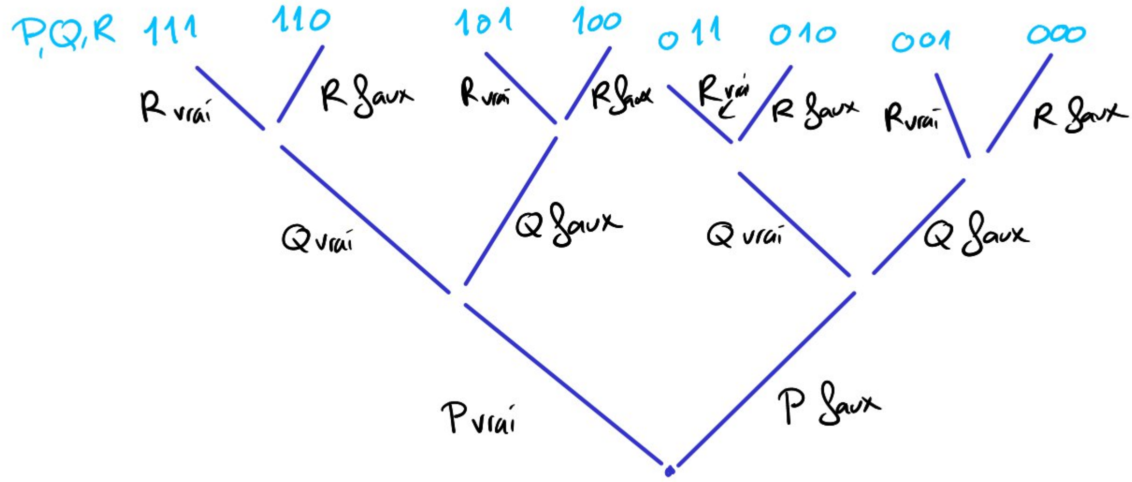
Contrôle de Fondements des Mathématiques
16 / 10 / 2024

Exercice 1 A l'aide de tables de vérité, montrer les équivalences suivantes

1. $(P \vee Q) \implies R) \Leftrightarrow (P \implies R) \wedge (Q \implies R)$
2. $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

(1)



P	Q	R	$P \vee Q$	$P \vee Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$ (A)	$Q \Rightarrow R$ (B)	$A \wedge B$	①
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

$\rightarrow$ $(P \vee Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R \wedge Q \Rightarrow R)$ est une tautologie

(2)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	②
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

$\rightarrow$ $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$ est une tautologie.

Exercice 2 On considère la proposition

$$\rightarrow P : \exists a \in \mathbb{N},\ \forall b \in \mathbb{N},\ \forall c \in \mathbb{N},\ ab \leq c$$

1. Déterminer la négation de P.
2. P est-elle vraie ou fausse ?

1) $\neg P = \neg(\exists a \in \mathbb{N}\ \forall b \in \mathbb{N}\ \forall c \in \mathbb{N},\ ab \leq c)$
$= \forall a \in \mathbb{N}\ \neg(\forall b \in \mathbb{N}\ \forall c \in \mathbb{N},\ ab \leq c)$
$= \forall a \in \mathbb{N},\ \exists b \in \mathbb{N},\ \neg(\forall c \in \mathbb{N},\ ab \leq c)$
$= \forall a \in \mathbb{N},\ \exists b \in \mathbb{N},\ \exists c \in \mathbb{N}\ \neg(ab \leq c)$
$= \forall a \in \mathbb{N},\ \exists b \in \mathbb{N},\ \exists c \in \mathbb{N},\ ab > c$

2) Montrons que P vraie
Posons $a = 0$, montrons que $\forall b \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N},\ ab \leq c$
Soient $b, c \in \mathbb{N}$, on a $ab = 0b = 0 \leq c$ car c'est un entier naturel
$\rightarrow$ On a montré que P est vraie

Exercice 3 On considère la proposition

$$Q : \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ (x > y) \Rightarrow (x^n < y^n)$$

1. Déterminer la négation de Q.
2. Q est-elle vraie ou fausse ?

1) $\neg Q = \exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \neg((\overbrace{x > y}^{a}) \Rightarrow (\overbrace{x^n < y^n}^{b}))$
$= \exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N},\ (x > y) \wedge (x^n \geq y^n)$
(rappel : $\neg(a \Rightarrow b) = a \wedge \neg b$)

2) Montrons que Q est fausse en montrant que $\neg Q$ est vraie
Posons $x = 2$, $y = 1$ et montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ x > y \wedge x^n \geq y^n$
Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $x > y \Leftrightarrow 2 > 1$ est vraie
et $x^n \geq y^n \Leftrightarrow 2^n \geq 1^n = 1$ est vraie
Donc $x > y \wedge x^n \geq y^n$ est vraie.
$\rightarrow$ On a montré que $\neg Q$ est vraie, donc que Q est fausse

Exercice 4

1. Montrer que le proposition suivante est vraie (on pourra utiliser la partie entière) : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}\ \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{n+1}{n} - 1 < \varepsilon$
2. Montrer que leaproposition suivante est fausse (on pourra nier le prédicat et bien choisir ε) : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}\ \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 - \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

1) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{n+1}{n} - 1 < \varepsilon$

Or, $\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n} = \frac{1}{n}$

Donc $\frac{n+1}{n} - 1 < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

Rappel (Partie entière) Soit $x \in \mathbb{R}$, sa partie entière $E(x)$ est l'unique entier relatif tel que $E(x) \leq x < E(x)+1$

→ Posons $n = \underbrace{E(\frac{1}{\varepsilon})}_{\geq 0 \text{ car } \varepsilon > 0 \text{ donc } \frac{1}{\varepsilon} > 0} + 1$. alors n est un entier relatif et $n \geq 1$ → $n \in \mathbb{N}^*$

et $n > \frac{1}{\varepsilon}$ Donc $\frac{1}{n} < \varepsilon$ Donc $\frac{n+1}{n} - 1 < \varepsilon$

→ On a montré que (1) est vraie.

2) Montrons que la négation de (2) est vraie :

$\neg(2) \iff \neg(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists n \in \mathbb{N}^*$ tq $1 - \frac{1}{n+1} < \varepsilon)$

$\iff \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{n+1} \geq \varepsilon$

Comme la suite $(1 - \frac{1}{n+1})_{n^*}$ est croissante, on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$, alors on a bien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{n+1} \geq \varepsilon$

→ On a montré que $\neg(2)$ est vraie, donc que (2) est fausse

Exercice 5 On considère le prédicat sur $\mathbb{R}$ défini par

$$P(x) := \exists y \in \mathbb{R}\ xy = 2$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. $\exists x \in \mathbb{R}\ P(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x)$
3. $x > 0 \Rightarrow P(x)$
4. $x > 0 \Leftrightarrow P(x)$
5. $P(x) \Rightarrow x \neq 0$

1) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad xy = 2$ est vraie

Si on pose $x = \pi^2$ et $y = 2/\pi^2$, alors $xy = \pi^2 \cdot \frac{2}{\pi^2} = 2$

Donc $P(\pi^2)$ est vraie. Donc $\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$ est vraie.

$(\exists y \in \mathbb{R}, \pi^2 y = 2)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad xy = 2$ est fausse

Montrons que $\neg 2 : (\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \neq 2)$ est vraie.

Posons $x = 0$ et montrons $\forall y \in \mathbb{R}, xy \neq 2$

Soit $y \in \mathbb{R}$, alors $xy = 0 . y = 0 \neq 2$

$\Rightarrow \neg P(0)$ est vraie. Donc $\exists x \in \mathbb{R}, \neg P(x)$ est vraie

Donc $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x)$ est fausse

3) $x > 0 \Rightarrow P(x)$ est vraie

Supposons que $x > 0$ et déduisons-en $P(x)$

$\Rightarrow$ on cherche $y \in \mathbb{R}$ tq $xy = 2$

Comme $x > 0$, on peut prendre $y = 2/x$ et on a bien $xy = 2$

Donc, si $x > 0$ alors $P(x)$ est vraie

4) On sait déjà que $x > 0 \Rightarrow P(x)$ est vraie

Reste donc à savoir si $P(x) \Rightarrow x > 0$

càd si $\neg(x > 0) \Rightarrow \neg P(x)$

càd si $x \leq 0 \Rightarrow \neg P(x)$

Or, $x \leq 0 \Rightarrow \neg P(x)$ est faux :

en effet, $x = -1$ vérifie $x \leq 0 \wedge P(-1)$ car on peut prendre $y = -2$ et on a bien $xy = 2$

càd $\neg(x \leq 0 \Rightarrow \neg P(x))$

Donc $P(x) \Rightarrow x > 0$ est faux. Donc $P(x) \Leftrightarrow x > 0$ est fausse contraposée

(5) $P(x) \Rightarrow x \neq 0 \iff \neg(x \neq 0) \Rightarrow \neg P(x) \iff x = 0 \Rightarrow \neg P(x)$

Supposons que $x = 0$, déduisons-en $\neg P(x)$: $\forall y \in \mathbb{R}\ xy \neq 2$

$\neg P(0) = \forall y \in \mathbb{R}\ 0.y \neq 2$

Soit $y \in \mathbb{R}$, on a $0.y = 0 \neq 2$ donc $\neg P(0)$ est vraie

On a montré que $x = 0 \Rightarrow \neg P(x)$

donc par contraposée, on a montré que $P(x) \Rightarrow x \neq 0$.