

Cours d'Assurance
(Examen - Durée 2 heures)

L'examen comporte trois exercices indépendants
Sans documents, ni appareils électronique (téléphone, montre connectée, calculatrice ...)

Exercice 1 (6 points) :

Une compagnie d'assurance avec un capital propre $K = 800$ gère $N = 10\,000$ contrats d'assurance souscrits par des assurés exposés à des sinistres $(S_i)_{i=1}^N$ indépendants et suivant la même loi normale de paramètres (m, σ^2) où $m = 500$, $\sigma = 10$. A chaque assuré, l'assureur fournit une assurance totale en contrepartie d'une prime fixée selon le "principe de l'écart type" avec un taux de chargement $\rho = 0,01$.

1. Donner la variable aléatoire qui exprime le profit de l'assureur.
2. Discuter de l'influence de chacun des paramètres sur le profit de l'assureur.
3. Donner l'expression du risque de faillite de l'assureur et déterminer sa valeur approximative à l'aide du tableau donné en appendice.
4. Ce risque de faillite vous semble-t'il raisonnable ?

Exercice 2 (5 points) :

On considère deux variables aléatoires X et Y .

situation	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
probabilité	2/10	3/10	3/10	2/10
X	10	20	30	40
Y	5	20	30	45

Montrer à l'aide de la définition que X domine Y au sens de la dominance stochastique d'ordre deux. Commenter.

Exercice 3 (9 points) :

On considère un modèle avec deux agents notés (1 et 2) munis respectivement de la fonction d'utilité $u_1(x) = -e^{-x}$ et $u_2(x) = x$ et dotés d'une richesse initiale w_1 et w_2 respectivement.

L'agent 1 (seulement) est exposé à un sinistre représenté par la variable aléatoire $S = B \times U$, où B suit une loi de Bernoulli de paramètre p tandis que U suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose de plus que les variables aléatoires B et U sont indépendantes.

L'agent 2 ("l'assureur") propose à l'agent 1 ("l'assuré") le remboursement intégral du montant du sinistre en échange d'une prime π .

1. Déterminer les indices d'aversion au risque absolu des agents et dire comment ceux-ci varient avec le niveau de richesse.
2. Quelles interprétations peut-t'on donner pour les variables B et U ?
3. Déterminer et tracer la fonction de répartition de la loi S . On pourra remarquer (**et au besoin admettre**) que avec les notations traditionnelles (mesures de Dirac et de Lebesgue)

$$\mathbb{P}_S = (1 - p)\delta_0 + p\mathbf{1}_{[0,1]}\lambda.$$

4. Que vaut l'espérance d'utilité de l'agent 1 s'il n'achète pas de contrat d'assurance ?
5. Quelle est la prime maximale π_M que l'agent 1 accepte de payer pour s'assurer ? Quelle est la prime minimale π_m que l'assureur accepte ?
6. Justifier que $\pi_m < \pi_M$. En déduire que le contrat peut être signé et déterminer l'ensemble des primes possibles pour le contrat.

1 Annexe : fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

La table suivante donne la probabilité $\mathbb{P}(U \leq u)$ où U désigne une variable aléatoire distribuée selon la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997