Marchés, Equilibre et Optimum

L3 MIASHS

Elena L. del Mercato [1]

10 septembre 2020

1. Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, Ecole d'Economie de Paris (PSE) et Centre d'Economie de la Sorbonne (CES), UMR CNRS 8174, Maison des Sciences Economiques, 106 Boulevard de l'Hôpital, 75647 PARIS CEDEX 13. Téléphone : 01 44 07 83 03. Fax : 01 44 07 83 0. E-mail : Elena.delMercato@univ-paris.fr

Table des matières

Chapitre 1

Présentation

1.1 Introduction

A la base de ce cours, il y a le paradigme classique des modèles d'équilibre général et les concepts d'équilibre concurrentiel et de *bien-être social* associés à ces modèles. Dans une économie d'échange, les équilibres consistent en des systèmes de prix et des choix de consommation qui sont déterminés par le comportement concurrentiel des consommateurs et par la condition d'égalité entre offre et demande.

Comme cela est bien connu, sous des hypothèses appropriées sur les préférences individuelles des consommateurs maximisant leurs préférences sous la contrainte budgétaire, les comportements concurrentiels peuvent générer non seulement des équilibres mais également des configurations qui sont "acceptables" en termes de *bien-être social*, appelées configurations optimales au sens de Pareto. Le Premier Théorème du bien-être garantit l'optimalité de Pareto des allocations d'équilibre. Le Second Théorème du bien-être fournit le résultat inverse, toute configuration Pareto optimale est un équilibre compétitif pour un système de prix spécifique et une redistribution des ressources initiales.

Les résultats mentionnés reposent fortement sur des hypothèses restrictives faites sur la possibilité complète de transactions, l'absence de monnaie, l'information complète, l'absence de *biens publics*, l'absence des influences entre les comportements des agents (*externalités*). Pour cette raison, le modèle classique d'équilibre général a été modifié, en considérant dans la structure originale différentes sortes d'*imperfections* qui se révèlent plus pertinentes pour décrire le monde réel.

Externalités

Un des sujets du cours concerne les influences entre les comportements des agents et les situations où les décisions des agents affectent les choix des autres (*externalités*). Un exemple usuel d'externalités est la pollution induite par une entreprise, qui a un effet négatif sur les consommateurs, ou même sur les autres firmes qui utilisent le produit pollué. Ou bien, quand la distribution d'un bien nécessite un réseau comme les télécommunications ou l'électricité, les externalités apparaissent de manière naturelle dûes soit à un effet négatif de congestion soit à un effet positif lié au nombre d'agents connectés au réseau.

Dans le cadre de l'équilibre général, l'analyse des externalités nécessite une nouvelle description des contraintes des agents et de leurs objectifs qui sont influencés par les choix des autres. L'adaptation naturelle du concept d'équilibre concurrentiel conduit à un concept d'équilibre à la Nash où les agents prennent les choix des autres comme donnés. Comme dans le cas classique, les prix d'équilibre reflètent seulement les effets marginaux individuels. Par contre, les conditions d'optimalité, au sens de Pareto, intègrent ensemble les effets marginaux individuels.

Donc, en général, la présence d'externalités invalide les théorèmes du bien-être. Afin de surmonter les conséquences des externalités, plusieurs possibilités sont ouvertes pour retrouver l'optimalité de Pareto des allocations d'équilibres. Afin d'approfondir l'étude des méthodologies de mise en œuvre d'un optimum de Pareto nous renvoyons le lecteur à Laffont (1988) et Salanié (1998).

1.2 Notations

- $\mathbb{R}^n := \{x = (x^1, \dots, x^h, \dots, x^n) : x^h \in \mathbb{R},\ \forall\, h = 1, ..., n\}$

- $x \in \mathbb{R}^n$ et $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$x \geq \overline{x} \Longleftrightarrow x^h \geq \overline{x}^h,\ \forall\, h = 1, ..., n$$
$$x > \overline{x} \Longleftrightarrow x \geq \overline{x} \text{ et } x \neq \overline{x}$$
$$x \gg \overline{x} \Longleftrightarrow x^h > \overline{x}^h,\ \forall\, h = 1, ..., n$$

- $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ et $\mathbb{R}^n_- := \{x \in \mathbb{R}^n : x \leq 0\}$.

- $\mathbb{R}^n_{++} := \{x \in \mathbb{R}^n : x \gg 0\}$.

- $x \in \mathbb{R}^n$ et $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot \overline{x}$ dénote le produit scalaire de x et $\overline{x}$.

- A matrice réelle à m lignes et n colonnes et B matrice réelle à n lignes et ℓ colonnes, AB dénote le produit matriciel de A et B.

- Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est traité comme une matrice ligne.

- x^T dénote le vecteur transposé de $x \in \mathbb{R}^n$, x^T est traité comme une matrice colonne.

- Soient f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $x = (x^1, \dots, x^h, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$.

  Pour tout $h = 1, \dots, n$, $D_{x^h} f(x)$ dénote la dérivée partielle de f en x par rapport à x^h. Le vecteur

$$\nabla f(x) := (D_{x^1} f(x), \dots, D_{x^h} f(x), \dots, D_{x^n} f(x)) \in \mathbb{R}^n$$

  dénote le **gradient** de f en x.

  Pour tout $h = 1, \dots, n$ et pour tout $k = 1, \dots, n$, $D^2_{x^h x^k} f(x)$ dénote la dérivée seconde partielle de f en x par rapport à x^h et à x^k. La matrice

$$
\mathrm{H}f(x) := \begin{bmatrix} D^2_{x^1x^1}f(x) & \dots & D^2_{x^hx^1}f(x) & \dots & D^2_{x^nx^1}f(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ D^2_{x^1x^k}f(x) & \dots & D^2_{x^hx^k}f(x) & \dots & D^2_{x^nx^k}f(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ D^2_{x^1x^n}f(x) & \dots & D^2_{x^hx^n}f(x) & \dots & D^2_{x^nx^n}f(x) \end{bmatrix}_{n\times n}
$$

dénote la **matrice Hessienne** de f en x.

- Soit $g := (g_1, \dots, g_j, \dots, g_m)$ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et $x = (x^1, \dots, x^h, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. La matrice

$$
\mathrm{J}g(x) := \begin{bmatrix} D_{x^1}g_1(x) & \dots & D_{x^h}g_1(x) & \dots & D_{x^n}g_1(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ D_{x^1}g_j(x) & \dots & D_{x^h}g_j(x) & \dots & D_{x^n}g_j(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ D_{x^1}g_m(x) & \dots & D_{x^h}g_m(x) & \dots & D_{x^n}g_m(x) \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} \nabla g_1(x) \\ \vdots \\ \nabla g_j(x) \\ \vdots \\ \nabla g_m(x) \end{bmatrix}_{m\times n}
$$

dénote la **matrice Jacobienne** de g en x.

- Soit f une fonction de $X \subseteq \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

f est **croissante** si pour tout x et $\bar{x}$ dans X :

$$
x \ll \bar{x} \Longrightarrow f(x) < f(\bar{x})
$$

f est **strictement croissante** si pour tout x et $\bar{x}$ dans X :

$$
x < \bar{x} \Longrightarrow f(x) < f(\bar{x})
$$

Si X est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est partiellement dérivable par rapport à toutes les variables, alors :

1. f croissante dans $X \Longrightarrow \nabla f(x) \geq 0,\ \forall\, x \in X$.

2. $\nabla f(x) \gg 0,\ \forall\, x \in X \Longrightarrow f$ strictement croissante dans X.

Chapitre 2

Le consommateur

Un bien est un bien physique (le pain, le charbon, une voiture, l'énergie électrique,...) ou un bien immatériel, un service (le transport, une consultation juridique ou médicale, un actif financier,...). Les biens sont caractérisés par :

- les caractéristiques physiques et leurs qualités,
- le lieu où ils sont disponibles,
- la date à laquelle ils sont disponibles,
- les états du monde dans lesquels il seront disponible s'il y a de l'incertitude.

L dénote le nombre fini de biens indicés par $\ell = 1, ..., L$. Les indices correspondant aux biens sont des indices supérieurs. Pour tout $\ell = 1, ..., L$, x^ℓ dénote une quantité de bien ℓ. Nous supposerons que tous les biens sont mesurables et divisibles, c'est-à-dire pour tout $\ell = 1, ..., L$, $x^\ell \in \mathbb{R}$. Un vecteur $x := (x^1, ..., x^\ell, ..., x^L) \in \mathbb{R}^L$ dénote une liste ordonnée de quantités, une quantité pour chaque bien. $\mathbb{R}^L$ est l'espace des biens.

Un consommateur est caractérisé par :

1. un **ensemble de consommation** $X \subseteq \mathbb{R}^L$ qui est l'ensemble de toutes les consommations $x = (x^1, ..., x^\ell, ..., x^L)$ qui sont *a priori* possibles pour le consommateur. Dans ce cours, l'ensemble de consommation d'un consommateur sera identifié à l'orthant positif $\mathbb{R}^L_+$, c'est-à-dire

$$X := \mathbb{R}_+^L$$

2. des **préférences** entre les différents choix de consommation possibles.
3. une **dotation initiale** de biens $e := (e^1, ..., e^\ell, ..., e^L) \in \mathbb{R}^L$.

2.1 Préférences

Les préférences d'un consommateur sont représentées par une relation binaire sur X réfléxive, transitive et complète.

Définition 1 (Relation de préférence). *Une relation de préférence sur X, notée par $\succsim$, est une relation binaire sur X qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $x \in X$: $x \succsim x$.*
2. *Pour tout $x \in X$, $\overline{x} \in X$ et $z \in X$: $x \succsim \overline{x}$ et $\overline{x} \succsim z \Longrightarrow x \succsim z$.*
3. *Pour tout $x \in X$ et $\overline{x} \in X$: $x \succsim \overline{x}$ **ou** $\overline{x} \succsim x$.*

Pour tout $x \in X$ et $\overline{x} \in X$:

– $x \succsim \overline{x}$ signifie que le consommateur préfère x à $\overline{x}$.

– $x \sim \overline{x}$ signifie que le consommateur est indifférent entre x et $\overline{x}$ et par définition nous avons que :

$$x \sim \overline{x} \iff x \succsim \overline{x} \textbf{ et } \overline{x} \succsim x$$

– $x \succ \overline{x}$ signifie que le consommateur préfère strictement x à $\overline{x}$ et par définition nous avons que :

$$x \succ \overline{x} \iff x \succsim \overline{x} \textbf{ et } \overline{x} \not\succsim x$$

Nous donnons maintenant autres propriétés usuelles des préférences.

Proposition 2 (Propriétés des préférences). *Une relation de préférence $\succsim$ sur X est dite :*

1. ***continue*** *si pour tous* $x \in X$ *et* $\overline{x} \in X$ *tels que* $x \succ \overline{x}$ *ils existent un voisinage* $V(x)$ *de* x *et un voisinage* $V(\overline{x})$ *de* $\overline{x}$ *tels que pour tous* $z \in V(x) \cap X$ *et* $\overline{z} \in V(\overline{x}) \cap X$ *nous avons* $z \succ \overline{z}$.
2. ***monotone*** *si pour tout* $x \in X$ *et* $\overline{x} \in X$ *:*

$$x \gg \overline{x} \Longrightarrow x \succ \overline{x}$$

3. ***strictement monotone*** *si pour tout* $x \in X$ *et* $\overline{x} \in X$ *:*

$$x > \overline{x} \Longrightarrow x \succ \overline{x}$$

4. ***convexe*** *si pour tout* $\overline{x} \in X$*, l'ensemble* $P(\overline{x}) := \{x \in X : x \succsim \overline{x}\}$ *des consommations préférées à* $\overline{x}$ *est un ensemble convexe, c'est-à-dire pour tout* $x \in X$ *et* $z \in X$ *:*

$$x \succsim \overline{x} \text{ et } z \succsim \overline{x} \Longrightarrow tx + (1-t)z \succsim \overline{x},\ \forall\, t \in [0,1]$$

5. ***strictement convexe*** *si pour tout* $\overline{x} \in X$*,* $x \in X$ *et* $z \in X$ *où* $x \neq z$ *:*

$$x \succsim \overline{x} \text{ et } z \succsim \overline{x} \Longrightarrow tx + (1-t)z \succ \overline{x},\ \forall\, t \in]0,1[$$

Définition 3 (Fonction d'utilité). *On dit qu'une relation de préférence* $\succsim$ *sur* X *est représentée par une* ***fonction d'utilité*** *s'il existe une fonction* u *de* X *dans* $\mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x \in X$ *et* $\overline{x} \in X$ *:*

$$x \succsim \overline{x} \iff u(x) \geq u(\overline{x})$$

Dans la proposition suivante nous traduisons les propriétés données dans la Proposition 2 en termes de fonction d'utilité.

Proposition 4 (Propriétés d'une fonction d'utilité). *Soit* $\succsim$ *une relation de préférence sur* X *représentée par une fonction d'utilité* u.

1. u *est continue* $\Longrightarrow$ $\succsim$ *est continue.*
2. $\succsim$ *est monotone* $\iff$ u *est croissante.*
3. $\succsim$ *est strictement monotone* $\iff$ u *est strictement croissante.*
4. $\succsim$ *est convexe* $\iff$ u *est quasi-concave.*[1]

1. Voir le Paragraphe 6.1 pour la définition de fonction quasi-concave.

5. u est strictement quasi-concave[2] $\Longrightarrow \succsim$ *est strictement convexe.*

Nous donnons maintenant des conditions pour lesquelles une relation de préférence est représentable par une fonction d'utilité.

Proposition 5 (Existence d'une fonction d'utilité). *Soit $\succsim$ une relation de préférence sur $X = \mathbb{R}^L_+$. Si $\succsim$ est continue, alors il existe une fonction d'utilité continue u qui représente $\succsim$.*

On remarque que si u est un fonction d'utilité qui représente la relation de préférence $\succsim$ et f est une fonction strictement croissante, alors la fonction $\widetilde{u}$ définie par :

$$\widetilde{u} := f \circ u$$

est une fonction d'utilité qui représente la même relation de préférence $\succsim$. Donc, la représentation par une fonction d'utilité **n'est pas unique**.

2.2 La contrainte budgétaire

Pour tout $\ell = 1, ..., L$, $p^\ell \in \mathbb{R}_+$ dénote le prix d'une unité du bien ℓ. Un système de prix est $p := (p^1, ..., p^\ell, ..., p^L) \in \mathbb{R}^L_+$.

Soient $e = (e^1, ..., e^\ell, ..., e^L) \in \mathbb{R}^L$ la dotation initiale du consommateur en termes de biens et $p = (p^1, ..., p^\ell, ..., p^L) \in \mathbb{R}^L_+$ le système de prix en vigueur, alors :

$$p \cdot e = p^1 e^1 + ... + p^\ell e^\ell + ... + p^L e^L \in \mathbb{R}$$

est la richesse du consommateur.

La contrainte budgétaire du consommateur est l'ensemble de toutes les consommations possibles dont la valeur au système de prix en vigueur est inférieure ou égale à sa richesse.

Définition 6 (Contrainte budgétaire). *Soient $p = (p^1, ..., p^\ell, ..., p^L) \in \mathbb{R}^L_+$ un système de prix et $e = (e^1, ..., e^\ell, ..., e^L) \in \mathbb{R}^L$ la dotation initiale*

2. Voir le Paragraphe 6.1 pour la définition de fonction strictement quasi-concave.

du consommateur. La contrainte budgétaire du consommateur est l'ensemble suivant :

$$B(p, e) := \{x \in X : p \cdot x \leq p \cdot e\}$$

Nous donnons maintenant les propriétés usuelles de la contrainte budgétaire.

Proposition 7 (Propriétés de la contrainte budgétaire).

1. *Si $e \geq 0$, alors $e \in B(p, e)$, c'est-à-dire $B(p, e) \neq \emptyset$.*
2. *$B(p, e)$ est un sous-ensemble fermé de $X = \mathbb{R}^L_+$.*
3. *$B(p, e)$ est un sous-ensemble convexe de $X = \mathbb{R}^L_+$.*
4. *Pour tout $t > 0$, $B(tp, e) = B(p, e)$.*
5. *Si $p \gg 0$, alors $B(p, e)$ est borné.*

2.3 Le problème du consommateur

Les préférences du consommateur sont représentées par une fonction d'utilité u. Si $p = (p^1, ..., p^\ell, ..., p^L) \in \mathbb{R}^L_+$ est un système de prix et $e = (e^1, ..., e^\ell, ..., e^L) \in \mathbb{R}^L$ est la dotation initiale de biens du consommateur, alors **le problème du consommateur** est le problème de maximisation suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & u(x) \\ x \in \mathbb{R}^L & \\ & x \in X \\ & p \cdot x \leq p \cdot e \end{array} \tag{2.1}$$

Définition 8 (Demande du consommateur). *Soient $p = (p^1, ..., p^\ell, ..., p^L) \in \mathbb{R}^L_+$ un système de prix et $e = (e^1, ..., e^\ell, ..., e^L) \in \mathbb{R}^L$ la dotation initiale du consommateur. La demande du consommateur est l'ensemble $d(p, e)$ de toutes les consommations x^* telles que x^* est une solution du problème* (2.1)*.*

Nous donnons maintenant les propriétés usuelles de la demande.

Proposition 9 (Propriétés de la demande).

1. **(Existence d'une solution).** *Si $p \gg 0$, $e \geq 0$ et u est continue, alors il existe une solution x^* du problème* (2.1)*, c'est-à-dire $d(p, e) \neq \emptyset$.*

2. **(Unicité de la solution).** *Si le problème* (2.1) *a une solution* x^* *et* u *est strictement quasi-concave, alors le problème* (2.1) *a une solution unique, c'est-à-dire* $d(p, e) = \{x^*\}$.
3. **(Loi de Walras).** *Si* $x^* \in d(p, e)$, $p > 0$ *et* u *est croissante, alors*

$$p \cdot x^* = p \cdot e$$

4. **(Normalisation du prix d'un bien).** *Pour tout* $t > 0$ *:*

$$d(tp, e) = d(p, e)$$

En utilisant les théorèmes de Karush–Kuhn–Tucker (voir Chapitre 6), nous pouvons caractériser les **solutions strictement positives** du problème (2.1) en termes d'utilités marginales.

Théorème 10 (Caractérisation de la demande). *Soient* $p \gg 0$ *un système de prix et* $e > 0$ *la dotation initiale du consommateur. Nous supposons que* u *est différentiable sur* $\mathbb{R}^L_{++}$ *et* $\nabla u(x) \gg 0$ *pour tout* $x \gg 0$.

1. *Si* $x^* \gg 0$ *est une solution du problème* (2.1), *alors il existe* $\lambda^* > 0$ *tel que :*

$$\begin{cases} \nabla u(x^*) = \lambda^* p \\ p \cdot x^* = p \cdot e \end{cases} \tag{2.2}$$

2. *Si* u *est quasi-concave dans* $\mathbb{R}^L_{++}$ *et ils existent* $x^* \gg 0$ *et* $\lambda^* > 0$ *tels que* (x^*, λ^*) *satisfait le système* (2.2), *alors* x^* *est une solution du problème* (2.1).

Chapitre 3

Économie d'échange

Une économie d'échange comprend :

– Un nombre fini L de biens indicés par $\ell = 1, ..., L$. Les indices correspondant aux biens sont des indices supérieurs. $\mathbb{R}^L$ est l'espace des biens.

– Un nombre fini I de consommateurs indicés par $i = 1, ..., I$. Les indices correspondant aux consommateurs sont des indices inférieurs.

– $x_i := (x_i^1, ..., x_i^\ell, ..., x_i^L) \in \mathbb{R}^L$ dénote une consommation générique du consommateur i.

– Chaque consommateur i est caractérisé par :

1. un ensemble de consommation $X_i \subseteq \mathbb{R}^L$. **Dans ce cours, l'ensemble de consommation de chaque consommateur sera identifié à l'orthant positif de l'espace des biens, c'est-à-dire :**
$$X_i := \mathbb{R}_+^L \text{ pour tout } i = 1, ..., I$$
2. des préférences représentées par une fonction d'utilité u_i de X_i dans $\mathbb{R}$,
3. une dotation initiale de biens $e_i := (e_i^1, ..., e_i^\ell, ..., e_i^L) \in \mathbb{R}^L$.

Une **économie d'échange** $\mathcal{E} := (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ est un description complète des caractéristiques de tous les consommateurs, c'est-à-dire : ensembles de consommation, préférences et dotations initiales.

$r := \sum_{i=1}^{I} e_i$ représente les **ressources globales** de l'économie $\mathcal{E}$.

3.1 Allocations réalisables

Soit $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ une économie d'échange.

Définition 11 (Allocation). $x := (x_1, ..., x_i, ..., x_I) \in \mathbb{R}^{LI}$ *est une allocation si*

$$x_i \in X_i \text{ pour tout } i = 1, ..., I$$

Définition 12 (Allocation réalisable). *Une allocation* $x = (x_1, ..., x_i, ..., x_I) \in \prod_{i=1}^{I} X_i$ *est réalisable pour l'économie* $\mathcal{E}$ *si*

$$\sum_{i=1}^{I} x_i = \sum_{i=1}^{I} e_i$$

Soit A l'ensemble des allocations réalisables pour l'économie $\mathcal{E}$.

Une allocation réalisable est donc une liste complète de consommations individuelles qui est *possible* au niveau individuel et au niveau global.

Nous donnons maintenant les propriétés usuelles de l'ensemble des allocations réalisables.

Proposition 13 *Soit* $(e_1, ..., e_i, ..., e_I) \in \mathbb{R}^{LI}_+$, *c'est-à-dire* $e_i \geq 0$ *pour tout* $i = 1, ..., I$.

1. $(e_1, ..., e_i, ..., e_I) \in A$, *donc* $A \neq \emptyset$.
2. *Si* $x = (x_1, ..., x_i, ..., x_I) \in A$, *alors* $0 \leq x_i \leq r$ *pour tout* $i = 1, ..., I$.
3. A *est un sous-ensemble borné de* $\mathbb{R}^{LI}_+$.
4. A *est un sous-ensemble fermé de* $\mathbb{R}^{LI}_+$.
5. A *est un sous-ensemble convexe de* $\mathbb{R}^{LI}_+$.

Dans le cas d'une éonomie avec $L = 2$ biens et $I = 2$ consommateurs, on peut utiliser la **boîte d'Edgeworth** pour représenter l'ensemble des allocations réalisables de l'économie.

3.2 Équilibre concurrentiel

Soit $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ une économie d'échange.

Définition 14 (Équilibre concurrentiel). *Un équilibre concurrentiel de l'économie $\mathcal{E}$ est (p^*, x^*) où $p^* \in \mathbb{R}^L_+$ et $x^* := (x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_I^*) \in \mathbb{R}^{LI}_+$ sont un système de prix et une allocation tels que :*

1. *pour tout $i = 1, ..., I$, x_i^* est une solution du problème de maximisation suivant :*
$$\begin{array}{ll} \max & u_i(x_i) \\ x_i \in \mathbb{R}^L & \\ & x_i \in X_i \\ & p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot e_i \end{array} \tag{3.1}$$
2. *la demande globale égale l'offre globale :*
$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{i=1}^{I} e_i$$

Nous donnons maintenant quelques propriétés des équilibres.

Proposition 15 (Propriétés d'un équilibre concurrentiel). *Soit $(p^*, x^*) \in \mathbb{R}^L_+ \times \mathbb{R}^{LI}_+$ un équilibre concurrentiel de l'économie $\mathcal{E}$.*

1. **(Normalisation du prix d'un bien).** *Pour tout $t > 0$, (tp^*, x^*) est un équilibre concurrentiel de l'économie $\mathcal{E}$.*
2. *S'il existe un consommateur h tel que u_h est croissante, alors le prix d'équilibre est non nul, c'est-à-dire $p^* > 0$. S'il existe un consommateur h tel que u_h est strictement croissante, alors le prix d'équilibre est strictement positif, c'est-à-dire $p^* \gg 0$.*
3. *Pour tout $i = 1, ..., I$, $p^* \cdot x_i^* = p^* \cdot e_i$.*
4. *Si $(e_1, ..., e_i, ..., e_I) \in \mathbb{R}^{LI}_+$, alors $u_i(x_i^*) \geq u_i(e_i)$ pour tout $i = 1, ..., I$.*

Dans la proposition suivante on remarque que lorsque les préférences des consommateurs sont monotones et le **système de prix est strictement positif**, alors il suffit que la demande globale égale l'offre globale pour $L-1$ biens pour que, à l'équilibre, la demande globale égale l'offre globale pour tous les biens.

Proposition 16 *Soit* $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ *une économie d'échange où* u_i *est croissante pour tout* $i = 1, ..., I$. *Alors* (p^*, x^*) *avec* $p^* \gg 0$ *est un équilibre concurrentiel de l'économie* $\mathcal{E}$ *si et seulement si*

1. *pour tout* $i = 1, ..., I$, x_i^* *est une solution du problème* (3.1) *et*

2. *la demande globale égale l'offre globale pour* $L - 1$ *biens :*

$$\text{pour } k \in \{1, ..., L\} \text{ donné, } \sum_{i=1}^{I} x_i^{*\ell} = \sum_{i=1}^{I} e_i^{\ell} \quad \forall\, \ell = 1, ..., L \text{ où } \ell \neq k$$

En utilisant la proposition précédente et les théorèmes de Karush–Kuhn–Tucker (voir Chapitre 6), nous pouvons caractériser les **équilibres concurrentiels strictement positifs** en termes de conditions du premier ordre.

Théorème 17 (Caractérisation des équilibres concurrentiels). *Soit* $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ *une économie d'échange où pour tout* $i = 1, ..., I$: $e_i > 0$, u_i *est différentiable sur* $\mathbb{R}^L_{++}$ *et* $\nabla u_i(x_i) \gg 0$ *pour tout* $x_i \gg 0$.

Alors :

1. *Si* $(p^*, x^*) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}^{LI}_{++}$ *est un équilibre concurrentiel de l'économie* $\mathcal{E}$, *alors il existe* $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_i^*, ..., \lambda_I^*) \in \mathbb{R}^I_{++}$ *tel que :*

$$\forall\, i = 1, ..., I \ : \begin{cases} \nabla u_i(x_i^*) = \lambda_i^* p^* \\ p^* \cdot x_i^* = p^* \cdot e_i \end{cases} \tag{3.2}$$

   et pour $k \in \{1, ..., L\}$ *donné,*

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^{*\ell} = \sum_{i=1}^{I} e_i^{\ell} \quad \forall\, \ell = 1, ..., L \text{ où } \ell \neq k \tag{3.3}$$

2. *Si* u_i *est quasi-concave dans* $\mathbb{R}^L_{++}$ *pour tout* $i = 1, ..., I$ *et ils existent* $(p^*, x^*) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}^{LI}_{++}$ *et* $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_i^*, ..., \lambda_I^*) \in \mathbb{R}^I_{++}$ *tels que* (p^*, x^*, λ^*) *satisfait* (3.2) *et* (3.3), *alors* (p^*, x^*) *est un équilibre concurrentiel de l'économie* $\mathcal{E}$.

La proposition suivante établit qu'un équilibre concurrentiel reste un équilibre après une redistribution des ressources globales si cette redistribution ne modifie pas la richesse individuelle des consommateurs.

Proposition 18 *Soient* $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ *une économie d'échange et* (p^*, x^*) *est un équilibre concurrentiel de l'économie* $\mathcal{E}$*. Alors* (p^*, x^*) *est également un équilibre concurrentiel de l'économie* $\widetilde{\mathcal{E}} = (X_i, u_i, \widetilde{e}_i)_{i=1,...,I}$ *pour toutes les allocations* $(\widetilde{e}_1, ..., \widetilde{e}_i, ..., \widetilde{e}_I) \in \mathbb{R}_+^L$ *telles que :*

1. $\sum_{i=1}^{I} \widetilde{e}_i = \sum_{i=1}^{I} e_i$ *et*
2. $p^* \cdot \widetilde{e}_i = p^* \cdot e_i$ *pour tout* $i = 1, ..., I$.

En particulier, (p^*, x^*) *est un équilibre concurrentiel de l'économie* $\mathcal{E}^* = (X_i, u_i, x_i^*)_{i=1,...,I}$.

Nous allons maintenant donner des conditions suffisantes pour l'existence d'un équilibre concurrentiel.

Théorème 19 (Existence d'un équilibre concurrentiel). *Soit* $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ *une économie d'échange où :*

1. *pour tout* $i = 1, ..., I$, u_i *est continue, quasi-concave et croissante,*
2. *pour tout* $i = 1, ..., I$, $e_i \gg 0$.

Alors il existe un équilibre concurrentiel (p^*, x^*) *de l'économie* $\mathcal{E}$ *avec* $p^* > 0$.

3.3 Optimum de Pareto

Soit $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ une économie d'échange.

Définition 20 (Optimum de Pareto). *Une allocation* $x^* = (x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_I^*)$ *est un optimum de Pareto de l'économie* $\mathcal{E}$ *si*

1. x^* *est une allocation réalisable et*
2. *il n'existe pas une autre allocation réalisable* $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_i, ..., \widetilde{x}_I)$ *telle que :*

$$u_i(\widetilde{x}_i) \geq u_i(x_i^*) \text{ pour tout } i = 1, ..., I \text{ et}$$
$$u_h(\widetilde{x}_h) > u_h(x_h^*) \text{ pour au moins un } h$$

Une allocation réalisable est donc un optimum de Pareto de l'économie s'il n'existe pas d'autre allocation réalisable qui permette d'améliorer l'utilité de tous les consommateurs avec une amélioration stricte pour au moins un consommateur.

Dans la suite, l'objectif est de donner une caractérisation complète des optima de Pareto en termes de I problèmes de maximisation avec contraintes.

Proposition 21 $x^* = (x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_I^*)$ *est un optimum de Pareto de l'économie* $\mathcal{E}$ *si et seulement si* x^* *est une solution du problème de maximisation suivant* ***pour tout*** $h = 1, ..., I$.

$$\begin{array}{ll} \max & u_h(x_h) \\ x \in \mathbb{R}^{LI} & \\ & x_i \in X_i, \ \forall\, i = 1, ..., I \\ & u_i(x_i) \geq u_i(x_i^*), \ \forall\, i \neq h \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{I} x_i = \sum_{i=1}^{I} e_i \end{array} \tag{3.4}$$

Démonstration. Si x^* est un optimum de Pareto, alors x^* est une allocation réalisable. Si x^* n'est pas une solution du problème (3.4) pour au moins un h, alors il existe $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_i, ..., \widetilde{x}_I) \in \prod_{i=1}^{I} X_i$ tel que $\sum_{i=1}^{I} \widetilde{x}_i = \sum_{i=1}^{I} e_i$, $u_i(\widetilde{x}_i) \geq u_i(x_i^*)$ pour tout $i \neq h$ et $u_h(\widetilde{x}_h) > u_h(x_h^*)$. Alors x^* ne peut pas être un optimum de Pareto.

Vice versa, nous supposons que x^* est une solution du problème (3.4) pour tout $h = 1, ..., I$. Si x^* n'est pas un optimum de Pareto, alors il existe une allocation réalisable $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_i, ..., \widetilde{x}_I) \in \prod_{i=1}^{I} X_i$ telle que $u_i(\widetilde{x}_i) \geq u_i(x_i^*)$ pour tout $i \neq h$ et $u_h(\widetilde{x}_h) > u_h(x_h^*)$ pour au moins un h. Alors x^* ne peut pas être une solution du problème (3.4). ■

Maintenant, nous allons montrer que si les préférences des consommateurs sont représentées par des fonctions d'utilité continues et strictement croissantes, alors il est possible d'avoir une caractérisation complète des optima de Pareto en termes d'**un seul** problème de maximisation avec contraintes, c'est-à-dire du problème de maximisation (3.4) d'**un seul consommateur** h qui sera le plus souvent identifié au consommateur $h = 1$.

Proposition 22 *Soit $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ une économie d'échange où u_i est continue et strictement croissante pour tout $i = 1, ..., I$. Si x^* est une solution du problème de maximisation suivant :*

$$\begin{array}{ll} \max & u_1(x_1) \\ x \in \mathbb{R}^{LI} & \\ & x_i \in X_i, \ \forall\, i = 1, ..., I \\ & u_i(x_i) \geq u_i(x_i^*), \ \forall\, i \neq 1 \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{I} x_i = \sum_{i=1}^{I} e_i \end{array} \tag{3.5}$$

alors x^* est un optimum de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$.

Démonstration. Si x^* n'est pas un optimum de Pareto, alors il existe $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_i, ..., \widetilde{x}_I) \geq 0$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{I} \widetilde{x}^i = \sum_{i=1}^{I} e_i$,

$$u_h(\widetilde{x}_h) > u_h(x_h^*) \text{ pour au moins un } h \tag{3.6}$$

et

$$u_i(\widetilde{x}_i) \geq u_i(x_i^*) \ \forall\, i \neq h \tag{3.7}$$

Donc $\widetilde{x}$ satisfait les contraintes du problème (3.5).

Si $h = 1$, alors (3.6) contredit le fait que x^* est une solution du problème (3.5).

Si $h \neq 1$, premièrement, nous observons que $\widetilde{x}_h \neq 0$. En fait si $\widetilde{x}_h = 0$, (3.6) implique que $u_h(0) > u_h(x_h^*)$ ce qui n'est pas possible parce que $u_h(0) \leq u_h(x_h^*)$ vu que $X_h = \mathbb{R}_+^L$ et que u_h est strictement croissante. Donc, il existe $\ell \in \{1, ..., L\}$ tel que $\widetilde{x}_h^\ell > 0$, c'est-à-dire il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que

$$\widetilde{x}_h - \varepsilon \mathbf{1}^\ell \in X_h = \mathbb{R}_+^L, \ \forall\, 0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$$

où le vecteur $\mathbf{1}^\ell \in \mathbb{R}_+^L$ a toutes les composantes égales à 0 sauf la composante ℓ qui est égale à 1. Par continuité de u_h, (3.6) implique qu'il existe $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$ tel que

$$u_h(\widetilde{x}_h - \varepsilon \mathbf{1}^\ell) > u_h(x_h^*) \tag{3.8}$$

Maintenant, nous définissons

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_1 &:= \widetilde{x}_1 + \varepsilon \mathbf{1}^\ell \\
\widehat{x}_h &:= \widetilde{x}_h - \varepsilon \mathbf{1}^\ell \\
\widehat{x}_i &:= \widetilde{x}_i, \ \forall\, i \neq 1 \text{ et } i \neq h
\end{aligned}$$

$\widehat{x} := (\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_i, ..., \widehat{x}_I) \geq 0$ parce que $\widehat{x}_i \in X_i = \mathbb{R}^L_+$ pour tout $i = 1, ..., I$ et $\sum_{i=1}^{I} \widehat{x}^i = \sum_{i=1}^{I} \widetilde{x}^i = \sum_{i=1}^{I} e_i$. En outre, (3.7) et (3.8) impliquent que

$$u_i(\widehat{x}_i) \geq u_i(x_i^*) \ \forall\, i \neq 1$$

Donc $\widehat{x}$ satisfait les contraintes du problème (3.5). Enfin, comme u_1 est strictement croissante, nous avons $u_1(\widehat{x}_1) > u_1(x_1^*)$ qui contredit le fait que x^* est une solution du problème (3.5). ■

Remarque 23 *En suivant la démonstration de la Proposition 22, il est facile de vérifier que la Proposition 22 est valide aussi si l'ensembles de consommation de tous les consommateurs est l'orthant strictement positif, c'est-à-dire* $X_i = \mathbb{R}^L_{++}$ *pour tout* $i = 1, ..., I$.

Les Propositions 21 et 22 et la Remarque 23 impliquent que x^* est un optimum de Pareto si et seulement si x^* est une solution du problème de maximisation (3.5). Donc nous donnons la proposition suivante.

Proposition 24 (Caractérisation des optima de Pareto). *Si* $X_i = \mathbb{R}^L_+$ *ou* $X_i = \mathbb{R}^L_{++}$ *et* u_i *est continue et strictement croissante pour tout* $i = 1, ..., I$, *alors* x^* *est un optimum de Pareto de l'économie* $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ *si et seulement si* x^* *est une solution du problème de maximisation* (3.5).

En utilisant la Proposition 24 et les résultats du Chapitre 6, nous pouvons caractériser les optima de Pareto en termes de conditions du premier ordre dans le cas où les préférences sont représentées par des fonctions d'utilité différentiables, quasi-concaves et strictement croissantes.

Proposition 25 (Conditions d'optimalité de Pareto en termes de conditions du premier ordre). *Soit* $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ *une économie d'échange où pour tout* $i = 1, ..., I$: u_i *est différentiable et quasi-concave sur* $\mathbb{R}^L_{++}$ *et* $\nabla u_i(x_i) \gg 0$ *pour tout* $x_i \gg 0$. *Alors une allocation réalisable*

$x^* = (x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_I^*) \gg 0$ est un optimum de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$ si et seulement si il existe $(\lambda_2^*, ..., \lambda_i^*, ..., \lambda_I^*) \in \mathbb{R}_{++}^{I-1}$ tel que

$$\nabla u_1(x_1^*) = \lambda_i^* \nabla u_i(x_i^*) \textit{ pour tout } i = 2, ..., I \tag{3.9}$$

Démonstration. Nous considérons le problème de maximisation (3.5) avec $X_i = \mathbb{R}_{++}^L$ pour tout $i = 1, ..., I$, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x \in \mathbb{R}_{++}^{LI}} & u_1(x_1) \\ & u_i(x_i) - u_i(x_i^*) \geq 0, \ \forall\, i \neq 1 \\ & r - \sum\limits_{i=1}^{I} x_i \geq 0 \end{array} \tag{3.10}$$

Dans la suite nous montrons que les conditions de Karush–Kuhn–Tucker associées au problème (3.10) sont nécessaires et suffisantes.

Les conditions de Karush–Kuhn–Tucker sont nécessaires parce que la Condition de rang du Théorème 40 est satisfaite vu que l'hypothèse :

$$\text{pour tout } i = 1, ..., I \colon \nabla u_i(x_i) \gg 0, \ \forall\, x_i \gg 0$$

implique que pour tout $x \in \mathbb{R}_{++}^{LI}$ la matrice Jacobienne des fonctions contraintes en x est de rang plein en lignes. En fait, soit $x \in \mathbb{R}_{++}^{LI}$. Nous calculons ci-après cette matrice qui a $(I - 1 + L)$ lignes et LI colonnes et nous observons que $(I - 1 + L) \leq LI$.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_2 & \dots & x_I & x_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} u_2(x_2) - u_2(x_2^*) \\ \vdots \\ u_I(x_I) - u_I(x_I^*) \\ r - \sum\limits_{i=1}^{I} x_i \end{array} & \begin{pmatrix} \nabla u_2(x_2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \nabla u_I(x_I) & 0 \\ -I_L & \dots & -I_L & -I_L \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.11}$$

où I_L est la matrice identité d'ordre L. Maintenant nous considérons la sous-matrice suivante d'ordre $(I-1+L)$:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \quad x_2^1 \quad & \dots & \quad x_I^1 \quad & x_1 \end{array} \\
D := & \begin{pmatrix}
D_{x_2^1}u_2(x_2) & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & D_{x_I^1}u_I(x_I) & 0 \\
 & & & \\
\overset{-1}{0} & \dots & \overset{-1}{0} & -I_L
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Nous avons que $\det(D) = D_{x_2^1}u_2(x_2) \cdot \ldots \cdot D_{x_I^1}u_I(x_I) \cdot \det(I_L) \neq 0$ vue que $\det(I_L) \neq 0$ et $D_{x_i^1}u_i(x_i) > 0$ pour tout $i = 2, ..., I$. Donc la matrice Jacobienne des fonctions contraintes (3.11) est de rang plein en lignes égal à $(I-1+L)$.

Les conditions de Karush–Kuhn–Tucker associées au problème (3.10) sont suffisantes parce que les hypothèses du Théorème 41 sont satisfaites.

Les conditions de Karush–Kuhn–Tucker associées au problème (3.10) sont :

$$
\begin{cases}
\nabla u^1(x^1) - \gamma = 0 \\
\lambda_i \nabla u^i(x^i) - \gamma = 0, \ \ \forall i \neq 1 \\
u_i(x_i) - u_i(x_i^*) \geq 0, \ \ \forall\ i \neq 1 \\
r - \displaystyle\sum_{i=1}^{I} x_i \geq 0 \\
\gamma^\ell (r^\ell - \displaystyle\sum_{i=1}^{I} x_i^\ell) = 0, \ \ \forall \ell = 1, ..., L \\
\lambda_i (u_i(x_i) - u_i(x_i^*)) = 0, \ \ \forall\ i \neq 1 \\
\gamma^\ell \geq 0, \ \ \forall \ell = 1, ..., L \\
\lambda_i \geq 0, \ \ \forall i \neq 1
\end{cases}
\tag{3.12}
$$

où $\gamma := (\gamma^1, ..., \gamma^\ell, ..., \gamma^L)$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i = 2, ..., I$ et $\gamma^\ell \in \mathbb{R}$ pour tout $\ell = 1, ..., L$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement aux contraintes $u^i(x^i) - u^i(x^{*i}) \geq 0$ et $r^\ell - \sum_{i=1}^{I} x_i^\ell \geq 0$.

Nous supposons maintenant que $x^* = (x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_I^*) \gg 0$ est une allocation réalisable et qu'il existe $(\lambda_2^*, ..., \lambda_i^*, ..., \lambda_I^*) \in \mathbb{R}_{++}^{I-1}$ tel que (3.9) est satisfaite. Donc $(x^*, \gamma^*, (\lambda_2^*, ..., \lambda_i^*, ..., \lambda_I^*))$ avec $\gamma^* := \nabla u_1(x_1^*)$ satisfait les conditions (3.12).[1] Alors x^* est une solution du problème (3.10) et donc la Proposition 24 implique que x^* est un optimum de Pareto.

Vice versa, nous supposons que $x^* = (x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_I^*) \gg 0$ est un optimum de Pareto. De la Proposition 24 on déduit que x^* est une solution du problème (3.10). Alors il existe $(\lambda_2^*, ..., \lambda_i^*, ..., \lambda_I^*) \in \mathbb{R}_{+}^{I-1}$ et $\gamma^* \in \mathbb{R}_{+}^{L}$ tels que $(x^*, \gamma^*, (\lambda_2^*, ..., \lambda_i^*, ..., \lambda_I^*))$ satisfait les conditions (3.12). En particulier nous obtenons :

$$\begin{cases} \nabla u_1(x_1^*) = \gamma^* \\ \lambda_i^* \nabla u_i(x_i^*) = \gamma^*, \ \forall i \neq 1 \end{cases}$$

Alors (3.9) est satisfaite. ■

En reformulant la Proposition 25, dans la proposition suivante nous avons une caractérisation complète des optima de Pareto en termes de Taux Marginaux de Substitution (TMS).

Proposition 26 (Conditions d'optimalité de Pareto en termes de TMS). *Soit $\mathcal{E}$ une économie d'échange qui satisfait les hypothèses de la Proposition 25. Alors une allocation réalisable $x^* = (x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_I^*) \gg 0$ est un optimum de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$ si et seulement si pour tous les couples de biens (ℓ, k) les Taux Marginaux de Substitution entre le bien ℓ et le bien k sont les mêmes pour tous les consommateurs et, c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned} &\forall\, \ell = 1, ..., L \ \textit{et} \ \forall\, k = 1, ..., L : \\ &\frac{D_{x_h^\ell} u_h(x_h^*)}{D_{x_h^k} u_h(x_h^*)} = \frac{D_{x_i^\ell} u_i(x_i^*)}{D_{x_i^k} u_i(x_i^*)}, \ \forall\, h = 1, ..., I \ \textit{et} \ \forall\, i = 1, ..., I \end{aligned} \tag{3.13}$$

1. Nous remarquons que l'hypothèse $\nabla u_1(x_1^*) \gg 0$ implique que $\gamma^* \gg 0$.

Démonstration. Nous supposons que $x^* = (x^{*1}, ..., x^{*i}, ..., x^{*I})$ est un optimum de Pareto. La Proposition 25 implique qu'il existe $(\lambda_2^*, ..., \lambda_i^*, ..., \lambda_I^*) \in \mathbb{R}_{++}^{I-1}$ tel que (3.9) est satisfaite. Alors nous avons que :

$$\forall \ \ell = 1, ..., L \text{ et } \forall \ k = 1, ..., L :$$

$$\frac{D_{x_1^\ell} u_1(x_1^*)}{D_{x_1^k} u_1(x_1^*)} = \frac{\lambda_i^* D_{x_i^\ell} u_i(x_i^*)}{\lambda_i^* D_{x_i^k} u_i(x_i^*)} = \frac{D_{x_i^\ell} u_i(x_i^*)}{D_{x_i^k} u_i(x_i^*)}, \ \forall \ i \neq 1$$

Donc (3.13) est satisfaite.

Vice versa, nous supposons que $x^* = (x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_I^*) \gg 0$ est une allocation réalisable et que (3.13) est satisfaite. Alors en particulier :

$$\forall \ \ell = 1, ..., L :$$

$$D_{x_1^\ell} u_1(x_1^*) = \frac{D_{x_1^k} u_1(x_1^*)}{D_{x_i^k} u_i(x_i^*)} D_{x_i^\ell} u_i(x_i^*), \ \forall \ i \neq 1 \text{ et } \forall \ k = 1, ..., L \tag{3.14}$$

Donc pour tout $i \neq 1$, $\dfrac{D_{x_1^k} u_1(x_1^*)}{D_{x_i^k} u_i(x_i^*)}$ ne dépend pas de $k = 1, ..., L$, c'est-à-dire il est constant par rapport à k. D'après l'hypothèse :

$$\text{pour tout } i = 1, ..., I \colon \nabla u_i(x_i) \gg 0, \ \forall \ x_i \gg 0$$

nous avons que cette constante est strictement positive pour tout $i \neq 1$, donc

$$\lambda_i^* := \frac{D_{x_1^k} u_1(x_1^*)}{D_{x_i^k} u_i(x_i^*)} > 0, \ \forall \ i \neq 1 \tag{3.15}$$

Alors (3.14) et (3.15) impliquent qu'il existe $(\lambda_2^*, ..., \lambda_i^*, ..., \lambda_I^*) \in \mathbb{R}_{++}^{I-1}$ tel que

$$\nabla u_1(x_1^*) = \lambda_i^* \nabla u_i(x_i^*), \ \forall \ i \neq 1$$

De la Proposition 25 on déduit que x^* est un optimum de Pareto. ■

Chapitre 4

Les théorèmes du bien-être

Dans ce chapitre nous donnons les théorèmes qui constituent le lien entre les deux concepts d'équilibre concurrentiel et d'optimum de Pareto.

Théorème 27 (Premier théorème du bien-être). *Soit $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ une économie d'échange où u_i est strictement croissante pour tout $i = 1, ..., I$. Si $(p^*, x^*) \in \mathbb{R}_+^{LI} \times \mathbb{R}_{++}^L$ est un équilibre concurrentiel de l'économie $\mathcal{E}$, alors x^* est un optimum de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Si x^* n'est pas un optimum de Pareto, alors il existe $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_i, ..., \widetilde{x}_I) \geq 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^{I} \widetilde{x}_i = \sum_{i=1}^{I} e_i \tag{4.1}$$

$u_i(\widetilde{x}_i) \geq u_i(x_i^*)$ pour tout $i = 1, ..., I$ et $u_h(\widetilde{x}_h) > u_h(x_h^*)$ pour au moins un h. Vu que x_h^* est une solution du problème (3.1) pour $i = h$, nous avons

$$p^* \cdot \widetilde{x}_h > p^* \cdot e_h \tag{4.2}$$

Maintenant nous montrerons que

$$p^* \cdot \widetilde{x}_i \geq p^* \cdot e_i \ \ \forall\, i \neq h \tag{4.3}$$

Soit $i \neq h$, si $p^* \cdot \widetilde{x}_i < p^* \cdot e_i$ alors il existe $\widehat{x}_i \in \mathbb{R}_+^L$ tel que

$$\widehat{x}_i > \widetilde{x}_i \quad \text{et} \quad p^* \cdot \widehat{x}_i = p^* \cdot e_i$$

En fait $p^* \gg 0$ (vu que u_i est strictement croissante), alors il suffit de considérer un bien ℓ et $\widehat{x}_i$ défini par

$$\widehat{x}_i := \widetilde{x}_i + \delta \mathbf{1}^\ell$$

où $\delta := \dfrac{p^* \cdot e_i - p^* \cdot \widetilde{x}_i}{p^{*\ell}} > 0$ et $\mathbf{1}\ell \in \mathbb{R}^L_+$ est le vecteur qui a toutes les composantes égales à 0 sauf la composante ℓ qui est égale à 1. Vu que u_i est strictement croissante, nous avons $u_i(\widehat{x}_i) > u_i(x_i^*)$ qui contredit le fait que x_i^* est une solution du problème (3.1). Donc (4.3) est prouvée.

De (4.2) et (4.3) nous obtenons

$$p^* \cdot \sum_{i=1}^{I} \widetilde{x}_i > p^* \cdot \sum_{i=1}^{I} e_i$$

qui contredit (4.1). Donc x^* est un optimum de Pareto. ■

Théorème 28 (Second théorème du bien-être). *Soit $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ une économie d'échange où u_i est continue, quasi-concave et strictement croissante pour tout $i = 1, ..., I$. Si $x^* \gg 0$ est un optimum de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$, alors il existe un système de prix $p^* \gg 0$ tel que (p^*, x^*) est un équilibre concurrentiel de l'économie $\mathcal{E}^* := (X_i, u_i, x_i^*)_{i=1,...,I}$, c'est-à-dire de l'économie dont les dotations initiales sont $e_i^* := x^{*i}$ pour tout $i = 1, ..., I$.*

En utilisant les caractérisations des équilibre concurrentiels et des optima de Pareto en termes de conditions du premier ordre (voir le Théorème 17 et la Proposition 25), la démonstration de la version différentiable du second théorème du bien-être est immédiate.

Théorème 29 (Second théorème du bien-être : version différentiable). *Soit $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ une économie d'échange où pour tout $i = 1, ..., I$: u_i est différentiable et strictement quasi-concave sur $\mathbb{R}^L_{++}$ et $\nabla u_i(x_i) \gg 0$ pour tout $x_i \gg 0$. Si $x^* \gg 0$ est un optimum de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$, alors il existe un système de prix $p^* \gg 0$ tel que (p^*, x^*) est l'unique équilibre concurrentiel (après une normalisation du prix d'un bien) de l'économie $\mathcal{E}^* = (X_i, u_i, x_i^*)_{i=1,...,I}$. En normalisant le prix du bien L, le système de prix est déterminé par :*

$$p^* := \frac{\nabla u_1(x_1^*)}{D_{x_1^L} u_1(x_1^*)}$$

Donc, sous les hypothèses du second théorème du bien-être, un optimum de Pareto x^* peut être *décentralisé* comme un équilibre concurrentiel au sens suivant. Il est possible d'effectuer des transferts $(t_i)_{i=1,...,I} \in \mathbb{R}^{LI}$ sur les dotations initiales $(e_i)_{i=1,...,I}$ avec $\sum_{i=1}^{I} t_i = 0$ de manière telle que si on annonce aux agents économiques le système de prix p^*, la maximisation de l'utilité sous contrainte budgétaire par les consommateurs conduit les agents à l'équilibre concurrentiel (p^*, x^*) de l'économie $(X_i, u_i, e_i + t_i)_{i=1,...,I}$ où les choix des consommateurs coïncident avec l'optimum de Pareto x^*. Naturellement, cette redistribution ne doit pas modifier la richesse individuelle déterminée par le prix p^* et x_i^* (voir la Proposition 18), c'est-à-dire :

$$p^* \cdot (e_i + t_i) = p^* \cdot x_i^* \;\; \forall i = 1, ..., I$$

Chapitre 5

Les effets externes

5.1 La nature des externalités

En suivant Laffont (1988), nous donnons la définition suivante.

Définition 30 *Une externalité est chaque "effet indirect" qu'une activité de consommation ou de production a sur les préférences individuelles, sur les possibilités de consommation ou de production.*

Par "effet indirect", il faut entendre deux choses :

1. l'effet est créé par un agent économique différent de celui qui est affecté,
2. l'effet n'est pas produit par l'intermédiaire du système de prix.

Dans ce cas le système de prix ne joue que le rôle d'égalisation de l'offre et de la demande. Par contre, les effets indirects qui passent par l'intermédiaire du système de prix sont dits *externalités pécuniaires.*

La Définition 30 montre que les externalités requièrent une nouvelle description des caractéristiques des agents économiques, c'est-à-dire des préférences, des ensembles de consommation ou des ensembles de production.

5.2 Economie d'échange avec externalités

Une économie d'échange avec externalités comprend :

- Un nombre fini L de biens indicés par $\ell = 1, ..., L$. Les indices correspondant aux biens sont des indices supérieurs. $\mathbb{R}^L$ est l'espace des biens.

- Un nombre fini I de consommateurs indicés par $i = 1, ..., I$. Les indices correspondant aux consommateurs sont des indices inférieurs.

- $x_i := (x_i^1, ..., x_i^\ell, ..., x_i^L) \in \mathbb{R}^L$ dénote une consommation générique du consommateur i.

- $x_{-i} := (x_h)_{h \neq i} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_I) \in \mathbb{R}^{L(I-1)}$ dénote des consommations génériques de tous les consommateurs différents de i.

- $x := (x_1, ..., x_i, ..., x_I) \in \mathbb{R}^{LI}$ dénote des consommations génériques de tous les consommateurs.

- Chaque consommateur i est caractérisé par :
  1. un ensemble de consommation $X_i \subseteq \mathbb{R}^L$. Dans ce cours, l'ensemble de consommation de chaque consommateur sera identifié à l'orthant positif de l'espace des biens, c'est-à-dire :
  $$X_i := \mathbb{R}^L_+ \text{ pour tout } i = 1, ..., I$$
  2. des préférences représentées soit par une relation binaire $\succsim_i$ sur $\prod_{i=1}^{I} X_i$ transitive et complète, soit par une fonction d'utilité u_i, c'est-à-dire une fonction telle que
  $$(x_i, x_{-i}) \succsim_i (\overline{x}_i, \overline{x}_{-i}) \Longleftrightarrow u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(\overline{x}_i, \overline{x}_{-i})$$
  3. une dotation initiale de biens $e_i \in \mathbb{R}^L$.

Remarque 31 *Nous remarquons que de façon plus générale, lorsque les possibilités de consommation sont aussi affectées par l'environnement économique, alors l'ensemble de consommation $X_i \subseteq \mathbb{R}^L$ devient une correspondance de* *consommation X_i de $\mathbb{R}^{L(I-1)}$ dans $\mathbb{R}^L$ qui associe aux niveaux de consommation des autres consommateurs $x_{-i} \in \mathbb{R}^{L(I-1)}$ un ensemble de consommations possibles pour le consommateur i :*

$$X_i(x_{-i}) \subseteq \mathbb{R}^L$$

Une économie d'échange avec externalités est dénotée comme dans le Chapitre 3. La différence entre une économie d'échange et une économie d'échange avec externalités est que dans la deuxième les préférences individuelles peuvent être influencées par l'*environnement économique*, c'est-à-dire par les choix de consommation des autres consommateurs.

Soit $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,\ldots,I}$ une économie d'échange avec externalités. Vu que dans les économies d'échange avec externalités que nous considérons, les externalités ne jouent qu'au niveau des préférences, il est évident que les notions d'allocation et d'allocation réalisable sont les mêmes de celles données dans une économie d'échange sans externalités (voir les Définitions 11 et 12). Nous dénotons avec A l'ensemble des allocations réalisables de l'économie $\mathcal{E}$.

5.3 Équilibre concurrentiel avec externalités

Soit $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,\ldots,I}$ une économie d'échange avec externalités. Le concept d'équilibre concurrentiel suivant est un *concept d'équilibre à la Nash.*

Soient $p \in \mathbb{R}^L_+$ un système de prix et $x_{-i} \in \prod_{h \neq i} X_h$ des consommations possibles pour tous les consommateurs différents de i. Le problème de maximisation du consommateur i à (p, x_{-i}) donné est :

$$\begin{array}{ll} \max & u_i(x_i, x_{-i}) \\ x_i \in \mathbb{R}^L & \\ & x_i \in X_i \\ & p \cdot x_i \leq p \cdot e_i \end{array} \tag{5.1}$$

Définition 32 (Équilibre concurrentiel avec externalités). *Un équilibre concurrentiel de l'économie $\mathcal{E}$ est (p^*, x^*) où $p^* \in \mathbb{R}^L_+$ et $x^* := (x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_I^*)$ sont un système de prix et une allocation tels que :*

1. *pour tout $i = 1, ..., I$, x_i^* est une solution du problème (5.1) à (p^*, x_{-i}^*), c'est-à-dire du problème :*

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_i \in \mathbb{R}^L} & u_i(x_i, x_{-i}^*) \\ & x_i \in X_i \\ & p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot e_i \end{array} \tag{5.2}$$

2. *la demande globale égale l'offre globale :*

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{i=1}^{I} e_i$$

Comme dans le cas sans externalités, si les préférences d'au moins un consommateur sont strictement croissantes *par rapport à sa propre consommation*, alors le système de prix est strictement positif.

Proposition 33 (Propriétés d'un équilibre concurrentiel). *Soit $(p^*, x^*) \in \mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}_+^{LI}$ un équilibre concurrentiel de l'économie $\mathcal{E}$.*

1. **(Normalisation du prix d'un bien).** *Pour tout $t > 0$, (tp^*, x^*) est un équilibre concurrentiel de l'économie $\mathcal{E}$.*
2. *S'il existe un consommateur h tel que pour tout $x_{-h} \in \prod_{i \neq h} X_i$ la fonction d'utilité $u_h(\cdot, x_{-h})$ est croissante, alors le prix d'équilibre est non nul, c'est-à-dire $p^* > 0$. S'il existe un consommateur h tel que pour tout $x_{-h} \in \prod_{i \neq h} X_i$ la fonction d'utilité $u_h(\cdot, x_{-h})$ est strictement croissante, alors le prix d'équilibre est strictement positif, c'est-à-dire $p^* \gg 0$.*
3. *Pour tout $i = 1, ..., I$, $p^* \cdot x_i^* = p^* \cdot e_i$.*

Comme dans le cas sans externalités, si le **système de prix est strictement positif**, alors il suffit que la demande globale égale l'offre globale pour $L - 1$ biens pour que, à l'équilibre, la demande globale égale l'offre globale pour tous les biens. En utilisant la Définition 32 et les théorèmes de Karush–Kuhn–Tucker (voir Chapitre 6), nous pouvons caractériser les **équilibres strictement positifs** en termes de conditions du premier ordre.

Théorème 34 (Caractérisation des équilibres). *Soit* $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ *une économie d'échange avec externalités où pour tout* $i = 1, ..., I$ *:*

- *pour tout* $x_{-i} \in \mathbb{R}^{L(I-1)}_{++}$, $u_i(\cdot, x_{-i})$ *est différentiable et quasi-concave sur* $\mathbb{R}^L_{++}$,
- *pour tout* $x_{-i} \in \mathbb{R}^{L(I-1)}_{++}$, $\nabla_{x_i} u_i(x_i, x_{-i}) \gg 0$ *pour tout* $x_i \gg 0$,
- $e_i > 0$.

Alors $(p^*, x^*) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}^{LI}_{++}$ *est un équilibre concurrentiel de l'économie* $\mathcal{E}$ *si et seulement si il existe* $\lambda^* = (\lambda^*_1, ..., \lambda^*_i, ..., \lambda^*_I) \in \mathbb{R}^I_{++}$ *tel que :*

$$\forall\, i = 1, ..., I \ : \begin{cases} \nabla_{x_i} u_i(x^*_i, x^*_{-i}) = \lambda^*_i p^* \\ \\ p^* \cdot x^*_i = p^* \cdot e_i \end{cases} \tag{5.3}$$

et pour $k \in \{1, ..., L\}$ *donné,*

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^{*\ell} = \sum_{i=1}^{I} e_i^\ell \quad \forall\, \ell = 1, ..., L \text{ où } \ell \neq k \tag{5.4}$$

5.3.1 Externalités séparables

Dans la suite, nous allons montrer que si les externalités sont *additivement séparables* alors l'ensemble des équilibres coïncide avec celui là où ils n'existent pas d'effets externes.

Une économie d'échange avec externalités $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ est une économie avec **externalités additivement séparables** si pour tout $i = 1, ..., I$:

$$u_i(x_i, x_{-i}) := \tilde{u}_i(x_i) + v_i(x_{-i})$$

Soit $\mathcal{E}^{SE} := (X_i, \tilde{u}_i, e_i)_{i=1,...,I}$ l'économie sans externalités obtenue à partir de $\mathcal{E}$. La seule différence entre $\mathcal{E}^{SE}$ et $\mathcal{E}$ sont les préférences du consommateur i qui dans l'économie $\mathcal{E}^{SE}$ sont données par $\tilde{u}_i$.

Proposition 35 (Équilibre concurrentiel avec externalités séparables). *Soit* $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ *économie d'échange avec externalités additivement séparables où pour tout* $i = 1, ..., I$, $\tilde{u}_i$ *est différentiable, quasi-concave sur*

$\mathbb{R}^L_{++}$ *et* $\nabla \tilde{u}_i(x_i) \gg 0$ *pour tout* $x_i \gg 0$. *Alors,* $(p^*, x^*) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}^{LI}_{++}$ *est un équilibre concurrentiel de l'économie* $\mathcal{E}$ *si, et seulement si, il est un équilibre concurrentiel de l'économie* $\mathcal{E}^{SE}$.

Démonstration. D'abord, nous remarquons que la seule différence entre les définitions d'équilibre concurrentiel dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^{SE}$ est le problème de maximisation du consommateur i (voir Définitions 14 et 32). C'est-à-dire dans $\mathcal{E}$ pour tout $i = 1, ..., I$, x_i^* est une solution du problème

$$\begin{array}{ll} \max & \tilde{u}_i(x_i) + v_i(x^*_{-i}) \\ x_i \in \mathbb{R}^L_{++} & \\ & p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot e_i \end{array} \tag{5.5}$$

à $(p^*, x^*_{-i}) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}^{L(I-1)}_{++}$ donné. Alors que, dans $\mathcal{E}^{SE}$ pour tout $i = 1, ..., I$, x_i^* est une solution du problème

$$\begin{array}{ll} \max & \tilde{u}_i(x_i) \\ x_i \in \mathbb{R}^L_{++} & \\ & p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot e_i \end{array} \tag{5.6}$$

à $p^* \in \mathbb{R}^L_{++}$ donné. Finalement, il suffit d'observer que les conditions de Karush–Kuhn–Tucker associées aux problèmes (5.5) et (5.6) sont nécessaires et suffisantes et que les conditions de Karush–Kuhn–Tucker associées aux problèmes (5.5) et (5.6) sont les mêmes. ■

5.4 Allocation optimale au sens de Pareto

Les concept suivant est une adaptation naturelle du concept donné dans le Paragraphe 3.3.

Définition 36 (Allocation optimale au sens de Pareto). *Une allocation* $x^* = (x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_I^*)$ *est un optimum de Pareto de l'économie* $\mathcal{E}$ *si*

1. x^* *est une allocation réalisable et*
2. *il n'existe pas une autre allocation réalisable* $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_i, ..., \widetilde{x}_I)$ *telle que :*

$$u_i(\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{-i}) \geq u_i(x_i^*, x^*_{-i}) \text{ pour tout } i = 1, ..., I \text{ et}$$

$$u_h(\widetilde{x}_h, \widetilde{x}_{-h}) > u_h(x_h^*, x^*_{-h}) \text{ pour au moins un } h$$

Comme dans le Paragraphe 3.3, nous sommes intéressés à donner une caractérisation complète des optima de Pareto en termes de problèmes de maximisation avec contraintes. La proposition suivante est analogue à la Proposition 21 du Paragraphe 3.3.

Proposition 37 $x^* = (x^* = (x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_I^*))$ *est un optimum de Pareto de* $\mathcal{E}$ *si et seulement si* x^* *est une solution du problème de maximisation suivant* ***pour tout*** $h = 1, ..., I$ *:*

$$\begin{array}{ll} \max & u_h(x_h, x_{-h}) \\ x \in \mathbb{R}^{LI} & \\ & x_i \in X_i, \ \forall\, i = 1, ..., I \\ & u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(x_i^*, x_{-i}^*), \ \forall\, i \neq h \\ & \sum_{i=1}^{I} x_i = \sum_{i=1}^{I} e_i \end{array} \tag{5.7}$$

Démonstration. Si x^* est un optimum de Pareto, alors x^* est une allocation réalisable. Si x^* n'est pas une solution du problème (5.7) pour au moins un h, alors il existe $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_i, ..., \widetilde{x}_I) \in \prod_{i=1}^{I} X_i$ tel que $\sum_{i=1}^{I} \widetilde{x}_i = \sum_{i=1}^{I} e_i$, $u_i(\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{-i}) \geq u_i(x_i^*, x_{-i}^*)$ pour tout $i \neq h$ et $u_h(\widetilde{x}_h, \widetilde{x}_{-h}) > u_h(x_h^*, x_{-h}^*)$. Alors x^* ne peut pas être un optimum de Pareto.

Vice versa, nous supposons que x^* est une solution du problème (5.7) pour tout $h = 1, ..., I$. Si x^* n'est pas un optimum de Pareto, alors il existe une allocation réalisable $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_i, ..., \widetilde{x}_I)$ tel que $u_i(\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{-i}) \geq u_i(x_i^*, x_{-i}^*)$ pour tout $i = 1, ..., I$ et $u_h(\widetilde{x}_h, \widetilde{x}_{-h}) > u_h(x_h^*, x_{-h}^*)$ pour au moins un h. Alors x^* ne peut pas être une solution du problème (5.7). ■

En général, dans le cas avec externalités, même quand les fonctions d'utilité des consommateurs sont continues et strictement croissantes par rapport à leur propre consommation, il n'est pas évident d'avoir une caractérisation complète des optima de Pareto en termes d'**un seul** problème de maximisation avec contraintes comme dans le cas sans externalités.

Pourquoi ?

Nous rappelons que, dans le cas sans externalités, la Proposition 22 est la proposition qui nous permet d'avoir une caractérisation complète des optima de Pareto en termes de problème de maximisation d'un seul consommateur. La démonstration de la Proposition 22 est basée sur le fait que :

1. d'un côté, par continuité des préférences, il est possible de retirer un peu de bien ℓ au consommateur h, qui est strictement mieux en $\widetilde{x}_h$, de manière qu'il continue à être strictement mieux et
2. de l'autre côté, vu que les préférences sont strictement croissantes, il est possible de donner au consommateur 1 la quantité de bien ℓ retirée au consommateur h de manière que le consommateur 1 préfère strictement la nouvelle consommation.

Dans le cas avec externalités, vu que l'utilité du consommateur 1 pourrait dépendre de la consommation du bien ℓ du consommateur h, si on retire un peu de bien ℓ au consommateur h et on le donne au consommateur 1, il n'est pas forcement vrai que le consommateur 1 préfère strictement la nouvelle allocation (même si les préférences sont strictement croissantes par rapport à sa propre consommation).

Nous remarquons que si dans l'économie il existe un consommateur h et un bien ℓ pour lequel les préférences du consommateur h ne sont pas influencées par la consommation du bien ℓ des autres, alors banalement il est possible de dépasser les difficultés mises en évidence et donc on peut avoir une caractérisation analogue à celle là donnée dans la Proposition 22 en termes d'**un seul problème** de maximisation avec contraintes.

Proposition 38 *Soit* $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,...,I}$ *une économie d'échange avec externalités. Si pour tout* $i = 1, ..., I$ *:*

1. u_i *est continue*
2. *pour tout* $x_{-i} \in \mathbb{R}_+^{L(I-1)}$, $u_i(\cdot, x_{-i})$ *est strictement croissante,*

et ils existent un consommateur $h \in \{1, ..., I\}$ *et un bien* $\ell \in \{1, ..., L\}$ *tels que* u_h *ne dépend pas de* $(x_i^\ell)_{i \neq h}$*, alors* x^* *est un optimum de Pareto de l'économie* $\mathcal{E}$ *si et seulement si* x^* *est une solution du problème de maximisation (5.7).*

5.5 Conditions d'optimalité de Pareto avec externalités : un exemple

Dans la suite nous considérons un exemple et en utilisant les résultats de la Proposition 38 et du Chapitre 6, nous donnons les conditions d'optimalité de Pareto en termes de conditions du premier ordre (voir les conditions (5.10) en bas).

Soit $\mathcal{E} = (X_i, u_i, e_i)_{i=1,\ldots,I}$ une économie d'échange avec externalités où $L = 2$ biens, $I = 2$ consommateurs et $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^2_{++}$. Les préférences de chaque consommateur sont influencées par la consommation du bien 1 de l'autre consommateur, donc les fonctions d'utilité sont

$$u_1(x_1, x_2^1) \quad \text{et} \quad u_2(x_2, x_1^1)$$

Donc il existe un bien, le bien 2, pour le quel l'externalité ne passe pas.

1. Les fonctions d'utilité u_1 et u_2 sont différentiables et quasi-concaves,
2. pour tout $x_2^1 \in \mathbb{R}_{++}$, $\nabla_{x_1} u_1(x_1, x_2^1) \gg 0$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}^2_{++}$,
3. pour tout $x_1^1 \in \mathbb{R}_{++}$, $\nabla_{x_2} u_2(x_2, x_1^1) \gg 0$ pour tout $x_2 \in \mathbb{R}^2_{++}$.

Donc, la fonction d'utilité de chaque consommateur est strictement croissante par rapport à sa propre consommation.

En utilisant la Proposition 38, il est possible d'avoir une caractérisation complète des optima de Pareto en termes du problème (5.7) pour $h = 1$. En fait, il suffit de prendre $h = 1$ et $\ell = 2$. Donc nous avons que $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ est un optimum de Pareto si et seulement si $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ est une solution du problème de maximisation suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & u_1(x_1, x_2^1) \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^4_{++} & \\ & u_2(x_2, x_1^1) - u_2(x_2^*, x_1^{*1}) \geq 0 \\ & -x_1^1 - x_2^1 + e_1^1 + e_2^1 \geq 0 \\ & -x_1^2 - x_2^2 + e_1^2 + e_2^2 \geq 0 \end{array} \tag{5.8}$$

Nous remarquons que les conditions de Karush–Kuhn–Tucker associées au problème (5.8) sont nécessaires et suffisantes. En fait la condition de rang du Théorème 40 est satisfaite parce que pour tout $(x_1^2, x_2^2, x_2^1) \in \mathbb{R}^3_{++}$ la matrice suivante a déterminant différent de zéro vu que $\nabla_{x_2} u_2(x_2, x_1^1) \gg 0$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1^2 & x_2^2 & x_2^1 \end{array} \\ \begin{array}{c} -x_1^2 - x_2^2 + e_1^2 + e_2^2 \\ u_2(x_2, x_1^1) - u_2(x_2^*, x_1^{*1}) \\ -x_1^1 - x_2^1 + e_1^1 + e_2^1 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & D_{x_2^2} u_2 & D_{x_2^1} u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Les hypothèses du Théorème 41 sont satisfaites également. Soient λ_2 le multiplicateurs de Lagrange associé à la contrainte

$$u_2(x_2, x_1^1) - u_2(x_2^*, x_1^{*1}) \geq 0$$

et γ^ℓ le multiplicateurs de Lagrange associé à la contrainte

$$-x_1^\ell - x_2^\ell + e_1^\ell + e_2^\ell \geq 0$$

pour tout $\ell = 1, 2$. Les conditions de Karush–Kuhn–Tucker associées au problème (5.8) sont :

$$\begin{cases} (1.1) \quad D_{x_1^1} u_1(x_1, x_2^1) + \lambda_2 D_{x_1^1} u_2(x_2, x_1^1) - \gamma^1 = 0 & \leftarrow \ (x_1^1) \\ (1.2) \quad D_{x_1^2} u_1(x_1, x_2^1) - \gamma^2 = 0 & \leftarrow \ (x_1^2) \\ (2.1) \quad D_{x_2^1} u_1(x_1, x_2^1) + \lambda_2 D_{x_2^1} u_2(x_2, x_1^1) - \gamma^1 = 0 & \leftarrow \ (x_2^1) \\ (2.2) \quad \lambda_2 D_{x_2^2} u_2(x_2, x_1^1) - \gamma^2 = 0 & \leftarrow \ (x_2^2) \\ \qquad\quad \lambda_2 \geq 0, \ \gamma^1 \geq 0, \ \gamma^2 \geq 0 & \\ \qquad\quad u_2(x_2, x_1^1) - u_2(x_2^*, x_1^{*1}) \geq 0 & \\ \qquad\quad -x_1^1 - x_2^1 + e_1^1 + e_2^1 \geq 0 & \\ \qquad\quad -x_1^2 - x_2^2 + e_1^2 + e_2^2 \geq 0 & \\ \qquad\quad \lambda_2(u_2(x_2, x_1^1) - u_2(x_2^*, x_1^{*1})) = 0 & \\ \qquad\quad \gamma^1(-x_1^1 - x_2^1 + e_1^1 + e_2^1) = 0 & \\ \qquad\quad \gamma^2(-x_1^2 - x_2^2 + e_1^2 + e_2^2) = 0 & \end{cases}$$

Des équations (1.2) et (2.2) nous obtenons

$$\gamma^2 = D_{x_1^2} u_1(x_1, x_2^1) > 0 \text{ et } \gamma^2 = \lambda_2 D_{x_2^2} u_2(x_2, x_1^1) \tag{5.9}$$

Donc $\lambda_2 > 0$ vu que $\gamma^2 > 0$.

En divisent les équations (1.1) et (2.1) par $\gamma^2 > 0$ nous avons

$$\frac{D_{x_1^1} u_1(x_1, x_2^1)}{\gamma^2} + \frac{\lambda_2 D_{x_1^1} u_2(x_2, x_1^1)}{\gamma^2} = \frac{\gamma^1}{\gamma^2}$$

et

$$\frac{D_{x_2^1} u_1(x_1, x_2^1)}{\gamma^2} + \frac{\lambda_2 D_{x_2^1} u_2(x_2, x_1^1)}{\gamma^2} = \frac{\gamma^1}{\gamma^2}$$

Alors, en remplaçant dans les premiers membres γ^2 par son expression donnée par les deux équations en (5.9) nous avons que

$$\frac{D_{x_1^1} u_1(x_1, x_2^1)}{D_{x_1^2} u_1(x_1, x_2^1)} + \frac{\lambda_2 D_{x_1^1} u_2(x_2, x_1^1)}{\lambda_2 D_{x_2^2} u_2(x_2, x_1^1)} = \frac{\gamma^1}{\gamma^2}$$

et

$$\frac{D_{x_2^1}u_1(x_1,x_2^1)}{D_{x_1^2}u_1(x_1,x_2^1)}+\frac{\lambda_2 D_{x_2^1}u_2(x_2,x_1^1)}{\lambda_2 D_{x_2^2}u_2(x_2,x_1^1)}=\frac{\gamma^1}{\gamma^2}$$

Donc, nous obtenons la relation suivante qui caractérise de manière complète les allocations réalisables qui sont des optima de Pareto de cette économie en termes de conditions du premier ordre.

$$\frac{D_{x_1^1}u_1(x_1,x_2^1)}{D_{x_1^2}u_1(x_1,x_2^1)}+\frac{D_{x_1^1}u_2(x_2,x_1^1)}{D_{x_2^2}u_2(x_2,x_1^1)}=\frac{D_{x_2^1}u_1(x_1,x_2^1)}{D_{x_1^2}u_1(x_1,x_2^1)}+\frac{D_{x_2^1}u_2(x_2,x_1^1)}{D_{x_2^2}u_2(x_2,x_1^1)} \tag{5.10}$$

Nous remarquons que lorsqu'il n'y a pas d'externalités, c'est-à-dire

$$D_{x_1^1}u_2(x_2,x_1^1)=D_{x_2^1}u_1(x_1,x_2^1)=0$$

pour tout $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^4_{++}$, alors nous retrouvons la condition (3.13) donnée dans la Proposition 26.

Chapitre 6

Annexe : Les théorèmes de Karush–Kuhn–Tucker

Dans ce chapitre nous allons donner des conditions nécessaires et suffisants, en termes de conditions du premier ordre, pour résoudre un problème de maximisation avec contraintes. Dans la suite nous supposons que :

1. C est un sous-ensemble ouvert et convexe de $\mathbb{R}^n$.
2. Les fonctions suivantes f et g_j pour tout $j = 1, ..., m$ sont différentiables.

$$f : x \in C \to f(x) \in \mathbb{R}$$
$$g_j : x \in C \to g_j(x) \in \mathbb{R}, \ \forall j = 1, ..., m$$

Problème à résoudre :

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ x \in C & \\ & g_j(x) \geq 0, \ \forall j = 1, ..., m \end{array} \tag{6.1}$$

où f est la fonction objectif, g_j avec $j = 1, ..., m$ sont les fonctions contraintes d'inégalité.

Les conditions de Karush–Kuhn–Tucker associées au problème (6.1) sont :

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x) = 0 \\ g_j(x) \geq 0, \ \forall j = 1, ..., m \\ \lambda_j \geq 0, \ \forall j = 1, ..., m \\ \lambda_j g_j(x) = 0, \ \forall j = 1, ..., m \end{cases} \tag{6.2}$$

où $\lambda_j \in \mathbb{R}$ avec $j = 1, ..., m$, sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux fonctions contraintes d'inégalité g_j avec $j = 1, ..., m$.

Définition 39 *Soit $x^* \in C$, nous disons que la contrainte j est **saturée** en x^* if $g_j(x^*) = 0$.*

Nous dénotons :

1. *$S(x^*) := \{j = 1, ..., m : g_j(x^*) = 0\}$ l'ensemble des contraintes saturées en x^*,*
2. *$m^* \leq m$ le nombre d'éléments de $S(x^*)$ et*
3. *$g^* := (g_j)_{j \in S(x^*)}$*

Théorème 40 (Karush–Kuhn–Tucker sont conditions nécessaires) *Si x^* est une solution du problème (6.1) et si une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. *pour tout $j = 1, ..., m$, g_j est une fonction **linéaire ou affine**,*
2. **(Condition de Slater)** *il existe $\bar{x} \in C$ tel que $g_j(\bar{x}) > 0$ pour tout $j = 1, ..., m$ et pour tout $j = 1, ..., m$:*
   - *g_j est une fonction **quasi-concave** et $\nabla g_j(x) \neq 0$ pour tout $x \in C$ **ou***
   - *g_j est une fonction **concave**,*
3. **(Condition de rang)** $\text{rg J}g^*(x^*) = m^* \leq n$

alors il existe $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_j^*, ..., \lambda_m^*) \in \mathbb{R}^m$ tel que (x^*, λ^*) satisfait les conditions de Karush–Kuhn–Tucker (6.2).

Théorème 41 (Karush–Kuhn–Tucker sont conditions suffisantes) *Si f est une fonction **quasi-concave** et $\nabla f(x) \neq 0$ pour tout $x \in C$ **ou** f*

*est une fonction **concave**, g_j est une fonction **quasi-concave** pour tout $j = 1, ..., m$ et il existe $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_j^*, ..., \lambda_m^*) \in \mathbb{R}^m$ tel que (x^*, λ^*) satisfait les conditions de Karush–Kuhn–Tucker (6.2), alors x^* est une solution du problème (6.1).*

6.1 Concavité et quasi-concavité

Dans la suite nous supposons que :

1. C est un sous-ensemble **convexe** de $\mathbb{R}^n$.
2. f est une fonction de C dans $\mathbb{R}$.

6.1.1 Concavité

Définition 42 (Fonction concave). *f est concave si $\forall\ t \in [0,1]$ et $\forall\ x,\ x^{'} \in C$*

$$f(tx + (1-t)x^{'}) \geq tf(x) + (1-t)f(x^{'})$$

Proposition 43 *f est concave si et seulement si l'ensemble suivant est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

$$\{(x, \alpha) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\}$$

Proposition 44 *C est un sous-ensemble **ouvert** de $\mathbb{R}^n$ et f est **différentiable**. f est concave si et seulement si $\forall\ x,\ x^{'} \in C$*

$$\nabla f(x) \cdot (x^{'} - x) \geq f(x^{'}) - f(x)$$

Proposition 45 *C est un sous-ensemble **ouvert** de $\mathbb{R}^n$ et f est **deux fois continuement différentiable**. f est concave si et seulement si pour tout $x \in C$ la matrice Hessienne $\mathrm{H}f(x)$ est semi-définie négative, c'est-à-dire si pour tout $x \in C$*

$$v\mathrm{H}f(x)v^T \leq 0,\ \forall\ v \in \mathbb{R}^n$$

Définition 46 (Fonction strictement concave). *f est strictement concave si $\forall\ t \in]0,1[$ et $\forall\ x,\ x^{'} \in C$ où $x \neq x^{'}$*

$$f(tx + (1-t)x^{'}) > tf(x) + (1-t)f(x^{'})$$

Proposition 47 *C est un sous-ensemble* ***ouvert*** *de* $\mathbb{R}^n$ *et f est* ***différentiable****. f est strictement concave si et seulement si* $\forall\, x,\ x^{'} \in C$ *où* $x \neq x^{'}$

$$\nabla f(x) \cdot (x^{'} - x) > f(x^{'}) - f(x)$$

Proposition 48 *C est un sous-ensemble* ***ouvert*** *de* $\mathbb{R}^n$ *et f est* ***deux fois continuement différentiable****. Si pour tout $x \in C$ la matrice Hessienne* $\mathrm{H}f(x)$ *est définie négative, c'est-à-dire si pour tout $x \in C$*

$$v\mathrm{H}f(x)v^T < 0,\ \forall\, v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0$$

alors f est strictement concave.

6.1.2 Quasi-concavité

Définition 49 (Fonction quasi-concave). *f est quasi-concave si* $\forall\ t \in [0, 1]$ *et* $\forall\, x,\ x^{'} \in C$

$$f(tx + (1-t)x^{'}) \geq \min\{f(x), f(x^{'})\}$$

Proposition 50 *f est quasi-concave si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ les ensembles suivants sont sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$.*

$$\{x \in C : f(x) \geq \alpha\}$$

Proposition 51 *C est un sous-ensemble* ***ouvert*** *de* $\mathbb{R}^n$ *et f est* ***différentiable****. f est quasi-concave si et seulement si* $\forall\, x,\ x^{'} \in C$

$$f(x^{'}) - f(x) \geq 0 \Longrightarrow \nabla f(x) \cdot (x^{'} - x) \geq 0$$

Proposition 52 *C est un sous-ensemble* ***ouvert*** *de* $\mathbb{R}^n$ *et f est* ***différentiable****. Si f est quasi-concave et $\nabla f(x) \neq 0$ pour tout $x \in C$, alors* $\forall\, x,\ x^{'} \in C$ *où* $x \neq x^{'}$

$$f(x^{'}) - f(x) > 0 \Longrightarrow \nabla f(x) \cdot (x^{'} - x) > 0$$

Proposition 53 *C est un sous-ensemble* ***ouvert*** *de* $\mathbb{R}^n$ *et f est* ***deux fois continuement différentiable****. Si f est quasi-concave, alors pour tout $x \in C$ la matrice Hessienne* $\mathrm{H}f(x)$ *est semi-définie négative sur* $\mathrm{Ker}\nabla f(x)$*, c'est-à-dire si pour tout $x \in C$ et pour tout $v \in \mathbb{R}^n$*

$$\nabla f(x) \cdot v = 0 \Longrightarrow v\mathrm{H}f(x)v^T \leq 0$$

Définition 54 (Fonction strictement quasi-concave). *f est strictement quasi-concave si $\forall\ t \in]0,1[$ et $\forall\ x,\ x^{'} \in C$ où $x \neq x^{'}$*

$$f(tx + (1-t)x^{'}) > \min\{f(x), f(x^{'})\}$$

Proposition 55 *C est un sous-ensemble **ouvert** de $\mathbb{R}^n$ et f est **différentiable**.*

1. *Si $\forall\ x,\ x^{'} \in C$ où $x \neq x^{'}$*

$$f(x^{'}) - f(x) \geq 0 \Longrightarrow \nabla f(x) \cdot (x^{'} - x) > 0$$

alors f est strictement quasi-concave.

2. *Si f est strictement quasi-concave et $\nabla f(x) \neq 0$ pour tout $x \in C$, alors $\forall\ x,\ x^{'} \in C$ où $x \neq x^{'}$*

$$f(x^{'}) - f(x) \geq 0 \Longrightarrow \nabla f(x) \cdot (x^{'} - x) > 0$$

Proposition 56 *C est un sous-ensemble **ouvert** de $\mathbb{R}^n$ et f est **deux fois continuement différentiable**. Si pour tout $x \in C$ la matrice Hessienne $\mathrm{H}f(x)$ est définie négative sur $\mathrm{Ker}\nabla f(x)$, c'est-à-dire si pour tout $x \in C$ et pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ où $v \neq 0$*

$$\nabla f(x) \cdot v = 0 \Longrightarrow v\mathrm{H}f(x))v^T < 0$$

alors f est strictement quasi-concave.

Remarque 57 *En général nous avons que :*

$$\begin{array}{ccccc}
f \text{ linéaire ou affine} & \Rightarrow & f \text{ concave} & \Leftarrow & f \text{ strictement concave} \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & f \text{ quasi-concave} & \Leftarrow & f \text{ strictement quasi-concave}
\end{array}$$

Bibliographie

Arrow, K.-J., Hurwicz, L., Uzawa, H., 1958. Studies in linear and non-linear programming. Stanford University Press. Stanford California.

Bonnisseau, J.-M., 2006. Notes du Cours de Microéconomie, Université Paris 1 Panthéon–Sorbonne.

Cass, D., 2000. Non-linear Programming for Economists. Notes du Cours du Ph.D. Program in Economics, University of Pennsylvania.

Laffont, J.-J., 1988. Fondements de l'Economie Publique. Economica.

Salanié, B., 1998. Microéconomie. Les défaillances du marché. Economica.

Tallon, J.-M., 1997. Equilibre général. Une introduction. Librairie Vuibert.