Mathématiques complémentaires

Rappels de cours et exercices.

L1 Économie - UFR 02

jerome.lecointre@univ-paris1.fr

2020-2021

Mathématiques complémentaires Semestre 1.

Table des matières

Bibliographie indicative :

1. Caulier, J-F, *Mathématiques économiques*, Ed. De Boeck 2018.
2. Caulier, J-F., *Fondements mathématiques pour l'économie et la gestion*, Ed. De Boeck 2012.
3. van de Craats, J. et R. Bosch, *Tout ce que vous avez appris et oublié en Maths !*, Ed. Pearson, 2012.

4. Site de l'association des professeurs de mathématiques (https ://www.apmep.fr/). Vous y trouverez des sujets d'annales du brevet au BTS en passant par le bac. Ces sujets sont proposés avec les corrections.

1. Les opérations

Dans cette section, nous rappelons le vocabulaire ainsi que les principales règles de calcul algébrique.

1. 1 Les quatre opérations et leurs propriétés

Soit a, b et c trois nombres réels. On distingue **quatre opérations :**

1. Le résultat de l'**addition** $a+b$ s'appelle une somme et a et b sont les termes.
   (a) $a+b=b+a$. L'addition est **commutative** ;
   (b) $a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b$. L'addition est **associative** ;
   (c) $a+0=0+a=a$ donc 0 est **élément neutre**.

2. Le résultat de la **soustraction** $a-b$ s'appelle une différence et a et b sont les termes.
   (a) $a-b \neq b-a$. La soustraction **n'est pas commutative** : $7-3=4$ et $3-7=-4$;
   (b) $a-(b-c) \neq (a-b)-c$. La soustraction **n'est pas associative** : $8-(7-3)=8-4=4$ et $(8-7)-3=1-3=-2$.

3. Le résultat de la **multiplication** $a \cdot b$ ou $a \times b$ s'appelle un produit et a et b sont les facteurs.
   (a) $a \times b=b \times a$. La multiplication est **commutative** ;
   (b) $a \times b \times c=a \times(b \times c)=(a \times b) \times c$. La multiplication est **associative** ;
   (c) $a \times 1=a$, 1 est **élément neutre**.
   (d) $a \times 0=0 \times a=0$, 0 est **élément absorbant**.
   (e) Le **signe d'un produit** : $a \times(-b)=(-a) \times b=-a \times b$ et $(-a) \times(-b)=a \times b$.
   Un **produit** est **négatif** si le nombre de facteurs négatifs est **impair** : $(-3) \times(-3) \times(-2)=-3 \times-3 \times-3=-18$.
   Un **produit** est **positif** si le nombre de facteurs négatifs est **pair** : $-3 \times-3 \times 2=18$.

4. Le résultat de la **division** $\frac{a}{b}$, avec $b \neq 0$, s'appelle un quotient.
   Le **signe d'un quotient** $(b \neq 0)$: $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$.
   Le **quotient** de deux nombres (au dénominateur non nul) est :
   (a) **positif** si les deux nombres sont de **même signe** : $\frac{-4}{-2}=\frac{4}{2}=2$;
   (b) **négatif** si les deux nombres sont de **signes différents** : $\frac{-4}{2}=\frac{4}{-2}=-2$.

1. 2 Ordre des opérations

1. Sans parenthèses et uniquement avec des additions et des soustractions, on effectue les calculs de gauche à droite : $2+4-5+7=6-5+7=1+7=8$;
2. Sans parenthèses, on effectue les multiplications et les divisions en priorité sur les additions et les soustractions : $7+2 \times 4-5=7+8-5=15-5=10$;
3. En présence de parenthèses, on effectue d'abord les opérations à l'intérieur des parenthèses : $2 \cdot(4-5)+7=2 \cdot(-1)+7=-2+7=5$;
4. Si le calcul comporte plusieurs parenthèses imbriquées, on commence par les calculs situés à l'intérieur des parenthèses les plus intérieures.
   $A=2 \cdot[(2+5) \cdot 3+4]+5=2 \cdot[7 \cdot 3+4]+5=2 \cdot[21+4]+5=2 \cdot 25+5=50+5=55$
5. On peut supprimer les parenthèses précédées d'un signe + et réécrire les termes comme ils se présentent : $2+3+(5-6+1)=2+3+5-6+1$;
6. On peut supprimer les parenthèses précédées d'un signe $-$ et réécrire les termes de la parenthèses en **changeant leurs signes** (cf. factorisation/développement) : $2+3-(5-6+1)=2+3-5+6-1$

1. 3 Exercices

Exercice 1 : Calculer les expressions suivantes.

1) $A = 17 - 3 \cdot 4$
2) $B = (17 - 3) \cdot 4$
3) $C = 3 \cdot 2 + 4$
4) $D = 3 \cdot (3 + 4)$
5) $E = 18 \div 3 - 1$
6) $F = 18 \div (3 - 1)$
7) $G = 26 + (71 - 23) \div 8$
8) $H = (18 - 7) \cdot (7 + 18)$
9) $I = 18 - 7 \cdot 7 + 18$
10) $J = 49 - (50 - 8) \div 7$
11) $K = (36 \div 9) \cdot (15 - 3)$
12) $L = (42 + 3) \div 3 - 13$
13) $M = 11 + (6,4 - 5) \cdot 2$
14) $N = (7,8 - 5,1) \div (1,9 + 7,1)$
15) $O = 9 - (10,8 - 3,3) \div 3$
16) $P = (1,6 + 6,1) \cdot (5 \div 2,5)$
17) $Q = 7 + 2 \cdot (5 + 7) - 5$
18) $R = 28 - (5 + 6 \cdot 3)$
19) $S = 7 \cdot (4 + (1 + 2) \cdot 5)$
20) $T = -7,2 - 4,1$

Exercice 2 : Simplifier les expressions suivantes.

1) $A(x) = 5 + 3 \cdot (x + 4)$ pour $x = 2$
2) $B(x) = 5 + 3 \cdot x + 4$ pour $x = 2$
3) $C(x) = 5 \cdot 3 \cdot x \cdot 4$ pour $x = 2$

2. Les fractions

2. 1 Définition et vocabulaire

1. Si a et b sont deux réels, avec $b \neq 0$ (donc $b \in \mathbb{R}^*$), alors $\frac{a}{b}$ est un **quotient** ou une **fraction**.
2. a est le **numérateur** et b le **dénominateur**.

2. 2 Opérations sur les fractions

Soit a, b, c et d des réels.

1. La valeur d'une fraction ne change pas si on multiplie ou divise le numérateur **et** le dénominateur par un même nombre réel **non nul** : $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{\frac{a}{d}}{\frac{a}{d}}$ avec $c \neq 0$ et $d \neq 0$: $\frac{8}{5} = \frac{8 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}}$.
2. La **multiplication de deux fractions** s'obtient en multipliant les numérateurs et dénominateurs des deux fractions : $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ avec $(b, d \neq 0)$: $\frac{8}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8 \cdot 2}{5 \cdot 5} = \frac{16}{25}$.
3. La **multiplication par un nombre réel** c avec $b \neq 0$: $c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{1 \cdot b} = \frac{ac}{b}$: $4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$.
4. La **division** par une fraction s'obtient en multipliant par son inverse [1] : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ avec $(b, c, d \neq 0)$: $\frac{8}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{32}{15}$.
5. La **somme** ou la **soustraction** entre deux fractions est possible lorsque les deux fractions ont le **même dénominateur** :
   (a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ avec $(b \neq 0)$: $\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$.
   (b) Si les fractions n'ont pas le même dénominateur alors il est nécessaire, avant d'effectuer l'additionner ou la soustraction, de les mettre au même dénominateur. Pour ce faire, on multiplie le numérateur et le dénominateur (cf. règles de calcul ci-dessus) de la première fraction par le dénominateur de la seconde et inversement pour la seconde fraction : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$: $\frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{20}{15} + \frac{6}{15} = \frac{26}{15}$.
6. Le **produit en croix :** Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

2. 3 Simplification d'une fraction

Simplifier une fraction consiste à la rendre **irréductible** c'est-à-dire que les numérateur et dénominateur deviennent premiers entre eux. En d'autres termes, les numérateur et dénominateur d'une fraction n'ont plus de diviseurs communs (excepté 1).

Soit la fraction $\frac{40}{20}$ à simplifier. On cherche les diviseurs communs au numérateur et au dénominateur : $40 = 4 \cdot 10$ et $20 = 2 \cdot 10$ donc $\frac{40}{20} = \frac{4 \cdot 10}{2 \cdot 10} = \frac{4}{2}$. Or, cette fraction n'est pas irréductible car 4 et 2 ont encore un diviseur commun. En effet, $\frac{4}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 1} = \frac{2}{1} = 2$.

1. Attention, ne pas confondre inverse et opposé. L'inverse de $x \in \mathbb{R}^*$ est $\frac{1}{x}$ alors que son opposé est $-x$.

2. 4 Exercices

Exercice 3 : Calculer les expressions ci-dessous et donner les résultats sous la forme d'une fraction irréductible :

1) $A = \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{4}$
2) $B = 3 + 2 \cdot \frac{5}{3}$
3) $C = \frac{12-4}{13-5}$
4) $D = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{12}}$
5) $E = \frac{2+\frac{2}{3}}{3-\frac{1}{2}}$
6) $F = \left(\frac{3}{2} + 2\right) \cdot \frac{2}{5}$
7) $G = \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}-4}$
8) $H = \frac{2+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{2}{3}}$
9) $I = \left(2 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{2} \cdot 3 - \frac{2}{3}\right)$
10) $J = \frac{4}{15} - \frac{4}{15} \times \frac{15}{16}$
11) $K = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} - \frac{4}{5} \times 4$
12) $L = (1 + \frac{5}{6}) \div (2 - \frac{15}{36})$
13) $M = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{4}\right)$
14) $N = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}$
15) $O = \frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 10}$
16) $P = \frac{\frac{3}{2}-\frac{7}{5}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} - 1}$
17) $Q = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{4}{3} - 1}$
18) $R = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right)$

Exercice 4 : Soit $a = \frac{5}{4}$ et $b = \frac{-8}{3}$. Effectuer les calculs ci-dessous et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

1) $A = a + b$
2) $D = \frac{a}{b}$
3) $M = a \cdot b$
4) $S = a - b$

Exercice 5 : Simplifier l'écriture (réduire au même dénominateur) :

1 $A(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x}$

2 $B(x) = \frac{3x}{x+1} + \frac{2}{x+2}$

3 $C(x) = \frac{2}{x+2} + 3$

4 $D(x) = \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{1 + \frac{1}{x-1}}$.

3. Proportionnalité et pourcentage

3. 1 Le coefficient de proportionnalité

Si deux grandeurs sont proportionnelles, le **coefficient de proportionnalité** est le nombre par lequel les valeurs prises par la première grandeur doivent être multipliées pour obtenir celles prises par la deuxième. Les variables x et y sont proportionnelles si on peut écrire $y = a \times x$ pour toutes les valeurs de x et de y.

Un tableau de nombres représente une situation de proportionnalité si pour passer d'une ligne à l'autre on multiplie toujours par un même nombre : le coefficient de proportionnalité.

Pour trouver le coefficient de proportionnalité, on calcule $\frac{x}{y}$ ou $\frac{y}{x}$. Le résultat doit toujours être constant.

	tableau 1			tableau 2		
x	1	2	3	1	2	3
y	2	4	6	2	3	5

Tableau 1 : $\frac{y}{x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$ donc le coefficient de proportionnalité est égal à 2.

Tableau 2 : $\frac{y}{x} = \frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}$ donc il n'existe pas de relation de proportionnalité.

3. 2 Comment calculer une valeur manquante lorsqu'il existe une relation de proportionnalité ? Le produit en croix.

x	10	?
y	20	40

Méthode :

1. On dessine une croix qui relie les nombres en diagonale.
2. On multiplie les nombres qui sont sur la diagonale.
3. On divise le résultat par le troisième nombre.

$10 \times 40 = x \times 20$ donc $x = \frac{10 \times 40}{20} = 2$ (cf. résolution d'équation à une inconnue).

3. 3 Pourcentage

1. Un nombre correspond à un **pourcentage** si l'on peut l'exprimer sous forme de fraction dont le dénominateur est 100 ou sous forme décimale. Par exemple on peut exprimer un pourcentage de 30 pour cent en le notant : $30\% = \frac{30}{100} = 0,3$.
2. Comment calculer le pourcentage d'une grandeur ?
   Pour calculer un pourcentage d'une grandeur il suffit de multiplier cette dernière par le pourcentage exprimé sous forme de fraction ou sous forme décimale. Pour calculer 30% d'une somme de 90 euros on calcule $90 \times \frac{30}{100} = 27$.
3. Comment calculer une grandeur qui augmente de $t\%$?
   Soit x la valeur de la grandeur. Si l'on applique la hausse de $t\%$ à x, on obtient la valeur de l'augmentation : $\frac{t}{100} \times x$. Or, pour obtenir la valeur de x après l'augmentation, il faut ajouter l'augmentation à x donc $x + \frac{t}{100} \times x = x\left(1 + \frac{t}{100}\right)$. Par conséquent le **coefficient multiplicateur** associé à une augmentation de $t\%$ est $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

$t\%$	100%	50%	0%	-50%	-90%	-100%
Coeff. multiplicateur	2	1,5	1	0,5	0,1	0

3. 4 Exercices

Exercice 6 Tableau de proportionnalité.

Une entreprise propose les tarifs suivants :

Distance (km)	100	150	200	250
Coûts (euros)	83,60	125,40	159,20	191

Le coût payé est-il proportionnel à la distance parcourue ? Justifier votre réponse.

Exercice 7 Situations de proportionnalité.

1) 5 mètres de tissu ont coûté 67,5 euros. Combien coûtent 7 mètres du même tissu ?
2) Deux kilogrammes de sucre pour trois kilogrammes d'abricots, c'est la proportion indiquée sur le livre de recettes pour faire cette confiture. Quelle quantité d'abricots faut-il pour 3 kg de sucre ? Combien de sucre doit-on ajouter à 7,5 kg d'abricots ?
3) Une voiture roulant à vitesse constante, a parcouru 105 km en 1 h 15min. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir 189 km ?
4) Pour faire une boisson à la framboise, André met 4 volumes de sirop pour 7 d'eau et Béatrice met 5 volumes de sirop pour 9 d'eau. Quelle est la boisson la plus sucrée ?
5) 2 kg de bananes coûtent 2,80 euros.
   a) Quel est le prix au kilo ? (Combien coûte 1 kg de banane ?)
   b) Combien coûtent 3,5 kg de bananes ?
   c) Quelle masse de bananes puis-je acheter avec 8,05 euros ?

Exercice 8 Population française et proportionnalité.
En 2000, la population de la France est de 58,6 millions.

1) Sachant que le taux de natalité s'élevait alors à 13,2 naissances pour 1000 habitants, calculer le nombre de naissances en France en 2000.
2) Sachant que le taux de mortalité s'élevait à 9,1 décès pour 1000 habitants, calculer le nombre de décès en France cette année là.
3) L'accroissement naturel est la différence entre le nombre de naissances et le nombre de décès. En déduire l'accroissement naturel de la population en France cette année là.
4) Exprimer cet accroissement en pourcentage par rapport à la population de la France en l'an 2000.

Exercice 9 Notion de proportionnalité et Pourcentage.
Un paquet de 800g de céréales est vendu 2,8 euros.

1) Quel sera le prix d'un paquet de 1kg 500 si les prix sont proportionnels ?
2) Le même paquet est vendu avec 20% gratuit de produit en plus au prix de 6,4 euros. Est-ce une offre intéressante ? Justifier votre réponse.
3) Un autre paquet de 300g, dont 50g gratuit, est vendu au prix de 0,9 euros. La promotion est-elle honnête ? Justifier votre réponse.

Exercice 10 Pourcentage de proportion.

1) Sur 750 personnes interrogées dans un sondage, 270 disent ne jamais acheter de quotidien. Quel est le pourcentage de personnes interrogées qui déclarent acheter un quotidien ?
2) Dans un sondage effectué auprès de 1 200 personnes, 0,75% des personnes ne se sont pas prononcées. Quel est le nombre de personnes correspondant ?

Exercice 11 Pourcentages.

1) Après une baisse de 20%, le prix d'un article est affiché : 280 euros. Quel est son prix initial ?
2) Un article coûte 32 euros. Les soldes sont prévues dans 8 jours et on peut espérer une baisse de 20 à 50% du prix. Si on a le « courage » d'attendre, les économies seront comprises entre quelles bornes ?
3) Un article passe d'un prix initial de 22,5 euros à un prix final de 270 euros. Quel est le pourcentage d'augmentation ?
4) Un article a un prix final de 1207,5 euros 50 après une augmentation de 15%. Quel est son prix initial ?

Exercice 12 Augmentation et baisse successives.

1) Le litre d'essence, après avoir augmenté de 55% en Mai, a baissé de 28% en Septembre. Sachant qu'il coûtait 1 euro en Avril, quel est son coût en Octobre ? Quel est le coefficient multiplicateur ? En déduire le % global d'augmentation.
2) Un produit augmenté une première fois de 15% puis une seconde de 12% coûte finalement après ces 2 augmentations 257,60 euros. Quel était son prix initial ?

Exercice 13 Répartition proportionnelle.

1) Trois personnes s'associent pour créer une entreprise. La première apporte 27 000 euros, la seconde 54 000 euros et la troisième 81 000 euros. A la fin de l'exercice, ils se partagent 9 000 euros proportionnellement à leur apport initial. Combien le premier doit-il recevoir ?
2) Quatre personnes ont gagné au total 693 euros en faisant un travail en commun. Chaque personne a travaillé respectivement 9h, 12h, 18h et 6h. Quelle doit être la part de chacun si elle est rémunérée au même tarif horaire.

Exercice 14 Partage inversement proportionnel.

La commune de Candé prévoit dans son budget 25 000 euros au titre des activités culturelles et sociales. La répartition doit s'effectuer ainsi : 10% sont attribués à la Coopérative scolaire, 24% du reste sont affectés à la Caisse d'Entraide, le reste est distribué entre 3 clubs de loisirs inversement proportionnellement aux nombres d'années d'activités de chacun soit respectivement 3 ans, 2 ans et 1 an. Effectuer le détail de cette répartition.

Exercice 15 Problème I.

Léa a besoin de nouveaux cahiers. Pour les acheter au meilleur prix, elle étudie les offres promotionnelles de trois magasins. Dans ces trois magasins, le modèle de cahier dont elle a besoin a le même prix avant promotion.

Magasin A : cahier à l'unité ou lot de trois cahiers pour le prix de deux ;

Magasin B : pour un cahier acheté le deuxième à moitié prix ;

Magasin C : 30% de réduction pour chaque cahier acheté.

1) Expliquer pourquoi le magasin C est plus intéressant si elle n'achète qu'un cahier.
2) Quel magasin doit-elle choisir si elle veut acheter : a) deux cahiers ? b) trois cahiers ?
3) La carte de fidélité du magasin C permet d'obtenir 10% de réduction sur le ticket de caisse, y compris sur les articles ayant déjà bénéficié d'une première réduction. Léa possède cette carte de fidélité, elle l'utilise pour acheter un cahier. Quel pourcentage de réduction totale va-t-elle obtenir ?

Exercice 16 Problème II.

Dans l'Océan Pacifique Nord, des déchets plastiques qui flottent se sont accumulés pour constituer une poubelle géante qui est, aujourd'hui, grande comme 6 fois la France.

1) Sachant que la superficie de la France est environ 550 000 km^2, quelle est la superficie actuelle de cette poubelle géante ?
2) Sachant que la superficie de cette poubelle géante augmente chaque année de 10%, quelle sera sa superficie dans un an ?
3) Que pensez-vous de l'affirmation « dans 4 ans, la superficie de cette poubelle aura doublé » ? Justifier.

Exercice 17 Problème III.

Un fleuriste dispose d'un certain nombre de bouquets. Le matin, il vend trois quarts de ces bouquets, et l'après midi, il vend les deux tiers du reste. Il lui reste 20 bouquets le soir.

1) Calculer la fraction de bouquets qu'il lui reste le soir.
2) Calculer combien de bouquet notre fleuriste avait le matin.

4. Les puissances (Exposants entiers).

4. 1 Définition

1. Soit n est un entier naturel (cf. dernière fiche) et a un nombre réel, on appelle a^n le nombre : $a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n\ fois}$.
2. Cette expression se lit "a puissance n", avec a **la base** et n **l'exposant** : $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ et $(x+5)^2 = (x+5) \times (x+5)$.
3. Par convention, l'exposant 1 n'est pas exprimé : $a^1 = a$.
4. Par définition, $a^0 = 1$ pour $a \in \mathbb{R}^*$.
5. L'expression 0^0 est non définie.

4. 2 Propriétés des puissances

Soient a et b deux réels ($b \neq 0$), m et n deux entiers.

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
4. $a^n \times a^m = a^{n+m}$
5. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
6. $(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$
7. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
8. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
9. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \quad (m \neq 0)$

4. 3 Exercices

Exercice 18 : Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = 2^2 \cdot 2^5$
2) $B = 3^2 \cdot 3^4$
3) $C = 2^2 \cdot 3^4$
4) $D = 2^3 \cdot 2^{-3}$
5) $E = 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^2$
6) $F = 2^{-3} \cdot 4$
7) $G = \dfrac{(3^4)^3 \cdot (3^2)^4}{(-3^4)^{15} \cdot 3^4}$
8) $H = \dfrac{3^8}{3^5} - \dfrac{4^2 \cdot 2^4}{2^6} + 3(-2)^3$
9) $I = (2^3 \cdot 5^2)^3 \cdot 2^4 \cdot 5^2$
10) $J = \left(\dfrac{3^2}{2^3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{2}{3^3}\right)^2$
11) $K = 16^3 \cdot 27^2$
12) $L = \dfrac{8^3 \cdot 4^2}{32^4}$
13) $M = \dfrac{(2^4 \cdot 3^2)^2}{(2^3 \cdot 3)^3}$
14) $N = (2^3 \cdot 2^{-4})^2 \cdot (3^3)^2$
15) $O = \dfrac{3(-3)^2 + 4(-2)^3}{2^3 - 3^2}$
16) $P = \dfrac{(-2)^3 \cdot 2^3}{3\,(2^2)^2}$

Exercice 19 : Écrire le plus simplement possible :

1) $A(x) = (-2x)^2$
2) $B(x) = (-2x^2)$
3) $C(x) = (-2x)^3$ pour $x = 0$
4) $D(x) = (-2x)^0$
5) $E(x) = x^{-1} \cdot 5x^3$
6) $F(x) = 3^{2 \cdot x} \cdot 3$
7) $D(x,y) = 3x^2y^3 - y(xy)^2$
8) $G(x,y,z) = \dfrac{-12x^4yz^3}{3x^2y^4z}$
9) $H(x,y,z) = \dfrac{3x \cot z^2 \cdot 35y^{-8}}{15y^{-3}x^4}$
10) $I(x,y,z) = \dfrac{-18x^3y^2z}{-4x^5yz^2}$
11) $J(x,y,z) = \dfrac{24x^4y^2z^3}{-3x^3y^4z}$
12) $K(x,y) = \dfrac{(x^2y)\,(xy^3)^2}{(x^3y^2)^3}$

Exercice 20 : Simplifier la valeur de l'expression $A(n) = (1,5)^{2n} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5. Racine carrée (un exposant relatif).

5. 1 Définition

La racine carrée d'un nombre $a \geq 0$ est le nombre b tel que $b \geq 0$ et $b^2 = a$. C'est le nombre b, qui élevé au carré, donne a. On le note : $b = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.
Exemple : $\sqrt{16} = 4$ puisque[2] $4^2 = 16$. Alors que $\sqrt{-16}$ n'existe pas car le produit d'un nombre réel par lui-même est toujours positif : $x \cdot x = x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lecture et interprétation du symbole : $\forall$ qui se lit "pour tout" ou "quelque soit".
$\sqrt{x} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ signifie que la racine carrée de x est toujours positive ou nulle pour n'importe quel réel positif ou nul. Et, $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$ alors $\sqrt{x}$ n'existe pas.

5. 2 Propriétés :

1. $\forall x \geq 0,\ (\sqrt{x})^2 = x$: $(\sqrt{4,5})^2 = 4,5$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x^2} = x$: $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}^-,\ \sqrt{x^2} = -x$: $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$;
4. Pour tout entier naturel non nul n, $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$: $\sqrt{3^3} = \left(\sqrt{3}\right)^3 = 3$
5. $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$: $\sqrt{5 \times 4} = \sqrt{5} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{5}$;
6. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ avec $y \neq 0$: $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{8}{6}} = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$;
7. Un **carré parfait** est le carré d'un entier. Par conséquent : $\sqrt{1} = 1$ car $1^2 = 1$; $\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$; $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{121} = 11$; $\sqrt{144} = 12$.

5. 3 Exercices

Exercice 21 : Effectuer les calculs suivants (sans calculatrice) et en simplifiant le plus possible :

1) $A = \sqrt{36 + 64}$
2) $B = \sqrt{36} + \sqrt{64}$
3) $C = \sqrt{8} \cdot \sqrt{72}$
4) $D = 2\sqrt{50} + \sqrt{32} - 2\sqrt{18}$
5) $E = \dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{47}} \cdot \dfrac{\sqrt{94}}{\sqrt{90}}$
6) $F = \dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{19}} \cdot \dfrac{\sqrt{57}}{\sqrt{45}}$
7) $G = \sqrt{32} - \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{8}$
8) $H = \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$
9) $I = 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48}$
10) $J = 10\sqrt{20} + 7\sqrt{45} - 5\sqrt{180}$
11) $K = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{25}}$
12) $H = \dfrac{\sqrt[3]{64^2}}{\sqrt{64}}$
13) $L = \left(\sqrt{6} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6} - 2\sqrt{3}\right)$
14) $M = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8\sqrt{4}$

Exercice 22 : Encadrer les racines suivantes par deux entiers naturels.

1) $A = \sqrt{20}$ 2) $B = \sqrt{40}$ 3) $C = \sqrt{50}$

Exercice 23 : Écrire les expressions suivantes avec un dénominateur entier :

1) $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 2) $B = \dfrac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}$

2. Par définition, on suppose que la racine carrée est positive. $(-4)^2 = 16$ mais on ne considère que 4 comme racine carrée de 16.

6. Développement d'un polynôme.

6. 1 Qu'est-ce qu'un polynôme ?

1. Dans l'expression $9x^2$, x est la **variable**, 9 est le **coefficient** et 2 le **degré**. Toute expression consistant en un coefficient multipliant une variable (ou puissances de variable) est un **monôme** : $9x^2$, est un monôme de degré 2 ; $3x$ est un monôme de degré 1 ; 6 est un monôme de degré 0. En effet, $6 = 6 \cdot x^0$, or, $x^0 = 1$ (cf. règles de calcul sur les puissances).
2. L'addition et/ou la soustraction de plusieurs monômes est un **polynôme** : $A(x) = 9x^2 + 3x + 15$. On repère la puissance la plus élevée pour caractériser un polynôme. Ainsi, $A(x)$ est un polynôme de de degré 2.
3. Un polynôme peut comprendre plusieurs variables : $B(x, y) = 5x^2y + 6y$. Pour caractériser ce type de polynôme, on additionne les puissances pour le monôme de plus haut de degré. Ainsi, $B(x, y)$ est un polynôme de degré 3 (cf. cours du S2).

6. 2 Règles de calcul sur les monômes

1. On ne peut additionner ou soustraire que des monômes ayant le même degré. Cette règle se comprend avec la factorisation.
   (a) $A(x) = 6x^2 + 12x^2 = 18x^2$. $A(x)$ est un polynôme de degré 2.
   (b) $B(x) = (4x^3 + 13x^2 - 7x) + (11x^3 - 8x^2 - 9x) = (4x^3 + 11x^3) + (13x^2 - 8x^2) + (-7x - 9x) = 15x^3 + 5x^2 - 16x$. $B(x)$ est un polynôme de degré 3.
   (c) $C(x) = 17xy - 7x + 9xy - 3x = (17xy + 9xy) + (-7x - 3x) = 26xy - 10x$. $C(x, y)$ est un polynôme de degré 2.
2. On peut multiplier ou diviser des monômes de degré différent. Pour ce faire, on utilise les propriétés des puissances.
   (a) $A(x, y) = 20x^4 \cdot 7y^6 = 20 \cdot 7 \cdot x^4y^6 = 140x^4y^6$
   (b) $B(x, y) = 6x^2y^3 \cdot 8x^4y^6 = 6 \cdot 8 \cdot x^2 \cdot x^4 \cdot y^3 \cdot y^6 = 48x^6y^9$
   (c) $C(x, y) = \dfrac{24x^5y^3}{6x^3y^2} = \dfrac{24}{6} \cdot \dfrac{x^5}{x^3} \cdot \dfrac{y^3}{y^2} = 4x^2yz^3$

6. 3 Développer un polynôme

Développer une expression consiste à transformer un produit de facteurs en une sommes et/ou différences de termes.

Soit a, b, c et $d \in \mathbb{R}$:

1. Distributivité simple : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.
   $A(x) = 4 \cdot (x + 7) = 4 \cdot x + 4 \cdot 7 = 4x + 28$.
2. Distributivité double : $(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$.
   $B(x) = (x + 4) \cdot (3 + y) = x \cdot 3 + x \cdot y + 4 \cdot 3 + 4 \cdot y = 3x + xy + 12 + 4y$.
   $C(x, y) = (5x + 8y)(3x + 7y) = 15x^2 + 35xy + 24xy + 56y^2 = 15x^2 + 59xy + 56y^2$.

6. 4 Identités remarquables

Les lois de la distributivité permettent de montrer **les identités remarquables** suivantes :

1. $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$
2. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba - b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
4. $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

6. 5 Exercices

Exercice 24 : Développer, réduire et ordonner les polynômes suivants :

1) $A(x) = (4-2x)^2$
2) $B(x) = (4+x)(4-x)$
3) $C(x) = (6-x)^2 + (3+2x)^2$
4) $D(x) = (3-5x)(3+5x) - (5-2x)^2$
5) $E(x) = (2+x)(3-2x) + (1-x)^2$
6) $F(x) = (4+x)(4-x) + (3-2x)^2$
7) $G(x) = (x+1)(2+x) + (3-2x)^2$
8) $H(x) = (2x+1)^3$
9) $I(x) = (3x-2)^3$
10) $J(x) = (3-2x)(x-3)^2$
11) $K(x) = (x+1)^2$
12) $L(x) = (x-1)^2 - (x+1)^2$
13) $M(x) = (2a-3b)^2$
14) $N(x) = [(x+3)\cdot 2]\cdot(x+10)$
15) $O(x) = \left[(x\cdot 3)\cdot \frac{1}{x}\right]\cdot\left(\frac{27}{9\cdot x}\right)$ avec $x \neq 0$
16) $P(x) = (2x+7)^2 - (3-4x)^2$
17) $Q(x) = (x+3)(x+5)$
18) $R(x) = \left(x^2+10\right)\left(x^2-12\right)$
19) $S(x) = (3x+4)(2x-3)$
20) $T(x) = (x+4)^3$
21) $U(x) = 2(x^2-3) - x^2(x^2+2)$
22) $V(x) = (-2x-6)(3x-7)$
23) $W(x) = (x+3)^2 - \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$
24) $X(x) = 4x + [3-(7-x)] - [4x-(x-2)]$
25) $Y(x) = \frac{3}{5}(x-5)\cdot x\cdot(4-x)$
26) $Z(x) = (5-x)(3-2x) - (1-2x)^2$
27) $A'(x) = (6x-1)^2 + 8x(9x-3)$
28) $B'(x) = \left(2\sqrt{3}+x\right)^2$
29) $C'(x) = \left(4\sqrt{7}-\sqrt{3x}\right)\left(4\sqrt{7}+\sqrt{3x}\right)$
30) $D'(x) = (\sqrt{5}-2x)(\sqrt{5}+2x)$
31) $E'(x,y) = -4\cdot(2-x+y)$
32) $F'(x,y) = (3x+y)(3x-y)$
33) $G'(x,y) = \left(3x^2y-2\right)(4x-3y)$
34) $H'(x,y) = (3x+y)(4x-2y)$
35) $I'(x,y) = (x+y+3)(x+y-3)$
36) $J'(x,y) = \left(x^2+2xy+y^2\right)\left(x^2-2xy+y^2\right)$
37) $K'(x,y) = \left(x^3+2+xy\right)\left(x^3-2+xy\right)$
38) $L'(x,y) = (6+x)(-3y+2x) + 5(x-2y)$
39) $M'(x,y) = (3y-5x)(2y-x) - (5y+x)(2x-5y)$
40) $N'(x,y) = x(x-y) - (x+y)x$
41) $O'(x,y) = x^2(x-y) - (x+y)x^2$
42) $P'(x,y) = (xy-2)^3$
43) $K'(x) = \left(x^2+2x+4\right)\left(x^2-2x+4\right)$
44) $Q'(x,y,z) = (2x+3y+z)^2$
45) $R'(x,y) = \left(x^2-2x+3\right)(2x+1)$
46) $S'(x,y) = \left(-2x^2+3x-3\right)\left(2x^2+x-1\right)$
47) $T'(x,y) = \left(2x^2+x-3\right)\left(2x^2+x+3\right)$

Exercice 25 : Développer et réduire les expressions suivantes :

1) $A = 3 + \frac{1}{x-2}$ 2) $B = \frac{2x+1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$ 3) $C = \frac{2x}{1-3x} - \frac{2x+1}{3x}$

Exercice 26 : Écrire les expressions suivantes sous la forme d'un quotient et sans racines au numérateur :

1) $A = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ 2) $B = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

7. Factoriser un polynôme

7. 1 Définition

Factoriser une expression consiste à transformer une somme ou une différence de termes en un produit de facteurs. C'est le processus inverse du développement.

Développement	**Factorisation**
$\xrightarrow{}$ $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	$\xleftarrow{}$ $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
Forme factorisée $(a+b)(a-b)$	Forme développée a^2-b^2

7. 2 Les méthodes de factorisation.

1. On factorise par la mise en évidence du(des) terme(s) commun(s) présent(s) dans les différents monômes : $ab+ab^2 = a(b+b^2) = ab(1+b)$
   $5x^4-45x^3 = 5x^3\times x - 9\times 5x^3 = 5x^3(x-9)$; $-6x-7x = -1\times(6x) - 1\times(7x) = -(6x+7x)$.
2. L'expression est une identité remarquable :
   $(2x)^2 - 2\cdot(2x)\cdot 3 + 3^2 = 4x^2-12x+9 = (2x-3)^2$;
   $-x^2+(2x-1)^2 = (2x-1)^2 - x^2 = (2x-1-x)(2x-1+x) = (x-1)(3x-1)$;
3. On factorise en regroupant les termes : $ax+ay+bx+by = ax+ay+bx+by = a(x+y)+b(x+y) = (x+y)(a+b)$.
   $3\sqrt{x}+3\sqrt{y}+4\sqrt{x}+4\sqrt{y} = 3\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+4\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) = (3+4)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) = 7\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.
4. Un polynôme du second degré se factorise à l'aide de ses racines : $ax^2+bx+c = a(x-x^{'})(x-x^{''})$ où $x^{'}$ et $x^{''}$ sont les racines du polynôme (cf. fiche équations du second degré).
5. Les méthodes peuvent se combiner.
   $3x^2-12 = 3x^2-3\cdot 4 = 3(x^2-4) = 3(x^2-2^2) = 3(x-2)(x+2)$. L'expression est factorisée par mise en évidence d'un terme commun et par une identité remarquable.
6. Lorsque la factorisation n'est pas évidente, il faut commencer par développer puis appliquer les méthodes de factorisation :
   $(ax+by)^2+(ay-bx)^2 = (ax)^2+2axby+(by)^2+(ay)^2-2axby+(bx)^2 = (ax)^2+(by)^2+(ay)^2+(bx)^2 = a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2 = a^2\left(x^2+y^2\right)+b^2\left(x^2+y^2\right) = \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$.

7. 3 Exercices

Exercice 27 : Factoriser et simplifier les polynômes suivants :

1) $A(x) = 25x^2+15x$
2) $B(x) = 2(3+2x)-(x-1)(3+2x)$
3) $C(x) = (2x+1)(x-1)+2x+1$
4) $D(x) = (2x-3)^2+2(2x-3)$
5) $E(x) = (5x+8)(2x-1)+4x-2$
6) $F(x) = (x^2+x)(x-2)+(x+1)(x+3)$
7) $G(x) = 9x^2-12x+4$
8) $I(x) = 49-25x^2$
9) $J(x) = 9-30x+25x^2$
10) $K(x) = (2x-3)^2-36$
11) $L(x) = (3x-2)^2-(2x+1)^2$
12) $M(x) = (3x+2)^2+6(3x+2)+9$
13) $N(x) = (2x-1^2-9(x-1)^2)$
14) $O(x) = (x+1)^2+x^2-1$
15) $Q(x,y) = 12x-18y$
16) $R(x,y) = 6x^2y-2x^3$
17) $T(x) = x^2-25$
18) $X(x) = (2x+1)(2x-6)+(x-2)(3-x)$
19) $Y(x) = (2-3x)(x+2)-5(x+2)^2$
20) $A'(x) = 27x^3-36x^2+12x$
21) $B'(x) = (4x+1)(x-1)-(x-4)(1-x)-3x(x-1)$
22) $C'(x) = (2-3x)(x+2)-5(x+2)^2$
23) $D'(x) = (3x+8)(x-1)-1+x$
24) $E'(x) = 100-120x+36x^2$
25) $F'(x) = (5x-1)^2-(3x+2)^2$
26) $G'(x) = 16x^2-24x+9$
27) $J'(x) = x^2+6x+8$
28) $K'(x) = x^2+2x-8$
29) $L'(x) = 9x^2-16$
30) $M'(x) = (3x+1)^2-25$
31) $N'(x) = 36x^2-12x+1-(6x-1)(x+3)$
32) $O'(x) = 25x^2+70x+49-3(5x+7)$

8. Équations du premier degré à une inconnue

8. 1 Définition

Une **équation** à une inconnue, x, est dite du premier degré si elle peut se ramener par des transformations régulières (des calculs) à la forme $ax+b=0$ où a et b sont des nombres réels donnés (paramètres), a étant non nul (cf. ci-dessous). On remarque que le membre de gauche est un polynôme du premier degré.

Paramètre versus variable.
La variable d'une équation (d'un polynôme) est l'objet d'étude de l'équation. Les paramètres sont des données. C'est-à-dire que l'on peut les considérer comme des constantes même s'ils peuvent prendre différentes valeurs. Dans l'équation $ax+b=0$, on impose au paramètre a d'être différent de 0. En d'autres termes, il peut prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}^*$.
Par convention, les variables sont notées x, y, z,..., alors que les paramètres sont exprimés par a, b, c...

8. 2 Principes de résolution d'une équation du premier degré à une inconnue

Résoudre une équation dont l'inconnue est x dans l'ensemble $\mathbb{R}$ consiste à déterminer l'ensemble des valeurs réelles que peut prendre x de façon à ce que l'égalité soit vraie. Si l'équation comporte des paramètres alors on cherchera à exprimer x en fonction des différents paramètres. Avec ou sans paramètres, il faut isoler x d'un coté de l'égalité en appliquant la **règle de la balance** suivante : **on fait ce qu'on veut dans une équation, tant qu'on le fait des deux côtés (sauf diviser ou multiplier par 0).**

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$ax+b=0$
$\Leftrightarrow ax+b-\mathbf{b}=0-\mathbf{b}$
$\Leftrightarrow ax=-b$</td></tr>
<tr><td>Si $a=0$, alors $0x=-b$</td><td>Si $a\neq 0$, alors</td></tr>
<tr><td>si $b\neq 0$, pas de solution,

si $b=0$, infinité de solutions.</td><td>$ax=-b \Leftrightarrow ax\cdot\frac{1}{a}=(-b)\cdot\frac{1}{a}$
$\Leftrightarrow x=\frac{-b}{a}$</td></tr>
</table>

8. 3 Comment résoudre une équation de produits de polynômes nuls ?

Un **produit de polynômes nul** s'écrit : $A(x)\times B(x)=0$. Pour résoudre ce type d'équation, Vous disposez de deux méthodes.

1. Vous développez l'expression et vous appliquez la méthode de résolution des polynômes du second degré. Difficile à appliquer si le produit comporte plus de deux polynômes : $A(x)\times B(x)\times C(x)=0$.
2. On sait qu'**un produit est nul si au moins un des deux facteurs est nul**.

$$A(x)\times B(x)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A(x)=0 \\ B(x)=0 \end{array}\right. \text{ d'où } (2x-4)(x+1)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x-4=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$$
$$\text{Donc, } S=\{-1;2\}.$$

3. Dans certaine équation, il est évidemment nécessaire de factoriser les termes afin de faire apparaître un produit de polynômes.

8. 4 Comment résoudre les équations quotients de polynômes nuls ?

Un **quotient de polynôme nul** s'écrit : $\frac{A(x)}{B(x)}=0$. **Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul** et son dénominateur est non nul.

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A(x)=0 \\ B(x)\neq 0 \end{array}\right. \text{ d'où } \frac{2x+2}{x+1}=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x-4=0 \\ x+1\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x=2 \\ x\neq -1 \end{array}\right.$$
$$\text{Donc, } S=\{2\}.$$

Les valeurs pour lesquelles le dénominateur est nul, $B(x)=0$ sont des valeurs interdites pour le quotient donc elles ne peuvent pas être solutions de l'équation.

8. 5 Exercices

Exercice 28 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $-x = 8$
2) $5x - 2 = 0$
3) $2x + 3 = -3x + 7$
4) $5x + 5 = 15$
5) $5x + 5 = 5x + 10$
6) $5x + 5 = -5x + 10$
7) $5x + 5 = 5$
8) $5x + 5 = 0$
9) $5(x + 1) = 15$
10) $\dfrac{x}{3} = 5$
11) $3x = 6$
12) $3(x + 10) = 20$
13) $4x - 5 = 3x + 7$
14) $2x + \sqrt{3} = 0$

Exercice 29 : Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\dfrac{2-x}{3+x} = -2$
2) $\dfrac{3+x}{x} - \dfrac{4}{x-1} = 1$
3) $\sqrt{2} \cdot x + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$
4) $2(x - 1) = \sqrt{2} \cdot (x + 1) - 1$
5) $x - \sqrt{3} \cdot (x + 1) = 2 - x$
6) $\dfrac{1}{2}(x + 3) - \dfrac{2}{3}(5 - 2x) = 0$
7) $(-x - 4)(-2x + 7) = 0$
8) $4x^2 - 9 = 0$
9) $15x - 25x^2 = 0$
10) $\dfrac{5-8x}{x-2} = 3$
11) $\dfrac{3}{x} = \dfrac{x}{5}$
12) $3x + \dfrac{2x+1}{3} = \dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{2}$
13) $4x + 5 + (x + 2)^2 = 0$
14) $(7x - 1)^2 - 25 = 0$
15) $6x(5x - 3) = 0$
16) $(4 + 3x)(5x - 11) = 0$
17) $2(x+3) = 5(x-1) - 7(x-3)$
18) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{2x+4}{5}$
19) $\dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{x-4}{x+4}$
20) $\dfrac{3x+1}{x+2} = \dfrac{3x-2}{x+1}$
21) $\dfrac{x+3}{2x} + \dfrac{5}{x-1} = \dfrac{1}{2}$
22) $x^2 - 40 = 9$
23) $9x^2 = 9x - 2$
24) $x^2 = 5x + 24$
25) $x(x - 3) = 5$
26) $\dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{1}{2x+1} = \dfrac{1}{4}$
27) $x - \dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{5}{x+1} - 1$

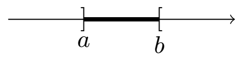
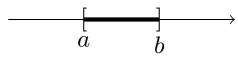
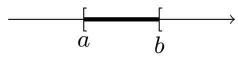
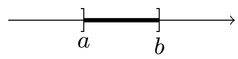
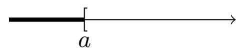
Exercice 30 : Les équations suivantes ont-elles une solution dans $\mathbb{N}$. Si non, dans quel ensemble numérique appartient la solution(cf. chapitre 1) ?

1) $5x + 5 = 0$
2) $5x - 5 = 0$
3) $x^2 = 36$
4) $x^2 = -49$

9. Les inégalités et inéquations du premier degré

9. 1 Inégalités et intervalles

Soient a et b deux réels, dire que a est inférieur ou égal à b s'écrit mathématiquement $a \leq b$. Les **inégalités** permettent de définir des intervalles. Un **intervalle** entre a et b est l'ensemble constitué des réels compris entre a et b. L'intervalle entre a et b peut être :

	Définition	Notation	Représentation
Intervalle ouvert	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$]a, b[$	
Intervalle fermé	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
Intervalle semi-ouvert	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b[$	
Intervalle semi-ouvert	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$]a, b]$	
Intervalle non borné	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	$[a, +\infty[$	
Intervalle non borné	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$]-\infty, a[$	

1. On appelle **amplitude** de l'intervalle $[a; b]$ la valeur $b - a$.
2. a et b sont les extrémités ou les **bornes** de l'intervalle $[a; b]$.
3. $\dfrac{a+b}{2}$ est le **centre** de l'intervalle $[a; b]$.

9. 2 Propriétés des inégalités

Soient, a, b, c et d des réels.

1. Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et $a - c \leq b - c$. Exemples : $3 \leq 4$ alors $3 + 2 \leq 4 + 2$; $-5 \leq -3$ alors $-5 + 2 \leq -3 + 2$;
2. Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $a \times c \leq b \times c$: multiplier les deux membres de l'inégalité par un réel positif ne change pas le sens de l'inégalité. Exemple : $3 \leq 4$ alors $3 \cdot 2 \leq 4 \cdot 2$;
3. Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $a \times c \geq b \times c$: **multiplier les deux membres de l'inégalité par un réel négatif change le sens de l'inégalité**. Exemple : $3 \leq 4$ alors $3 \cdot (-2) \geq 4 \cdot (-2)$;
4. Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$. Exemple : $3 \leq 4$ et $-2 \leq -1$ alors $3 - 2 \leq 4 - 1$;
5. Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $a \cdot c \leq b \cdot d$. Exemple : $3 \leq 4$ et $0 \leq 2$ alors $3 \cdot 0 \leq 4 \cdot 2$;
6. Si $0 < a < b$ alors $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$. **Prendre l'inverse de deux nombres réels strictement positifs change l'ordre**. Exemple : $2 < 4$ alors $\dfrac{1}{4} = 0,25 < \dfrac{1}{2} = 0,5$;
7. Si $a < b < 0$ alors $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0$. Prendre l'inverse de deux nombres réels strictement négatifs change l'ordre. Exemple : $-4 < -2 < 0$ alors $\dfrac{1}{-2} = -0,5 < \dfrac{1}{-4} = -0,25 < 0$.

9. 3 Résolution d'inéquation du premier degré à une inconnue

Une **inéquation** à une inconnue, x, est dite du premier degré si elle peut se ramener par des transformations régulières (calculs) à la forme $ax + b < 0$ ou $ax + b > 0$ avec a et b des nombres réels. On suppose que a est non nul. De plus, ces inéquations peuvent être au sens strict ($>$, $<$) ou au sens large ($\leq$, $\geq$).

1. Le principe de résolution est identique à celui des équations du premier degré à une inconnue. Cependant, **on doit changer le sens de l'inégalité si on multiplie ou divise chaque membre de l'inéquation par un réel négatif.**

2. Il est souvent utile de réaliser un tableau de signes.
3. Résolution de l'inéquation : $ax + b < 0$

$ax + b < 0$ $\Leftrightarrow ax + b - \mathbf{b} < \ 0 - \mathbf{b}$ $\Leftrightarrow ax < -b$	
Si $a > 0$, alors $x < \dfrac{-b}{a}$	Si $a < 0$, alors $x > \dfrac{-b}{a}$

9. 4 Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : 1) $2x - 3 < -5x + 18$ et 2) $\dfrac{4x-3}{x-1} \leq \dfrac{8x+2}{2x-1}$.

1. On simplifie cette inéquation en regroupant les monômes de même degré : $2x - 3 < -5x + 18 \Leftrightarrow 2x + 5x < 18 - 3 \Leftrightarrow 7x < 21 \Leftrightarrow x < 3$. L'ensemble des solutions, S, est donc un intervalle ouvert non borné : $S =]-\infty; 3[$.

2. $\dfrac{4x-3}{x-1} \leq \dfrac{8x+2}{2x-1}$.
Avant de commencer la résolution de l'inéquation, on examine les conditions d'existence des deux quotients. Les numérateurs doivent être différents de 0 (on ne sait pas diviser par 0) d'où $x - 1 \neq 0$ donc $x \neq 1$ et $2x - 1 \neq 0$ donc $x \neq \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-3}{x-1} - \frac{8x+2}{2x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(4x-3)(2x-1)}{(x-1)(2x-1)} - \frac{(8x+2)(x-1)}{(2x-1)(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(8x^2 - 4x - 6x + 3 - 8x^2 + 8x - 2x + 2)}{(2x-1)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5-4x}{(x-1)(2x-1)} \leq 0 \ .$$

Cette inégalité comporte trois facteurs. On construit le tableau de signes ci-dessous et on applique la règle du signe (cf. fiche 1) qui dit qu'un produit de facteurs est positif quand le nombre de facteurs négatifs est pair et, est négatif quand le nombre de facteurs négatifs est impair.

x		$1/2$		1		$5/4$	
$5-4x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\dfrac{5-4x}{(x-1)(2x-1)} \leq 0$	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

Les doubles barres signifient que les valeurs sont interdites (on ne sait toujours pas diviser par 0 !). L'ensemble des solutions est $x \geq \dfrac{5}{4}$ et $\dfrac{1}{2} < x < 1$ que l'on peut écrire sous forme d'intervalles : $S = \left]\dfrac{1}{2}; 1\right[\cup \left[\dfrac{5}{4}; +\infty\right[$.

> L'**intersection** entre deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent aux deux ensembles, et se note $A \cap B$. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ **et** $x \in B$.
> L'**union** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux ensembles, et se note $A \cup B$. Si $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ **ou** $x \in B$.

3. Remarque : afin de simplifier l'inéquation $\dfrac{4x-3}{x-1} \leq \dfrac{8x+2}{2x-1}$, on peut être tenté d'utiliser le produit en croix. Or, cette méthode suppose que l'on distingue plusieurs cas selon les valeurs des dénominateurs. $\dfrac{4x-3}{x-1} \leq \dfrac{8x+2}{2x-1} \Leftrightarrow (4x-3)(2x-1) \leq (8x+2)(x-1)$ uniquement lorsque $x > 1$ et $x > \frac{1}{2}$. En effet, le sens de l'inégalité ne change pas si l'on multiplie chaque membre par un réel strictement positif. Pour plus de simplicité, préférez la première méthode !

9. 5 Exercices

Exercice 31 : Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des réels vérifiant :

1) $-3 \leq x \leq 2$ 2) $x \leq 2$ 3) $3 < x$ 4) $1 \leq x < 2$

Exercice 32 : Déterminer l'intersection et l'union des intervalles suivants :

1) $A = [-2; 1]$ et $B = [0; 5]$
2) $A = [-1; 0]$ et $B = [1; 5]$
3) $A = [-2; 1]$ et $B = [1; 3]$
4) $A =]-\infty; 1]$ et $B = [0; +\infty[$
5) $A =]-\infty; 2]$ et $B = [1; +\infty[$
6) $A = [-2; 1]$ et $B =]0; +\infty[$

Exercice 33 : Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\dfrac{-2}{x+1} < 0$
2) $1 - 5x > 2x - 4$
3) $\dfrac{1}{x} < -1$
4) $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 > 0$
5) $\dfrac{1}{x} < -1$
6) $\dfrac{x+1}{3x-3} < 3$
7) $3x + 1 > 0$
8) $3x - (5x + 7) \geq 2x - 3$
9) $\dfrac{2x-5}{3} < \dfrac{2x-3}{7}$
10) $(4 - x)(3 + x) \leq 0$
11) $x + 1 \geq 9x + 25$
12) $4x + 3 > 2$
13) $(x - 4)(-1 - 5x) \leq 0$
14) $4x^2 - 16x > 0$
15) $\dfrac{2+5x}{3-2x} \geq 0$
16) $\dfrac{6x^2-7}{1+x} \geq 6x$
17) $9x^2 \leq 25(2x - 1)^2$
18) $8x - 13 < 6x - 7$
19) $\dfrac{5x-8}{3} < \dfrac{7x+12}{2}$
20) $\dfrac{x+5}{x-1} \leq \dfrac{x-3}{x+2}$
21) $\dfrac{x+3}{x^2-1} \geq \dfrac{3}{x+1}$
22) $\dfrac{(2x+1)^2-4}{x^2-4x} < 0$
23) $5x(3x - 2)(x + 5) > 0$

Exercice 34 : Construire le tableau de signes de la fonction définie sur l'intervalle I par $f(x) = \dfrac{(-2x+4)(x-1)}{(6+2x)(5-x)}$.
En déduire les intervalles pour lesquels la fonction $f(x)$ est positive sur I.

Exercice 35 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 3 + 3(x - 3)^2 + x^2 - 9$.

1) Développer, réduire et ordonner $f(x)$.
2) Factoriser la fonction f.
3) Déterminer, en utilisant la forme de $f(x)$ qui convient le mieux :
   i. Les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$,
   ii. Les solutions de l'équation $f(x) = 15$,
   iii. Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

10. (In)Équation du second degré à une inconnue

10. 1 Définition

Une équation du second degré à une inconnue, appelée **trinôme du second degré**, est une équation, qui après transformations (calculs), peut s'écrire $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b, c sont des paramètres et x la variable. On suppose que $a \neq 0$. Dans le cas contraire, l'équation est du premier degré.

10. 2 Résolution du trinôme du second degré

La résolution de ce type d'équation suppose, comme dans le cas d'une équation à une inconnue de degré un, d'exprimer en fonction des paramètres les valeurs de x qui vérifient l'égalité. On résout ce type d'équation en calculant le **discriminant** :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

On pose $\Delta = b^2 - 4a \times c$ le discriminant de $ax^2 + bx + c$.
Les solutions, dénommées **racines**, dépendent des valeurs du discriminant. Trois cas sont à considérer.

1. Si $\Delta > 0$ alors il existe deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$;
2. Si $\Delta = 0$ alors il existe une racine double (deux fois la même) : $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$;
3. Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution réelle.

10. 3 Propriétés du trinôme du second degré

1. La somme des racines : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
2. Le produit des racines : $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$
3. Le **signe du trinôme** est celui de a sauf entre les deux racines où il est du signe contraire de a. Cette propriété permet de résoudre des inéquations du second degré : $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$. Cette inégalité peut évidemment s'écrire au sens large ($\leq$, $\geq$).
4. On **factorise** un trinôme du second degré avec ses racines : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

10. 4 Exemple

1. **Quelles sont les racines du polynôme $A(x) = x^2 + 5x - 6$?**
   Chercher les racines revient à chercher les valeurs de x qui annulent le polynôme si elles existent, soit l'équation suivante : $x^2 + 5x - 6 = 0$.
   (a) On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49$.
   (b) $\Delta = 49 > 0$ donc il existe deux racines réelles distinctes. Et, $\sqrt{49} = 7$.
   (c) On calcule les deux racines : $x_1 = \dfrac{-5 + 7}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-5 - 7}{2} = -6$.
2. **En déduire le signe du polynôme en fonction des valeurs de x.**
   Le polynôme est du signe de $a = 1$ (positif) partout sauf entre les racines c'est-à-dire sur l'intervalle $]-6, 1[$ où il est négatif.

	$-\infty$		-6		1		$+\infty$
$x^2 + 5x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. **Factoriser le polynôme et retrouver les résultats précédents.**
   Les deux racines sont : $x_1 = 1$ et $x_2 = -6$ donc $A(x) = x^2 + 5x - 6 = (x - (-6))(x - 1) = (x + 6)(x - 1)$.
   On peut, à partir de cette expression factorisée, construire un tableau de signes et retrouver les résultats précédents :

	$-\infty$		-6		1		$+\infty$
$(x + 6)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x - 1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2 + 5x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

10. 5 Exercices

Exercice 36 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $(x+1)(3x-2)=0$
2) $2(1-x)(2x-5)=0$
3) $\frac{2}{x+1}=3$
4) $\frac{2x+1}{3x-2}$
5) $\frac{x^2-2x}{2+x}=0$
6) $(x-5)^2$
7) $2x^2+x-1=0$
8) $5x^2+3x+7=0$
9) $\dfrac{4}{25}x^2-\dfrac{4}{15}x+\dfrac{1}{9}=0$
10) $(2x-1)^2=(-3x+1)^2$
11) $(2x-1)^3=(-3x+1)^3$
12) $2x^3+5x^2-4x-3=0$

Exercice 37 : Déterminer le signe des expressions suivantes :

1) $f(x)=(x-3)^2$
2) $g(x)=(x-1)^3$
3) $h(x)=-2x^2+x-1$
4) $i(x)=-x^2-x+1$

Exercice 38 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes. Écrire la solution sous la forme d'un intervalle.

1) $2x^2+x-1\geq 0$
2) $5x^2+3x+7<0$
3) $\dfrac{4}{25}x^2-\dfrac{4}{15}x+\dfrac{1}{9}>0$
4) $5x+1<\dfrac{2}{x-1}$
5) $\dfrac{2x-1}{-x+3}-\dfrac{1}{x}<0$
6) $\dfrac{2x+1}{x-1}>\dfrac{x+1}{x-3}$

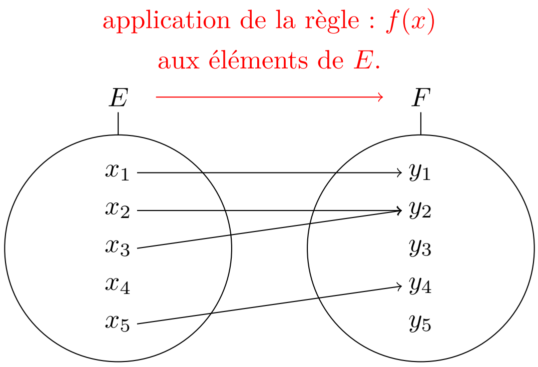
Exercice 39 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^4-5x^2+4=0$
2) $x^4+3x^2-4=0$
3) $x^4+3x^2+4=0$

11. Fonction affine

11. 1 Qu'est-ce qu'une fonction ?

Une **fonction** associe à chaque élément, x, d'un ensemble de départ (ensemble E ci-dessous) au plus[3] un élément, $y = f(x)$, d'un ensemble d'arrivée (ensemble F ci-dessous).



Dans cette représentation graphique de la fonction $f(x)$, on s'aperçoit que tous les éléments de l'ensemble de départ ne sont pas associés à un élément de l'ensemble d'arrivée. C'est le cas de l'élément x_4. C'est pourquoi on définit à l'intérieur de l'ensemble de départ un sous-ensemble que l'on nomme **domaine de définition** qui est constitué de l'ensemble des valeurs pour lesquelles il sera possible d'évaluer $f(x)$. Les éléments du domaine de définition s'appellent les **antécédents** par la fonction f alors que les valeurs des antécédentes par f s'appellent les **images**.

Si l'on souhaite étudier la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}$. L'ensemble de départ est donc $\mathbb{R}$. Or, on ne sait pas diviser par 0. Donc $f(0)$ n'existe pas ou l'antécédent $x = 0$ n'a pas d'image par f. Il faut donc éliminer cette valeur de l'ensemble de départ pour déterminer l'ensemble de définition. Ainsi, $D_f = \mathbb{R}^*$.

L'ensemble d'arrivée d'une fonction ne se confond pas nécessairement avec $\mathbb{R}$. Par exemple, la fonction qui associe à chaque réel son carré a pour ensemble d'arrivée $\mathbb{R}_+$ car le carré d'un réel est toujours positif.

Ainsi, pour définir une fonction, on spécifie son domaine de définition, la fonction qui associe un antécédent à une image et l'ensemble d'arrivée :

$$\begin{array}{cccc} \text{f :} & D_f & \mapsto & \text{F} \\ & x & \mapsto & y = f(x) \\ & \text{antécédent} & & \text{image par } f \end{array}$$

11. 2 Définition de la fonction affine

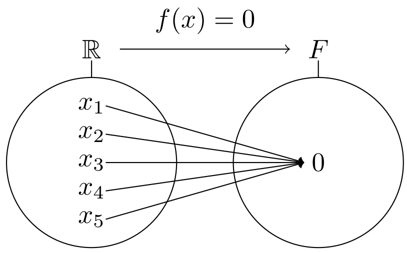
La **fonction affine** associe à tout réel x, le réel $f(x) = a \times x + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ ($D_f = \mathbb{R}$). Il est, en effet, toujours possible de calculer $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

La fonction affine prend différentes formes selon que les paramètres a ou b sont ou non égaux à 0.

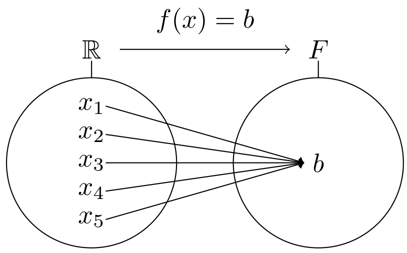
	$b = 0$	$b \neq 0$
$a = 0$	$f(x) = 0$	$f(x) = b$
$a \neq 0$	$f(x) = ax$	$f(x) = ax + b$

3. 0 ou 1.

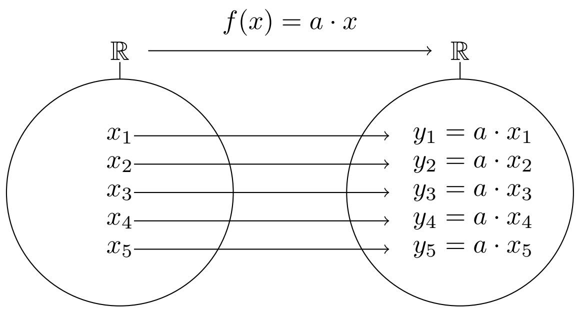
1. Si $a = 0$ et $b = 0$ alors $f(x) = 0$. Il s'agit d'une fonction constante. Les antécédents ont tous la même image égale à 0.



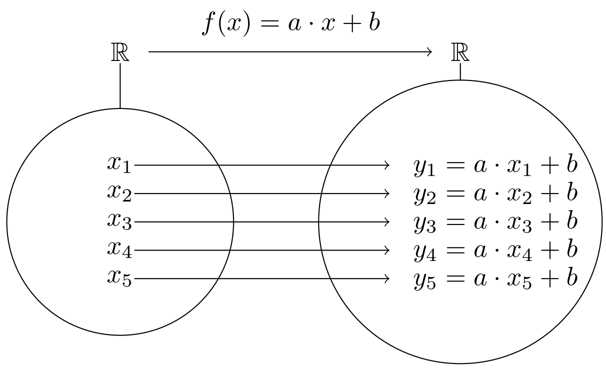
2. Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $f(x) = b$. Il s'agit d'une fonction constante. Les antécédents ont tous la même image égale à b.



3. Si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors $f(x) = ax$: **fonction linéaire** définie sur $\mathbb{R}$.

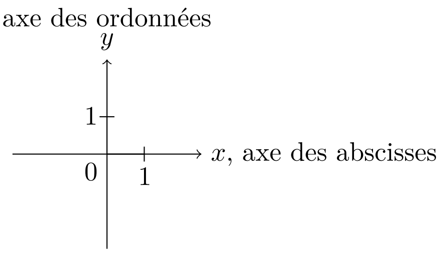


4. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors $f(x) = ax + b$. On retrouve la **fonction affine**.



11. 3 Représentation graphique dans le repère cartésien

1. Dans un repère cartésien, l'axe des **abscisses** permet de repérer les antécédents alors que l'axe des **ordonnées** indique les images par f.

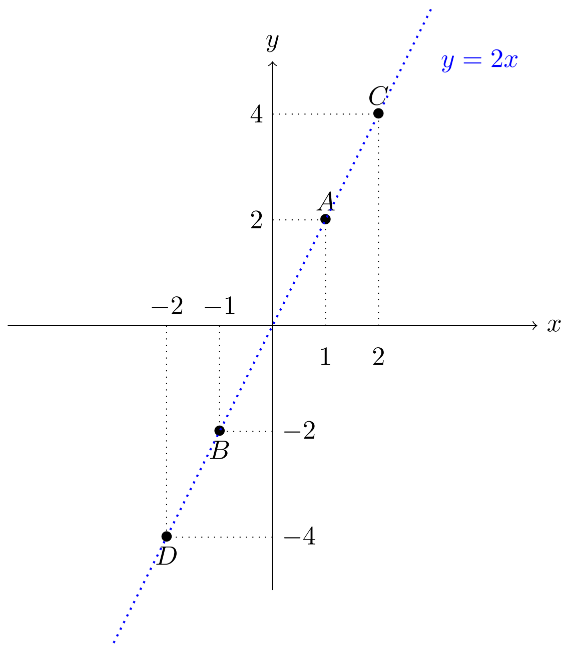


2. **Comment calculer une image par f ?**
Soient les fonctions suivantes : $f(x) = 2x$; $g(x) = -2x + 5$. On calcule l'image d'un antécédent en substituant la valeur de x dans $f(x)$. Ainsi $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Le tableau, ci-dessous, indique la valeur d'autres antécédents pour les fonctions f et g :

x	$f(x) = 2x$	$f(x) = -2x + 5$
...		
-2	$f(-2) = 2 \cdot -2 = -4$	$f(-2) = -2 \cdot (-2) + 5 = 9$
-1	$f(-1) = 2 \cdot -1 = -2$	$f(-1) = -2 \cdot (-1) + 5 = 7$
0	$f(0) = 0$	$f(0) = -2 \cdot 0 + 5 = 5$
1	$f(1) = 2 \cdot 1 = 2$	$f(1) = -2 \cdot (1) + 5 = 3$
2	$f(2) = 2 \cdot 2 = 4$	$f(2) = -2 \cdot (2) + 5 = 1$
...		

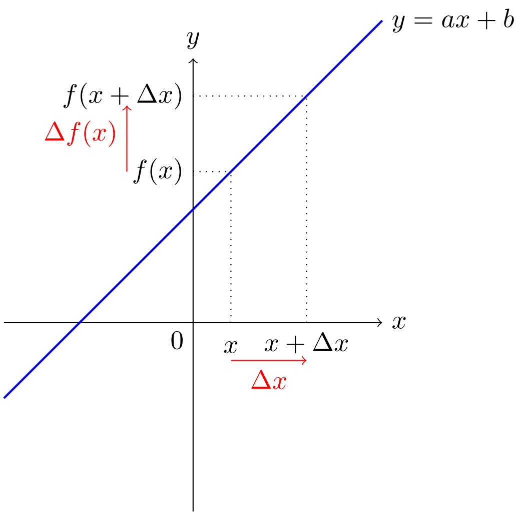
L'image par $f(x) = 2x$ de $x = 1$ est $f(1) = 2$. Inversement, on peut dire que l'antécédent de $y = 2$ par f est $x = 1$.

3. **Comment représenter un couple** $(x, y) = (x, f(x))$ **dans le repère ?**
Les points $A(1; 2)$, $B(-1; -2)$, $C(2; 4)$, $D(-2; -4)$ appartiennent à la représentation graphique de $f(x)$. On s'aperçoit qu'ils sont tous alignés. Ce résultat se généralise. La représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = a \cdot x + b$ est **une droite**. Par conséquent, chaque antécédent n'a qu'une image et chaque image n'a qu'un antécédent.



11. 4 Équation de droite

1. Une **droite** est la représentation graphique d'une équation du premier degré : $y = ax + b$ où x et y sont des variables et a et b des paramètres.
2. L'**ordonnée à l'origine** est la valeur de $f(x)$ quand $x = 0$: $f(0) = a \cdot 0 + b = b$. Par conséquent, la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0, b)$.
3. L'**abscisse à l'origine** est la valeur de x tel que $f(x) = 0$. La résolution de cette équation donne $ax + b = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{-b}{a}, 0\right)$. Par conséquent, la droite coupe l'axe des abscisses au point $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$.
4. La **pente** de la droite, ou **coefficient directeur**, est donné par a.
   Le coefficient directeur, a, est égal au **taux de variation moyen** ou **taux d'accroissement moyen** pour les fonctions affines.

   Lecture du graphique : l'ordonnée de l'abscisse x est $f(x)$ et l'ordonnée de l'abscisse $x + \Delta x$ est $f(x + \Delta x)$.

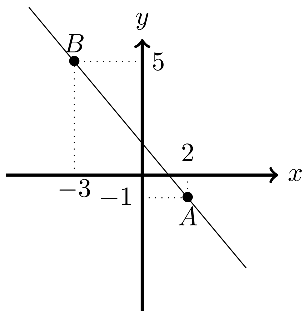
   Le taux de variation moyen (TVM) évalue la variation des ordonnées suite à une variation des abscisses. Supposons que l'on augmente les abscisses de $\Delta x > 0$ à partir d'une abscisse x. La nouvelle abscisse se trouve en $x + \Delta x$. La variation des ordonnées est donnée par la différence entre les deux ordonnées : $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$. Le TVM est le rapport entre la variation des ordonnées et la variation des abscisses : $TVM = \frac{\Delta(f(x))}{(x + \Delta x) - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a(x + \Delta x) + b - (ax + b)}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$: les ordonnées varient de a unité(s) quand x varie de 1 unité.

   Par conséquent, la droite ou la fonction affine sera...
   (a) ...strictement croissante si $a > 0$;
   (b) ...strictement décroissante si $a < 0$;
   (c) ...constante si $a = 0$.
5. Deux droites sont **parallèles** si elles ont le même coefficient directeur. La droite D d'équation $y = ax + b$ est parallèle à la droite D' d'équation $y = ax + b^{'}$ si $b \neq b^{'}$. Si $b = b^{'}$ alors les deux droites sont confondues.
6. Pour tracer une droite il suffit de disposer de deux points ou d'un point du coefficient directeur.
7. Comment déterminer l'**équation de la droite passant par deux points** ?
   On sait que les points A et B de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) appartenant à la même droite d'équation $y = ax + b$ satisfont cette équation. C'est-à-dire : $y_A = ax_A + b$ et $y_B = ax_B + b$. On cherche, alors, à déterminer les valeurs de a et b. Ainsi, il faut résoudre le système d'équations

suivant : $\left\{\begin{array}{l} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \\ b = y_A - \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \cdot x_A \end{array}\right. \Leftrightarrow y = \left(\dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}\right)(x - x_A) + y_A.$

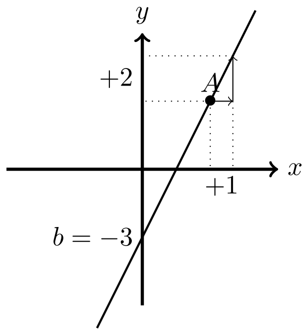
Remarque : La résolution d'un tel système d'équations est expliquée dans la fiche suivante.

Exemple : Supposons que les points $A(2;-1)$ et $B(-3;5)$ appartiennent à la même droite. Quelle est l'équation de cette droite ? $\left\{\begin{array}{l} -1 = 2a + b \\ 5 = -3a + b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -1 - 2a = b \\ 5 = -3a + -1 - 2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{-6}{5} \\ b = \dfrac{7}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow y = \dfrac{-6}{5} \cdot x + \dfrac{7}{5}$

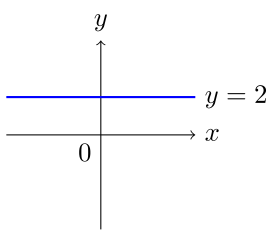


8. Comment déterminer l'**équation d'une droite à partir du coefficient directeur, a, et les coordonnées d'un point** $A(x_A, y_A)$?
   Dans ce cas, la seule inconnue est l'ordonnée à l'origine que l'on déduit facilement à l'aide des coordonnées du point A : $b = y_A - ax_A$.

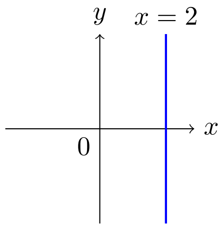
   Soient $a = 2$ et $A(3;3)$ alors $b = 3 - 2 \cdot 3 = -3$ donc $y = 2x - 3$.



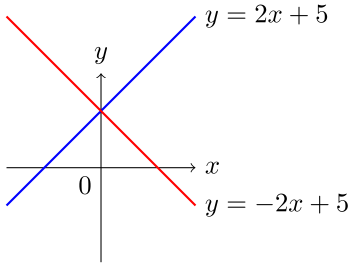
9. Si $a = 0$ alors la **droite est parallèle à l'axe des abscisses**. Elle admet une équation de la forme $y = b$ avec b un nombre réel. Il s'agit d'une fonction constante. L'axe des abscisses a pour équation $y = 0$.



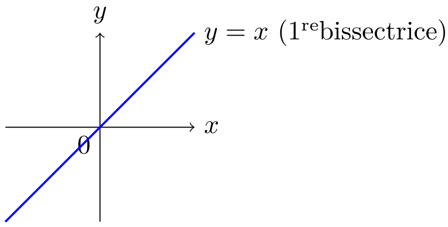
10. Lorsque la **droite est parallèle à l'axe des ordonnées**, elle admet une équation de la forme $x = c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Cette droite n'est pas la représentation graphique d'une fonction. En effet, pour un antécédent il y a une infinité d'images. Or, un antécédent doit avoir au plus une image pour définir une fonction (cf. définition). L'axe des ordonnées a pour équation $x = 0$.



11. Si $a \neq 0$ alors la droite n'est pas parallèle à un axe.



12. Si $b = 0$ alors la droite passe par l'origine.



11. 5 Exercices

Exercice 40 Donner trois points de la droite $\mathcal{D}$ pour chacun des cas et représenter graphiquement chaque droite :

1) $\mathcal{D} \equiv y = -3x + 5$
2) $\mathcal{D} \equiv x = -2$
3) $\mathcal{D} \equiv y = -\frac{1}{2}x - 1$
4) $\mathcal{D} \equiv y = -2$
5) $\mathcal{D} \equiv y = x$
6) $\mathcal{D} \equiv x = 0$

Exercice 41 Déterminer et représenter graphiquement l'équation de la droite AB dans chacun des cas suivants :

1) $A(-3; -2)$ et $B(2; 5)$
2) $A(-3; -2)$ et $B(-3; 5)$
3) La droite passe par le point $A(2; 0)$ et a pour coefficient directeur $a = 1$.

Exercice 42 Donner les coordonnées des éventuels points d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec les axes du repère :

1) $\mathcal{D} \equiv y = 4x - 3$
2) $\mathcal{D} \equiv x = 3$
3) $\mathcal{D} \equiv y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$

Exercice 43 On considère le point $A(-2; 3)$.

1) Donner une équation de la droite verticale passant par A.
2) Donner une équation de la droite horizontale passant par A.
3) Donner une équation d'une droite ne passant pas par A.
4) Donner une équation d'une droite oblique passant par A.

Exercice 44 Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$.

1) Pour chaque point, indiquez s'il appartient ou non à la droite $\mathcal{D}$: $A\left(3; -\frac{3}{2}\right), B\left(0; \frac{1}{2}\right), C\left(1; \frac{1}{6}\right), D\left(\frac{3}{4}; 0\right)$.
2) Déterminer les réels x et y de sorte que les points $E(x, 2)$ et $F(2, y)$ appartiennent à $\mathcal{D}$.

Exercice 45 Déterminer la fonction linéaire f sachant que $f(5) = 4$.

Exercice 46 Soient $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = -2x + 10$ et $h(x) = 5$.

1) Pour chacune de ces fonctions, calculer l'image du nombre 10.
2) Pour chacune de ces fonctions, déterminer les antécédents du nombre (-4).

Exercice 47 Relation entre prix TTC et prix HT.

1) Le prix de vente hors taxes, P_{HT}, d'un bien est de 200 euros. Sachant que la TVA est de 20%, calculer le montant de la taxe et le prix toutes taxes comprises, P_{TTC}.
2) Calculer le prix de vente HT d'un bien qui coûte 600 euros.
3) Exprimer une relation entre le prix TTC, noté $f(x)$, d'un bien en fonction du prix HT, noté x, et de la taxe notée t.
4) Représenter graphiquement cette relation. On suppose que $t = 20\%$. Que constatez-vous ?
5) Déterminer le taux de variation moyen de la fonction $f(x)$ définie à la question 4.

12. Mise en équations d'un problème.

12. 1 Les quatre étapes

[4] La mise en équations d'un problème s'appelle une **modélisation** du problème. Elle consiste à appliquer les quatre étapes suivantes :

1. **Choix de l'inconnue**. La lecture attentive de l'énoncé du problème et de la question posée permet de choisir l'inconnue. On note souvent cette inconnue x, mais on peut utiliser n'importe quelle autre lettre. Par convention, les variables sont notées x, y, z...
2. **Mise en équation du problème**. On exprime les données du problème en fonction de l'inconnue choisie. On construit ainsi une équation ou des équations.
3. **Résolution de(s) l'équation(s)**. On résout la ou les équations.
4. **Vérification des résultats**. On reporte les résultats trouvés dans l'énoncé et on vérifie leur validité. Si la vérification est confirmée, on rédige clairement la réponse au problème.

12. 2 Exemple

Un immeuble de 4 étages mesure 17,6 mètres de haut. La hauteur du toit est 1,5 fois celle d'un étage. Quelle est la hauteur d'un étage ?

1. **Choix de l'inconnue**.
   L'immeuble est composé de 4 niveaux et d'un toit. On peut exprimer la hauteur du toit en fonction de celle d'un étage. On choisira donc comme inconnue la hauteur d'un étage que l'on notera h. Soit h la hauteur d'un étage.
2. **Mise en équation du problème**.
   Si la hauteur d'un étage s'écrit h alors la hauteur des 4 étages s'écrit $4h$ et la hauteur du toit s'écrit $1,5h$. Donc, la hauteur totale de l'immeuble s'écrit : $4h + 1,5h = 17,6$.
3. **Résolution de(s) l'équation(s)**.
   On résout cette équation du premier degré à une inconnue en appliquant les règles de la balance : $4h + 1,5h = 17,6 \Leftrightarrow 5,5h = 17,6 \Leftrightarrow h = \dfrac{17,6}{5,5} = 3,2$.
4. **Vérification des résultats**.
   L'immeuble mesure-t-il 17,6 mètres de haut quand $h = 3,2$?
   4 étages + le toit = hauteur de l'immeuble donc $4 \times 3,2 + 1,5 \times 3,2 = 12,8 + 4,8 = 17,6$.
   L'immeuble mesure bien 17,6 mètres de haut. La réponse au problème est donc $h = 3,2$ c'est-à-dire qu'un étage mesure $3,2$ mètres.

4. cette fiche est empruntée à http ://passeport.univ-lille1.fr/site/Math-va/AgrimediaCD/Equations/Dossier%202%20-%20Mise%20en%20%C3%A9quation%20et%20R%C3%A9solution%20d'un%20probl%C3%A8me.pdf

12. 3 Exercices

Exercice 48 Pour la rentrée scolaire, Blandine achète 6 classeurs et un livre. Elle paie au total 27,60 euros. Sachant que le prix du livre est 12 euros, quel est le prix d'un classeur ?

Exercice 49 Une famille arrive au restaurant. A la fin du repas, elle donne un billet de 50 euros pour payer l'addition. Le serveur rend la monnaie soit 8,80 euros. Sachant que le prix du repas revient à 10,30 euros par personne, combien de personnes composent cette famille ?

Exercice 50 Deux vidéo clubs proposent des formules différentes. Vidéo Futur propose chaque location à 1,50 euro, à condition d'avoir payé 14 euros d'abonnement. Son concurrent, Vidéo Klub ne fait pas payer d'abonnement mais la location coûte 3,50 euros.

1) Marie compte louer 5 cassettes dans l'année. Où devrait-elle aller ?
2) Jacques compte louer 21 cassettes dans l'année. Où doit-il aller ?
3) Pour quel nombre de cassettes les deux vidéo clubs sont ils aussi intéressant l'un que l'autre.

Exercice 51 Deux sociétés proposent les formules d'abonnement suivantes :
M : Société Mobile France 20 euros pour un forfait de 2h et 0,50 euro par minute de dépassement du forfait.
P : Société Portable Europe : 26 euros pour un forfait de 2h et 0,30 euro par minute de dépassement du forfait.

1) Quel est le prix a payer pour chacune des deux formules pour une durée d'utilisation de 1h30 ?
2) Calculer le prix a payer pour chacune des deux formules pour une durée d'utilisation de 2h40 ?
3) Soit x la durée (en minutes) de dépassement au-delà du forfait de 2h. Exprimer en fonction de x.
   i. Le prix P_1 à payer avec la formule M proposée par la société Mobile France.
   ii. Le prix P_2 à payer avec la formule P proposée par la société Portable Europe.
4) Résoudre l'équation $0,5x + 20 = 0,3x + 26$. Que signifie ce résultat dans le problème posé ci-dessus ?

Exercice 52 Une maison d'édition veut publier un manuel de mathématiques. Les frais de création s'élèvent à 30000 euros et l'impression de chaque livre coûte ensuite $3,5$ euros.

1) Déterminer le coût de production, $C(n)$ de n livres.
2) Chaque livre est vendu $6,5$ euros. Calculer la recette, $R(n)$, pour n livres vendus.
3) Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions $C(n)$ et $R(n)$.
4) Déterminer graphiquement et analytiquement le nombre de livres que doit vendre la maison d'édition afin de réaliser un bénéfice.
5) Après une étude de marché plus approfondie, la maison d'édition souhaite commencer à réaliser des bénéfices à partir de 4000 livres vendus. A quel prix doit-elle alors vendre chaque livre ?

Exercice 53 Sur une année, on propose au public deux types de tarifs pour l'emprunt de livres dans une bibliothèque : tarif plein : $0,90$ euro par livre emprunté et tarif abonné : cotisation annuelle de 10 euros, puis $0,50$ euro par livre emprunté.

1) Déterminer la fonction f qui modélise le prix à payer en euros, en fonction du nombre de livres emprunté avec l'option tarif plein. Quelle est la nature de cette fonction ?
2) Déterminer la fonction g qui modélise le prix à payer en euros en fonction du nombre de livres emprunté avec l'option abonné. Quelle est la nature de cette fonction ?
3) Quelle est l'offre de prêt la plus avantageuse ?

13. Système d'équations linéaires à deux inconnues du premier degré

13. 1 Définition et résolution

Le système linéaire $\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right.$ est composé de deux équations du premier degré, deux inconnues et six paramètres.

La résolution de ce système d'équations conduit, si possible, à déterminer un couple (x, y) satisfaisant simultanément les deux équations. Deux méthodes de résolution sont possibles :

1. **Méthode par substitution.**
   Cette méthode consiste à exprimer une des deux inconnues en fonction de l'autre dans une des deux équations, et à la "substituer" dans l'autre équation.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ x - 3y + 7 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ x - 3(2x - 1) + 7 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ -5x + 10 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ x = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 3 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

2. **Méthode par élimination (ou combinaison linéaire).**
   Cette méthode consiste à éliminer une des deux inconnues par addition ou soustraction des deux équations. Il est possible de multiplier les deux membres d'une équation par un nombre réel non nul.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ x - 3y + 7 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x - y - 1 = 0 \\ -2(x - 3y + 7) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ -2x + 6y - 14 = 0 \end{array} \right.$$

   En additionnant, membres à membres, les deux équations, on obtient :
   $2x - y - 1 - (2x + 6y - 14) = 0 + 0 \Leftrightarrow 0x + 5y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = 3$ et donc $x = 2$.

13. 2 Interprétation graphique de la solution

Chaque équation du premier degré d'un système est l'équation d'une droite :
$a_1x + b_1y = c_1 \Leftrightarrow y = \dfrac{-b_1}{a_1} \cdot x + \dfrac{c_1}{a_1}$. Par conséquent, la résolution d'un système de deux équations linéaires conduit à déterminer les coordonnées du point d'intersection s'il existe.

1. L'intersection de deux droites est unique donc le couple solution, s'il existe, est unique ;
2. Si les deux droites sont parallèles (et distinctes) alors elles ne se couperont jamais donc le système n'aura pas de solution. On rappelle que deux droites sont parallèles si elles ont le coefficient directeur ;
3. Si les deux droites sont confondues alors il existe une infinité de solutions.

13. 3 Exercices

Exercice 54 Résoudre et représenter graphiquement les systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases} -2x+3=y \\ x-3=y \end{cases}$;

2) $\begin{cases} -2x+1=y \\ -2x-1=y \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+2y=-2 \\ 2x-y=-3 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x-5y=-1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ -3x+y=-1 \end{cases}$;

6) $\begin{cases} -2x+3y=1 \\ -x+3y=-1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ -5x+2y=8 \end{cases}$;

8) $\begin{cases} 56x-35y=91 \\ 16x-10y=26 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} 144x-21y=251 \\ 336x+49y=103 \end{cases}$

Exercice 55 Mise en équations d'un problème et résolution d'un système d'équations.

1) Pour l'achat d'un tee-shirt et de trois casquettes, André a payé 250 euros . Pour l'achat de deux tee-shirts et d'une casquette, Maeva a payé 750 euros.
   i. Écrire le problème sous la forme d'un système de deux équations à deux inconnues.
   ii. Déterminer le prix d'un tee-shirt et d'une casquette.
2) Lors d'un spectacle, la famille A, composée de 4 adultes et de 3 enfants, a payé 206 euros. Pour le même spectacle, la famille B, composée de 2 adultes et de 2 enfants, a payé 114 euros. Combien paiera la famille C, sachant qu'elle est composée de 3 adultes et de 2 enfants.
3) Un agriculteur produit des laitues et des choux. Chaque hectare de choux nécessite 600 heures de travail, et chaque hectare de laitues nécessite 400 heures de travail. Si l'on dispose de 45 000 heures et que tout le terrain et toute la main-d'œuvre sont utilisés, exprimer et représenter graphiquement les quantités de laitues produites en fonction des quantités de choux.

14. Les ensembles numériques

14. 1 Les entiers naturels

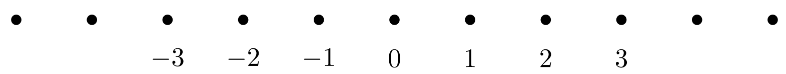
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Si j'additionne ou multiplie deux entiers naturels quelconques, le résultat sera encore un entier naturel (On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est stable pour l'addition et la multiplication). Ce n'est pas le cas pour la soustraction, $3 - 4 = -1$. Or, $-1 \notin \mathbb{N}$, et la division, $\frac{3}{4} = 0,75 \notin \mathbb{N}$.

Lecture et interprétation des symboles de l'appartenance et de la non appartenance : $\in$ et $\notin$.
$a \in \mathbb{N}$ se lit a appartient à $\mathbb{N}$ et signifie que a est un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$.
$a \notin \mathbb{N}$ se lit a n'appartient pas à $\mathbb{N}$ et signifie que a n'est pas un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$.
Grammaire mathématique : Les symboles $\in$ et $\notin$ s'utilisent entre un élément est un ensemble.

14. 2 Les entiers relatifs

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\} = \{\ldots, -3, -2, -1\} \cup \mathbb{N}$.



Si j'additionne ou soustrait ou multiplie deux entiers relatifs quelconques, le résultat sera encore un entier relatif (L'ensemble $\mathbb{Z}$ est stable pour l'addition, la soustraction et la multiplication).

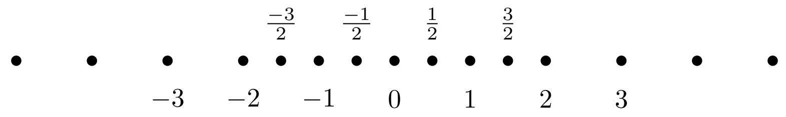
Lecture et interprétation des symboles de l'union et de l'intersection : $\cup$ et $\cap$.
$a \in (A \cup B)$ se lit a appartient à l'ensemble $A \cup B$. C'est-à-dire que $a \in A$ **ou** $a \in B$ **ou** $a \in (A \cap B)$ ainsi a est un élément de l'ensemble A ou de l'ensemble B ou des deux ensembles réunis.
$a \in (A \cap B)$ se lit a appartient à l'ensemble $A \cap B$. C'est-à-dire que $a \in A$ **et** $a \in B$. Ainsi, a est élément de A et B.

Tout entier naturel est un entier relatif : $\mathbb{Z}$ contient donc $\mathbb{N}$. On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ et on le note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Par contre, tous les entiers relatifs ne sont pas des entiers naturels : $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$.

Lecture et interprétation des symboles de l'inclusion et de la non inclusion : $\subset$ et $\not\subset$.
$A \subset B$ se lit l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B. C'est-à-dire que l'ensemble A est un sous-ensemble de l'ensemble B. En d'autres termes, tous les éléments de l'ensemble A sont des éléments de l'ensemble B. La réciproque est fausse.
$A \not\subset B$ se lit l'ensemble A n'est pas inclus dans l'ensemble B.
Grammaire mathématique : Les symboles $\subset$ ou $\not\subset$ s'utilisent entre deux ensembles.

14. 3 Les nombres rationnels

Les nombres rationnels, notés $\mathbb{Q}$, sont les quotients d'un entier relatif par un entier relatif non nul : $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$. C'est-à-dire les nombres que l'on peut écrire sous la forme d'une fraction.

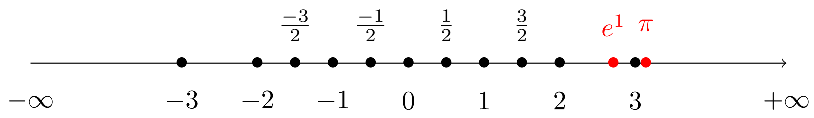


Si j'additionne ou soustrait ou multiplie ou divise (sauf par 0) deux nombres rationnels quelconques, le résultat sera encore un nombre rationnel (L'ensemble $\mathbb{Q}$ est stable pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division (sauf par 0)).

Tout entier relatif est un nombre rationnel. En effet, $7 = \dfrac{7}{1}$; $-3 = \dfrac{-3}{1}$; $0 = \dfrac{0}{a}$ avec $a \in \mathbb{Z}^*$. Par conséquent $\mathbb{Q}$ contient donc $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$. On en déduit que : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

14. 4 Les nombres réels

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.



Entre deux nombres réels, il est existe une infinité de nombres réels. Ainsi, il est possible de relier tous les nombres réels et de former la droite des réels.

Lecture et interprétation du symbole : ∞.
∞ signifie l'infini.
L'infini n'est pas un nombre. C'est un concept mathématique qui illustre le fait que l'on peut toujours trouver un réel supérieur (ou inférieur) à un autre réel. Soit, $x = 10^{10}$, un nombre très grand. Alors, il est possible de trouver un nombre réel qui soit encore plus grand : $y = 10^{10} + 1$ et ainsi de suite. Ce processus n'a pas de fin. Ce calcul peut aussi être répété avec des nombres négatifs. C'est pourquoi on parle de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Tout nombre rationnel est un nombre réel donc $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mais $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$. En effet, il existe des nombres réels non rationnels comme $\sqrt{2}$. Les réels non rationnels sont appelés irrationnels. Il est impossible d'écrire $\sqrt{2}$ sous la forme d'un quotient d'entiers relatifs.

Le fait que tout nombre rationnel est un nombre réel, nous permet d'écrire : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est stable pour l'addition, la soustraction, la multiplication, la division sauf par 0.

14. 5 Conventions d'écriture sur les ensembles

Pour les réels (et de manière similaire pour les autres ensembles), on note les différents sous-ensembles de $\mathbb{R}$:

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. L'ensemble des réels non nuls ;

$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$. L'ensemble des réels positifs ;

$\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$. L'ensemble des réels strictement positifs ;

$\mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$. L'ensemble des réels négatifs ;

$\mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[$. L'ensemble des réels strictement négatifs.