Croissance – examen final – janvier 2022

Corrigé

Exercice 1 (issu de l'exercice 4 du TD 2)

1. Pour écrire de la fonction de production sous forme intensive (en unités de travail efficace) on divise la fonction de production de l'économie par AL, la quantité de travail efficace :

$$\frac{Y}{AL} = \frac{K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}}{AL}$$

En s'appuyant sur les propriétés des fonctions puissances on peut alors écrire :

$$\frac{Y}{AL} = \frac{K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}}{(AL)^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}}$$

En effet, $(AL)^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} = (AL)^{\alpha+1-\alpha}$. En simplifiant on obtient :

$$\frac{Y}{AL} = \left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha}$$

C'est-à-dire :

$$\hat{y} = \hat{k}^{\alpha}$$

2. Détermination de l'équation dynamique du modèle avec progrès technique

On cherche à exprimer la loi de variation de $\hat{k}$ en fonction des paramètres du modèle. Nous partons pour cela définition de cette grandeur :

$$\hat{k} = \frac{K}{AL}$$

Après transformation logarithmique on obtient :

$$ln\hat{k} = lnK - lnA - lnL$$

En dérivant cette expression par rapport à t on obtient :

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L}$$

Nous connaissons la loi de variation du stock de capital qui se définit ainsi :

$$\dot{K} = sY - \delta K$$

On peut donc écrire (en remplaçons les taux de croissance de *A* et *L* par les paramètres auxquels ils sont égaux par hypothèse) :

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{sY - \delta K}{K} - \gamma - n$$

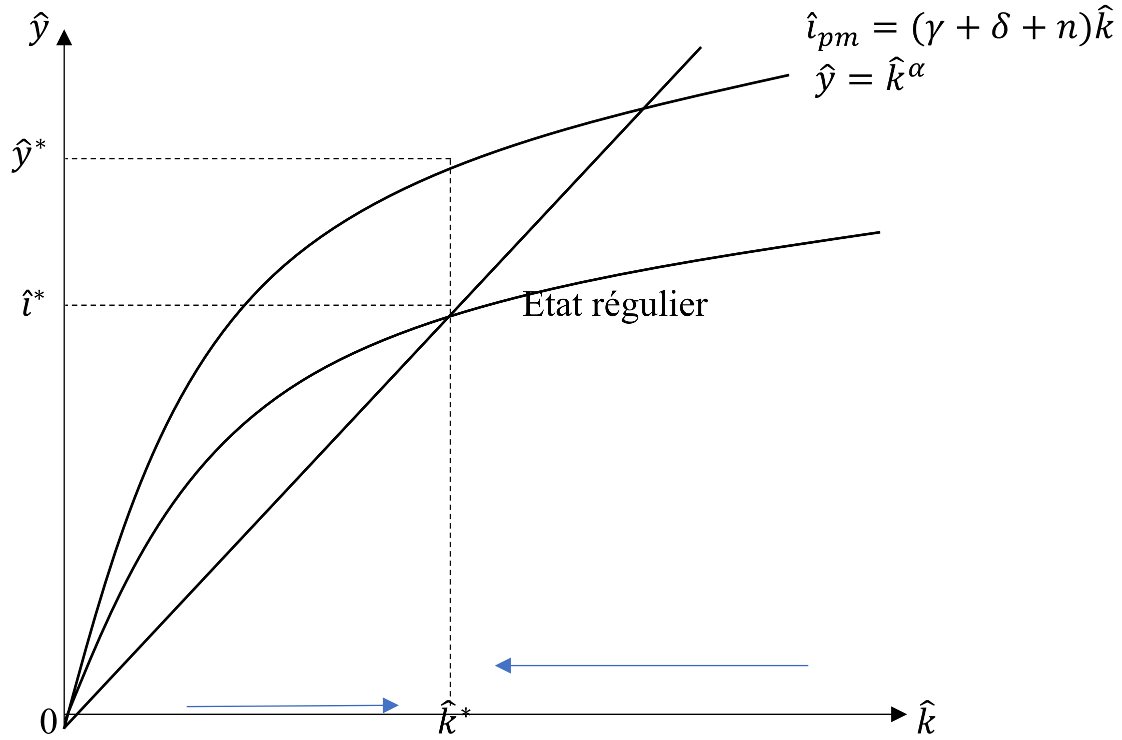
On multiplie ensuite les deux membres de l'équation par $\hat{k}$ et le tour est joué. On obtient :

$$\dot{\hat{k}} = \frac{sY}{K}\frac{K}{AL} - (\delta + \gamma + n)\hat{k}$$

Ou encore :

$$\dot{\hat{k}} = s\hat{k}^{\alpha} - (\delta + \gamma + n)\hat{k}$$

3. (0,5 points pour le graphique et 0,5 pour l'explication de la dynamique). L'équation dynamique qui précède montre que la variation du capital par unité de travail efficace dépend de l'écart entre l'investissement par unité de travail efficace et l'investissement de point mort correspondant. Si $\hat{k}$ est petit, l'investissement dépasse sa valeur de point mort et le capital par travailleur efficace $\hat{k}$ augmente. A mesure que l'investissement accroît $\hat{k}$, le revenu par travailleur efficace augmente et avec lui le montant total de l'investissement par unité de travail efficace. Mais comme la productivité marginale de $\hat{k}$ est décroissante, le revenu augmente de moins en moins et il en est de même pour l'investissement qui finit par rejoindre sa valeur de point mort. En effet, cette dernière augmente toujours au même rythme. L'économie converge ainsi vers un état régulier caractérisé par une valeur stationnaire de $\hat{k}$. Cette dynamique s'observe sur le schéma de Solow corrigé :



On peut illustrer la trajectoire de $ln\hat{y}$ ou utiliser un graphique qui montre l'évolution du taux de croissance du capital par travailleur efficace.

4. (0,5 point pour y* et 0,5 point pour c*) On commence par déterminer les valeurs d'état régulier de $\hat{k}^*$, $\hat{y}^*$. A l'état régulier, d'après la réponse précédente, on a :

$$s\hat{k}^{\alpha} - (\delta + \gamma + n)\hat{k} = 0$$

$$\frac{\hat{k}^{\alpha}}{\hat{k}} = \frac{\delta + \gamma + n}{s}$$

$$\hat{k}^{1-\alpha} = \frac{s}{\delta + \gamma + n}$$

$$\hat{k}^* = \left(\frac{s}{\delta + \gamma + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Compte tenu de la question 1, nous pouvons écrire :

$$\hat{y}^* = \left(\frac{s}{\delta + \gamma + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Mais $\hat{y} = \frac{y}{A}$, on peut donc écrire :

$$y^* = A\left(\frac{s}{\delta + \gamma + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Et par définition on a :

$$c^* = (1 - s)A\left(\frac{s}{\delta + \gamma + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

5. Taux de croissance de la production par travailleur et de la production absolue (0,5 point chacun)

D'après la question 1, on a :

$$\hat{y} = \hat{k}^\alpha$$

Compte tenu de la définition du revenu par travailleur efficace $\hat{y}$ (dans l'énoncé de l'exercice) on peut alors écrire :

$$y = A\hat{k}^\alpha$$

En procédant à une transformation logarithmique et en dérivant par rapport au temps on obtient :

$$g_y = g_A + \alpha g_{\hat{k}}$$

A long terme, comme nous l'avons vu dans la question 3, $g_{\hat{k}} = 0$. Le capital par unité de travail efficace est constant. On en déduit que le taux de croissance du revenu par travailleur est déterminé par le taux de croissance de l'efficacité du travail *A* c'est-à-dire par le rythme du progrès technique.

Par définition :

$$y = \frac{Y}{L}$$

D'où :

$$g_y = g_Y - g_L$$

On en déduit :

$$g_Y = n + \gamma$$

6. 0,5 point pour écrire la règle d'or dans le modèle avec progrès technique et 0,5 point pour en déduire s = alpha.

Règle d'or :

$$f'(\hat{k}_{or}) = \delta + \gamma + n$$

Mais

$$f'(\hat{k}_{or}) = \alpha\left(\hat{k}^*\right)^{\alpha-1} = \delta + \gamma + n$$

$$\hat{k}_{or} = \left(\frac{\alpha}{\delta + \gamma + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ceci implique $\alpha = s$.

6. Voir le cours. C’est une simple question de cours et il n’est pas demandé d’expliquer en détail comment on obtient la règle d’or. Par contre on attend que les étudiants explique comment on arrive à s = alpha.

7.

L’énoncé indique que dans notre économie $\alpha < s$. Ceci veut dire que le taux d’épargne est trop élevé de sorte que la consommation est inférieure à son niveau de règle d’or (qui est le plus élevé possible à l’état stationnaire).

Dans ce contexte, une hausse du taux d’épargne aura les effets attendus sur le revenu.

D’après la question 5 nous savons que :

$$g_y = g_A + \alpha g_{\hat{k}}$$

On peut montrer graphiquement (question 3), que la hausse du taux d’épargne fait pivoter la courbe d’investissement par unité de travail efficace et génère un écart positif entre investissement et investissement de point mort. Le capital par unité de travail efficace va donc augmenter jusqu’à atteindre une nouvelle valeur d’état régulier. Le taux de croissance du revenu s’élève donc au-delà du rythme du progrès technique à l’impact et ralenti ensuite de façon non linéaire pour revenir au niveau du progrès technique. Un graphique de ln *y* est attendu ici qui montre comment une trajectoire plus élevée est atteinte. (1 points)

Une autre façon de répondre est la suivante (ça ne change pas le résultat, c'est simplement un moyen de répondre sans passer par le log de *c* comme indiqué plus bas) :

« Avant le choc on est dans une situation où alpha<s et on est donc dans une situation où il y a trop d’épargne par rapport à la règle d'or (s=alpha) où la consommation est maximisée. Donc une augmentation ultérieure de *s* réduira nécessairement le niveau de consommation dans le nouvel état régulier.

C'est le résultat final au nouvel état stationnaire mais pour étudier la dynamique précise de la consommation il faut partir de l'équation c=y-sy et prendre en compte qu'une augmentation de s d'une part réduit la part du revenu qui peut être consommé, tandis que d'autre part l’augmentation de s augmente l'investissement et donc le revenu par unité de travail efficace via l'accumulation de nouveau capital par unité de travail efficace.

À court terme, à même niveau de capital par unité de travail efficace (c-à-d pour un y donné), une augmentation de s ne fait que réduire la consommation. Donc, à l’impact, la consommation chute en dessous de ce nouveau sentier régulier.

Dans la transition vers le nouvel état régulier (qui, comme dit plus haut, est associé à un niveau de consommation plus faible que dans l'état régulier précédent), la consommation augmente en raison de l'augmentation du stock de capital de travail effectif (et donc de revenu par habitant) induite par l'augmentation de l'épargne/de l'investissement. Nous savons qu'en raison du rendement marginal décroissant de l'accumulation de capital, l'augmentation de y sera non linéaire. Ainsi, l'augmentation de c refléterait également cela.

Ce serait le graphique de la dynamique de *c* au fil du temps.

Autre possibilité :

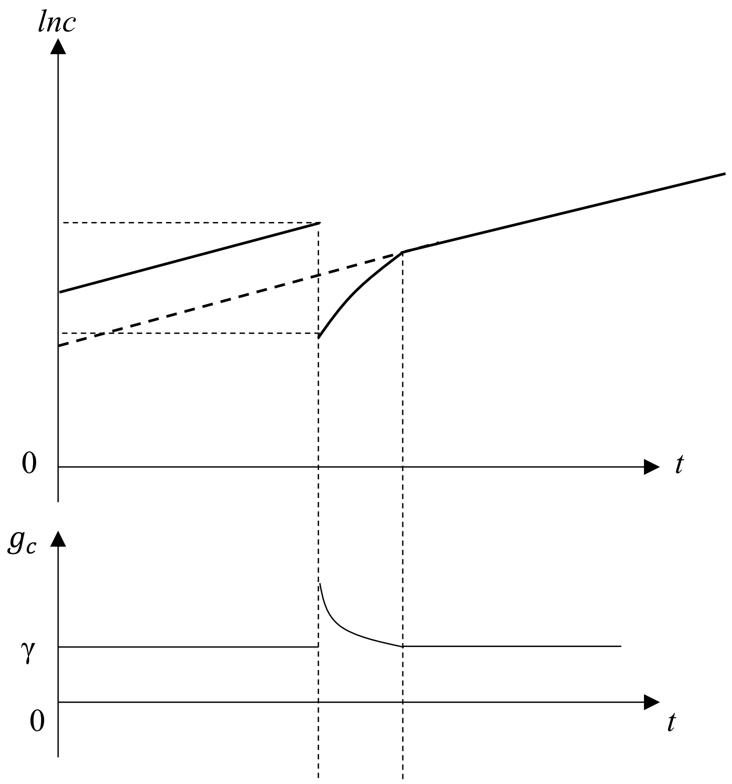
Pour analyser la trajectoire de la consommation à partir de la hausse du taux d'épargne, il est utile de considérer le logarithme de la consommation d'état régulier :

$$\ln c^* = \ln\left[(1-s)A\left(\frac{s}{\delta+\gamma+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right]$$

Ou

$$\ln c^*(t) = \ln\left[(1-s)\left(\frac{s}{\delta+\gamma+n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right] + \ln A(t)$$

Sur le graphique qui représente la trajectoire de la consommation, la hausse du taux d'épargne fait chuter l'ordonnée à l'origine du sentier régulier. C'est le cas dans la mesure où $\alpha < s$ de sorte que l'effet négatif de la hausse de s sur le premier terme de droite de l'équation l'emporte sur l'effet positif. Sa pente ne change pas bien sûr. A l'impact cependant, la consommation chute en dessous de ce nouveau sentier régulier. En effet, comme c = (1-s)y à l'instant du choc, seul l'effet négatif se fait sentir (la consommation est réduite puisque la fraction du revenu épargnée augmente). Ensuite, la consommation bénéficie du taux de croissance du revenu et revient vers son sentier de long terme avec un taux de croissance qui baisse de façon non linéaire jusqu'à revenir à gamma. (1 point avec le graphique de la trajectoire ci-dessous. Celui qui montre l'évolution de gc n'est pas nécessaire). Vous pouvez donner un demi-point si l'étudiant à compris les implications générales du non-respect de la règle d'or.



8. En considérant les logarithmes de y* et c* on peut voir que leurs ordonnées à l'origine sont croissantes par rapport à alpha. Les sentiers réguliers de ces deux variables vont dont s'élever dans le plan (sans changement de pente). Une hausse de alpha augmente le revenu mais aussi la consommation en tout point du temps et à partir de l'instant du choc.

Ce résultat est une implication de la règle d'or. Dans cette économie, où alpha < s, une augmentation de alpha, si elle n'est pas trop forte, rapproche l'économie du respect de la règle d'or et augmente donc sa consommation de sentier régulier. Bien sûr, si alpha augmente au-delà de la valeur du taux d'épargne, ce dernier est alors trop faible et le sentier régulier de la consommation reste en deçà du sentier régulier le plus élevé.

(1 point pour l'effet en niveau positif sur le revenu, 1 pour l'effet positif en niveau sur la consommation

Exercice 2.

1) Commençons par l'équation de l'accumulation des connaissances : $\dot{A} = \theta L_A^{\lambda} A^{\phi}$, pour trouver le taux de croissance est suffisant pour diviser par A : $g_A = \frac{\dot{A}}{A} = \theta L_A^{\lambda} A^{\phi-1} = \theta \frac{L_A^{\lambda}}{A^{1-\phi}}$.

À long terme, à l'état régulier, nous savons que g_A est constant, donc nous pouvons prendre le log et la dérivée par rapport au temps et résoudre pour g_A : $0 = \lambda\left(\frac{\dot{L_A}}{L_A}\right) - (1 - \phi)\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)$, donc (étant donné qu'à long terme le taux de croissance de L_A doit être égal au taux de croissance de L, c'est-à-dire n) : $g_A = \left(\frac{\dot{A}}{A}\right) = \frac{\lambda n}{1-\phi}$.

(donner 0,5 point pour l'équation du court terme et 0,5 pour l'équation du long terme)

2) Étant donné λ=1 et ϕ=0, les deux équations précédentes sont :

$g_A = \frac{\dot{A}}{A} = \theta L_A^{\lambda} A^{\phi-1} = \theta \frac{L_A^{\lambda}}{A^{1-\phi}} = \theta \frac{L_A}{A}$ (ou $\frac{\dot{A}}{A} = \theta \frac{L_A}{A} = \theta \frac{S_R L}{A}$)

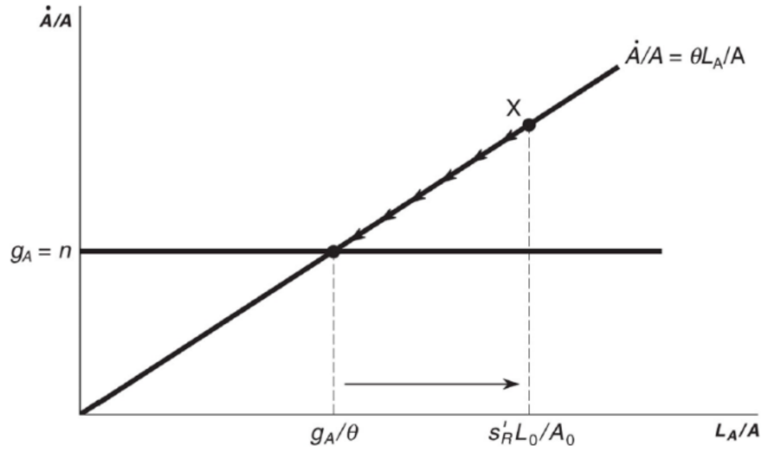
Et

$g_A = \left(\frac{\dot{A}}{A}\right) = \frac{\lambda n}{1-\phi} = n.$

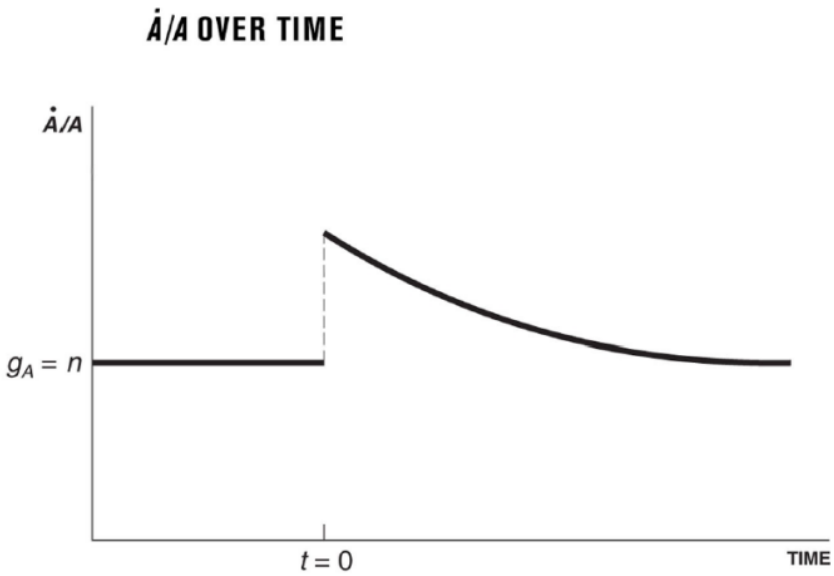
(donner 0,25 point pour l'équation du court terme et 0,25 pour l'équation du long terme)

3) Il ressort clairement des équations du point 2 qu'une augmentation de S_R augmentera le taux de croissance de A à court terme mais n'affectera pas le taux de croissance de A à long terme. Voyons les dynamiques.

TECHNOLOGICAL PROGRESS: AN INCREASE IN THE R&D SHARE



Considérons l'équation du taux de croissance de A : $\frac{\dot{A}}{A} = \theta \frac{L_A}{A}$. Une augmentation de la part des chercheurs déplace la condition initiale vers droite de l'état stationnaire et le taux de croissance saute instantanément au point X. Après le saut initial, le dénominateur du membre de droite augmente à mesure que A augmente. En conséquence, le taux de croissance ralentit le long des flèches indiquées dans le figure, jusqu'à ce que le taux de croissance soit à nouveau égal à n, la condition d'équilibre.



(Donnez 1 point pour les deux figures - ou 0.5 pour une figure seulement-, et 1 point pour la discussion)

4) La question ne demande pas de dériver l'équation, il suffit donc que les étudiants l'écrivent de manière correcte :

$$y^* = \left(\frac{s_K}{n+\delta+g_A}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} A(1 - S_R)$$

- Given $A = \frac{S_R L}{g_A}$,

$$y^* = \left(\frac{s_K}{n+\delta+g_A}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{S_R L}{g_A}(1 - S_R)$$

La part des chercheurs a deux effets opposés : l'un, négatif, est dû au fait que, pour une population totale donnée, une part plus importante de chercheurs réduit le nombre de travailleurs de la production. L'autre, positif, est qu'une plus grande proportion de chercheurs implique une plus grande ensemble d'idées, qui augmentent la productivité.

(donner 0,25 pour les équations et 0,25 pour la discussion)

Question de cours.

Le modèle de Solow à un caractère malthusien. En effet, une augmentation de la taille de la population à un effet négatif à court terme en réduisant le revenu par habitant et la consommation. Cet effet disparaît cependant à long terme puisque l'économie revient automatiquement sur son sentier régulier initial. Une augmentation du taux de croissance démographique à un effet négatif à court et à long terme puisqu'il conduit l'économie sur un sentier régulier plus bas. Le revenu sera inférieur en tout point du temps à partir du choc. Ceci produit donc un effet de niveau négatif.

Les modèles de croissance endogène nous éloignent de la perspective malthusienne. Dans les modèles AK ou le modèle à variété de produit de Romer (1990), il existe un effet d'échelle. Une augmentation de la taille de la population à un effet durable sur le taux de croissance du stock d'idées et accroît ainsi le taux de croissance du revenu par habitant. La pente du sentier de croissance régulier s'élève.

(donnez 2 points sur la discussion sur Solow)

Jones a montré que cet effet d'échelle n'était pas conforme aux données empiriques. L'accroissement du nombre de chercheurs dans les pays développés depuis les années 1950 n'a pas produit une accélération de la croissance. En modifiant la fonction de production d'idée du modèle de Romer (1990) grâce à l'introduction d'une externalité de duplication et en affaiblissant l'externalité de connaissance, il obtient un modèle de croissance semi-endogène. Le taux de croissance reste fonction du choix des agents de s'engager dans l'activité de recherche. Il est donc expliqué par le modèle. Mais l'effet d'échelle a disparu. Un accroissement de la population a un effet positif à court terme en accroissant le nombre de chercheurs dans l'économie (exercice précédent). Mais ce n'est qu'un effet en niveau. A long terme, le taux de croissance revient à une valeur déterminée par les fondamentaux de l'économie. Parmi eux se trouve le taux de croissance démographique. Ainsi, dans ces modèles, une hausse du taux de croissance démographique accélère les gains de productivité (production d'idées) et élève le taux de croissance du revenu par habitant. Inversement, si le taux de croissance de la population tombe à zéro, la croissance économique doit s'arrêter à long terme.

(donnez 2 points sur la discussion sur le modèles de croissance endogène)

Ces éléments ont été exploités pour expliquer la sortie de la trappe malthusienne et l'évolution de la croissance économique depuis le 18$^{\text{ième}}$ siècle. Le modèle malthusien de croissance montre comment l'économie peut demeurer dans une situation d'état stationnaire sans croissance démographique en l'absence de progrès technique et dès lors que la production est effectuée avec une surface de terre fixe. Dans ce contexte, un progrès technique continu et à taux constant peut conduire à un revenu de subsistance plus élevé mais qui reste constant. Sur cette base, l'introduction d'une relation entre progrès technique et croissance démographique peut expliquer les débuts de la croissance. Si l'augmentation de la population accélère le progrès technique, alors le revenu malthusien s'élève progressivement. On observe empiriquement que cette élévation du revenu par habitant conduit à un taux de croissance démographique maximum. Lorsque ce pic est atteint, le revenu peut croître sans limite alors que le taux de croissance démographique chute. Ceci correspond à la phase moderne de la croissance. On voit ainsi comment l'idée d'un lien entre croissance démographique et production d'idées nouvelles peut servir à expliquer les origines de la croissance. Dans ce modèle, la question des effets de la chute de n sur le taux de croissance à long terme se pose à nouveau.

(donnez 2 points sur la discussion sur le modèles de unified growth theory)