23 | 49 | | 2 174 | 2 174 | |

First entry of $S(x)$ is for survivorship of 5 cohorts of birth to age group 0-4 = $L(0.5) / 500000$
 Second entry of $S(x)$ is for $S(0.5) = L(0.5) / (L(0.5))$
 Last entry of $S(x)$ is $S(95+5) = T(100) / T(95)$

30

30

Modifications et perfectionnement récents des tables type de mortalité (UN version 2010)

World Population Prospects 2010 : Extended Model Life Tables

« With the extension of the projection horizon for all countries up to 2100 as part of the 2010 revision of the UN *World Population Prospects*, it was necessary to allow life expectancy at birth to go beyond 92.5 years. In addition, in-depth analysis of the initial 1998 extension revealed substantial deviation for out-of-sample predictions compared to the Human Mortality Database experience at very low mortality levels (especially for Coale-Demeny models, see Figure 1 in Willmoth et al., 2009), and the need to improve a smoother transition between the existing set of model life tables up to age 75 and their extension. A new set extended model life tables was computed in Spring 2010 by staff of the Population Division (Gerland and Li) based on the modified Lee-Carter approach. After extensive cross-validation against the Human Mortality Database (HMD) performed by Kirill Andreev some constraints have been imposed to ensure some convergence toward the HMD mortality experience at high levels of $e(0)$. The nine families of model life tables extended up to $e(0)=100$ were smoothly blended to the existing ones to insure smooth mortality surfaces by age and sex and $e(0)$ levels. »

De nouvelles tables type de mortalité sont téléchargeables à partir
<http://esa.un.org/wpp/Model-Life-Tables/download-page.html> et <https://www.un.org/development/desa/pd/data/model-life-tables>

Literature: Li, N. and P. Gerland (2011). "Modifying the Lee-Carter Method to Project Mortality Changes up to 2100" Paper presented at the 2011 Annual Meeting of the Population Association of America (PAA) in Session 125: Formal Demography I: Mathematical Models and Methods on Friday 1 April - <http://paa2011.princeton.edu/sessionViewer.aspx?SessionId=1002>



Procédure : UNABR

Selected application is UNABR (unabr.mpl)

Input File Name: C:\Program Files (x64)\MORTPAK4\unabr.mpl
 When last updated: 11 February 2002

| TITLE: HYPOTHETICAL POPULATION | | | | | Unabridged life table | | | | |
|--------------------------------|-------------------|-----------------|------------|-------|-----------------------|----------|----------|--------|--------|
| Age Group | Observed $q(x,n)$ | Fitted $q(x,n)$ | Difference | Ratio | Age | $m(x,n)$ | $q(x,n)$ | $l(x)$ | $e(x)$ |
| 0 - 1 | 0.03500 | 0.03500 | 0.00000 | 1.00 | 0 | 0.03500 | 0.03500 | 100000 | 69.79 |
| 1 - 5 | 0.00600 | 0.00606 | 0.00006 | 1.01 | 1 | 0.00246 | 0.00246 | 96500 | 71.31 |
| 5 - 10 | 0.00350 | 0.00334 | -0.00016 | 0.95 | 2 | 0.00153 | 0.00153 | 96263 | 70.48 |
| 10 - 15 | 0.00290 | 0.00310 | 0.00020 | 1.07 | 3 | 0.00115 | 0.00115 | 96115 | 69.60 |
| 15 - 20 | 0.00570 | 0.00510 | -0.00060 | 0.89 | 4 | 0.00094 | 0.00094 | 96005 | 68.67 |
| 20 - 25 | 0.00765 | 0.00825 | 0.00060 | 1.08 | 5 | 0.00080 | 0.00080 | 95915 | 67.74 |
| 25 - 30 | 0.01120 | 0.01104 | -0.00016 | 0.99 | 6 | 0.00071 | 0.00071 | 95830 | 66.79 |
| 30 - 35 | 0.01350 | 0.01320 | -0.00030 | 0.98 | 7 | 0.00065 | 0.00065 | 95769 | 65.84 |
| 35 - 40 | 0.01575 | 0.01553 | -0.00022 | 0.99 | 8 | 0.00060 | 0.00060 | 95707 | 64.88 |
| 40 - 45 | 0.01825 | 0.01821 | -0.00004 | 1.05 | 9 | 0.00058 | 0.00058 | 95649 | 63.92 |
| 45 - 50 | 0.02750 | 0.02566 | -0.00184 | 0.93 | 10 | 0.00057 | 0.00057 | 95594 | 62.96 |
| 50 - 55 | 0.03500 | 0.03681 | 0.00181 | 1.05 | 11 | 0.00057 | 0.00057 | 95540 | 61.99 |
| 55 - 60 | 0.05500 | 0.05443 | -0.00057 | 0.99 | 12 | 0.00060 | 0.00060 | 95485 | 61.03 |
| 60 - 65 | 0.08500 | 0.08247 | -0.00253 | 0.97 | 13 | 0.00065 | 0.00065 | 95428 | 60.07 |
| 65 - 70 | 0.12500 | 0.12526 | 0.00026 | 1.00 | 14 | 0.00071 | 0.00071 | 95368 | 59.10 |
| 70 - 75 | 0.18500 | 0.18844 | 0.00344 | 1.02 | 15 | 0.00080 | 0.00080 | 95298 | 58.15 |
| 75 - 80 | | | | | 16 | 0.00090 | 0.00090 | 95222 | 57.19 |
| 80 - 85 | | | | | 17 | 0.00101 | 0.00101 | 95136 | 56.24 |
| | | | | | 18 | 0.00114 | 0.00113 | 95040 | 55.30 |
| | | | | | 19 | 0.00126 | 0.00126 | 94932 | 54.36 |
| | | | | | 20 | 0.00140 | 0.00140 | 94812 | 53.43 |
| | | | | | 21 | 0.00153 | 0.00153 | 94680 | 52.50 |
| | | | | | 22 | 0.00166 | 0.00166 | 94535 | 51.58 |
| | | | | | 23 | 0.00179 | 0.00178 | 94378 | 50.67 |
| | | | | | 24 | 0.00191 | 0.00190 | 94210 | 49.76 |
| | | | | | 25 | 0.00202 | 0.00202 | 94030 | 48.85 |
| | | | | | 26 | 0.00213 | 0.00212 | 93841 | 47.95 |
| | | | | | 27 | 0.00223 | 0.00222 | 93641 | 47.05 |
| | | | | | 28 | 0.00232 | 0.00232 | 93433 | 46.15 |
| | | | | | 29 | 0.00241 | 0.00241 | 93217 | 45.26 |
| | | | | | 30 | 0.00249 | 0.00249 | 92992 | 44.37 |
| | | | | | 31 | 0.00258 | 0.00257 | 92761 | 43.48 |
| | | | | | 32 | 0.00266 | 0.00265 | 92522 | 42.59 |

| Parameters | |
|------------|----------|
| A= | 0.00241 |
| B= | 0.00582 |
| C= | 0.11400 |
| D= | 0.00146 |
| E= | 3.11948 |
| F= | 36.56860 |
| G= | 0.00006 |
| H= | 1.98593 |

retours

Procédure : COMPAR

Selected application is COMPAR (compar.mpl)
 Input File Name: C:\Program Files (x86)\MORTPAK4\compar.mpl
 When last updated: 04 January 2002

Comparison of empirical mortality rate

| Age Group | Empirical q(x,n) | United Nations Models | | | | | | Coale-Demeny Models | | |
|-----------|------------------|-----------------------|--------|-----------|----------|---------|------|---------------------|------|-------|
| | | Latin Am. | Chlean | So. Asian | Far East | General | West | North | East | South |
| 0 - 1 | 0.11856 | 47.9 | 55.3 | 53.8 | 42.1 | 48.8 | 50.1 | 47.3 | 54.8 | 53.3 |
| 1 - 5 | 0.09201 | 50.0 | 40.4 | 51.7 | 39.1 | 48.0 | 45.2 | 48.7 | 44.2 | 51.2 |
| 5 - 10 | 0.02970 | 47.5 | 37.4 | 45.9 | 39.4 | 45.6 | 43.1 | 53.6 | 43.1 | 45.2 |
| 10 - 15 | 0.01687 | 45.8 | 42.8 | 40.8 | 44.3 | 46.5 | 49.8 | 53.7 | 43.6 | 45.4 |
| 15 - 20 | 0.02066 | 48.0 | 48.4 | 43.8 | 52.3 | 50.3 | 52.2 | 51.9 | 46.5 | 48.3 |
| 20 - 25 | 0.02531 | 50.3 | 50.9 | 43.6 | 54.2 | 52.1 | 53.2 | 51.3 | 48.0 | 49.0 |
| 25 - 30 | 0.02866 | 51.2 | 51.8 | 42.4 | 55.4 | 52.4 | 53.3 | 51.8 | 48.8 | 48.5 |
| 30 - 35 | 0.03173 | 52.2 | 52.7 | 43.2 | 55.9 | 53.3 | 53.7 | 52.6 | 49.0 | 47.4 |
| 35 - 40 | 0.03560 | 53.1 | 53.4 | 43.2 | 57.1 | 53.7 | 53.8 | 53.1 | 49.1 | 48.7 |
| 40 - 45 | 0.03986 | 53.3 | 54.6 | 44.3 | 58.7 | 54.5 | 54.2 | 53.8 | 48.9 | 48.0 |
| 45 - 50 | 0.04466 | 55.2 | 57.2 | 47.9 | 62.2 | 57.2 | 55.9 | 53.7 | 50.7 | 48.0 |
| 50 - 55 | 0.05029 | 55.0 | 57.6 | 52.2 | 63.9 | 58.5 | 57.1 | 53.3 | 52.2 | 48.8 |
| 55 - 60 | 0.07024 | 58.1 | 59.0 | 58.3 | 65.3 | 60.0 | 57.3 | 52.8 | 54.6 | 47.5 |
| 60 - 65 | 0.12059 | 54.4 | 57.4 | 57.5 | 64.3 | 58.9 | 56.5 | 51.0 | 55.0 | 49.2 |
| 65 - 70 | 0.18452 | 53.2 | 56.9 | 56.6 | 62.6 | 57.6 | 54.1 | 50.1 | 56.0 | 49.9 |
| 70 - 75 | 0.28516 | 48.8 | 52.1 | 54.3 | 58.9 | 54.6 | 51.8 | 48.1 | 56.2 | 51.5 |
| 75 - 80 | 0.41943 | 42.4 | 46.4 | 51.1 | 54.0 | 50.9 | 49.5 | 46.2 | 57.1 | 53.7 |

| Age Group | Latin Am. | Chlean | So. Asian | Far East | General | West | North | East | South |
|----------------------|-----------|--------|-----------|----------|---------|------|-------|------|-------|
| Ages 0 to 10 | 0.8 | 6.0 | 2.7 | 1.0 | 0.4 | 2.3 | 2.1 | 3.9 | 2.7 |
| Ages 10 and over | 3.0 | 3.7 | 5.3 | 4.5 | 3.0 | 1.8 | 1.6 | 3.4 | 1.7 |
| Ages 0 and over | 3.1 | 4.8 | 5.1 | 6.6 | 3.8 | 2.8 | 1.9 | 3.8 | 2.1 |
| Medn(0-10)-Medn(10+) | -4.8 | -12.6 | 5.6 | -18.5 | -8.1 | -8.5 | -3.6 | -5.7 | 3.4 |

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

33



Procédure : MATCH

Table définie par l'utilisateur →

Selected application is MATCH (match.mpl)
 Input File Name: C:\Program Files (x86)\MORTPAK4\match.mpl
 When last updated: 03 October 2001

Calculation of United Nations, Coale-Demeny, or user-designated model life table

| Age | EM | UN | CD | CD | CD | CD | CD | CD | CD | CD | CD | CD | CD | CD | CD | CD | CD | CD | CD | CD |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 | 0.11856 |
| 1 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 | 0.09201 |
| 5 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 | 0.02970 |
| 10 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 | 0.01687 |
| 15 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 | 0.02066 |
| 20 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 | 0.02531 |
| 25 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 | 0.02866 |
| 30 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 | 0.03173 |
| 35 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 | 0.03560 |
| 40 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 | 0.03986 |
| 45 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 | 0.04466 |
| 50 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 | 0.05029 |
| 55 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 | 0.07024 |
| 60 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 | 0.12059 |
| 65 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 | 0.18452 |
| 70 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 | 0.28516 |
| 75 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 | 0.41943 |

Cours « Analyse et modèles démographiques » par A.Avdeev (IDUP)

34