① Correction de l'exercice 6

1. Le réel $x = 2$ convient.

Pour s'en convaincre, il faut revenir au cours de Terminale sur les suites :

Les suites de la forme $u_n = a^n$ sont des suites géométriques de raison a.

Le cours nous dit : si $a > 1$, cette suite diverge vers $+\infty$.

Si $|a| < 1$, cette suite converge vers 0.

Or on se souvient ensuite de la définition ~~vers +∞~~ de la divergence vers $+\infty$ avec les ε. ~~Si~~ $u_n \to +\infty$, par définition, si et seulement si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n > \varepsilon$

Donc dans le cas d'une suite géométrique de raison 2.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad 2^n > \varepsilon$. (on remplace u_n par 2^n)

En remplaçant ε par y :

$\forall y > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad 2^N > y$ (comme n doit être $\geq N$, $n = N$ convient)

Si $y \leq 0$, l'inégalité $2^N > y$ fonctionne aussi car $2^N > 0$

donc $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad 2^N \geq y$

2/ ②

$Q(x) = \exists y \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad x^n < y$

De la même manière, la déf de convergence vers 0 d'une suite u_n s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n| < \varepsilon$$

et on sait que les suites géométriques de raison < 1 en valeur absolue convergent vers 0. (par exemple $\frac{1}{2}$)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$$

On peut encore écrire si on prend $\varepsilon = 2$

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n < 2$$, et on remarque que $N = 0$ convient pour $\varepsilon = 2$ alors

Ainsi

$$\exists \varepsilon > 0 \ (\text{ici } \varepsilon = 2) \ tq \ \forall n \geq 0 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$$

en remplaçant ε par y

$$\exists y > 0 \ (\text{donc } \in \mathbb{R}) \ tq \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n < y$$

3/ (a) vrai (c'est le 1)

(b) Faux (prendre $x = 0$)

(c) Faux (prendre $x = 1$, si on prend alors $y = 2$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad x^n < y$, on a donc

$\exists y \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N} \quad x^n < y$, c'est la négation de $P(x)$)

(3)

(d) $x > 1 \Rightarrow P(x)$ Vrai car x^n diverge

vers $+\infty$

(e) $P(x) \Rightarrow |x| \geq \frac{1}{2}$, en prenant la contraposée

il faut prouver

$|x| < \frac{1}{2} \Rightarrow Q(x)$

C'est le cas car si $|x| < \frac{1}{2}$, $|x| < 1$ donc

x^n est géométrique de raison < 1 en valeur absolue

donc converge vers 0, donc en reprenant le raisonnement du 2/

on obtient $Q(x)$