
Université de Paris I

Magistère d'Economie - Première année Cours de Microéconomie Interrogation de contrôle continu 2

Mercredi 19 avril 2023

Durée de l'épreuve : 1,5h

Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.

Exercice 1 (7 points)

On considère un agent économique qui dispose d'une richesse W qu'il peut placer soit dans un placement sans risque de rendement nul (un euro placé rapporte un euro) soit dans un placement risqué qui rapporte, pour un euro placé, $1 + \bar{r}$ avec probabilité p et $1 + \underline{r} < 1$ avec probabilité $1 - p$. On suppose que $\bar{r} > 0 > \underline{r}$ et $p\bar{r} + (1 - p)\underline{r} > 0$. Cet agent a des préférences représentées par une fonction VNM égale à $u(x) = \frac{1}{1-b}x^{(1-b)}$ avec $0 < b < 1$.

1. Déterminer le montant optimal placé par cet agent dans le placement risqué. (5 points)
2. Un accroissement du revenu W induit-il une hausse du montant placé dans le placement risqué? Expliquez ce résultat. (2 points)

Exercice 2 (8 points)

Deux individus investissent dans un projet. Le projet exige que les deux individus y participent. Le revenu monétaire de ce projet est risqué. Il peut prendre 2 valeurs, y_1 avec probabilité p et y_2 avec probabilité $1 - p$. L'individu 1 fixe le partage de ce revenu entre les deux agents ex ante (avant d'observer le revenu obtenu). Son objectif est de maximiser "l'utilité" qu'il retire de cette rémunération sous contrainte que l'agent 2 accepte de participer au projet. L'agent 1 est neutre vis-à-vis du risque et l'agent 2 a des préférences représentées par une fonction VNM $u(x)$ strictement concave. Par ailleurs, si l'agent 2 ne participe pas au projet, il perçoit une rémunération monétaire non risquée égale à w avec $w < y_2$. Les individus n'ont pas d'autre rémunération que la rémunération apportée par le projet.

1. Ecrire le programme de l'agent 1 permettant de déterminer le partage du revenu entre les deux individus et montrer que le programme est équivalent à (2 points) :

$$\underset{x_1, x_2}{\text{Min}} \quad px_1 + (1 - p)x_2 \text{ sous contrainte } pu(x_1) + (1 - p)u(x_2) \geq u(w)$$

où l'on note x_i le montant monétaire versé à l'agent 2 si le revenu du projet est égal à y_i avec $i = 1, 2$.

2. Représenter graphiquement la solution de ce programme dans un repère (x_1, x_2) en justifiant soigneusement le graphique. (2 points)
3. En déduire la rémunération de chacun des deux agents. (2 points)
4. Comment varie la rémunération de l'agent 2 en cas d'accroissement de risque du revenu du projet? Vous répondrez à cette question de manière informelle à partir de l'expression obtenue pour la rémunération de l'agent 1. (2 point)

Exercice 3 (5 points)

On considère un agent dont les préférences sont représentées par une fonction de VNM $u(x)$ strictement concave. Cet individu dispose d'un revenu Y et fait face à un risque de dommage monétaire égal à D avec $0 < D < Y$. Ce dommage peut survenir avec probabilité $\frac{1}{2}$. Sans information supplémentaire, l'assurance de ce dommage est impossible. L'individu peut toutefois contacter un expert. Avec probabilité $\frac{1}{2}$, le rapport de l'expert révisera la probabilité du dommage à $\frac{2}{3}$. Dans ce cas le dommage n'est toujours pas assurable. Avec probabilité $\frac{1}{2}$, le rapport de l'expert révisera la probabilité du dommage à $\frac{1}{3}$. Dans ce cas le dommage est assurable. La compagnie propose une indemnité I en cas de dommage pour le paiement d'une prime égale à $\frac{1}{3}I$. L'individu est libre du montant de l'indemnité.

1. Déterminer le montant optimal de l'indemnité choisie par l'agent si le rapport de l'expert estime que la probabilité de dommage est égale à $\frac{1}{3}$. (2 points)
2. L'individu est-il prêt à payer pour obtenir l'information de l'expert ? (3 points)

Eléments de correction

Exercice 1 (7 points)

1. Déterminer le montant optimal placé par cet agent dans le placement risqué. (5 points)
L'objectif de l'agent est de maximiser l'espérance d'utilité du revenu risqué :

$$\frac{1}{1-b}p[W + \alpha\bar{r}]^{(1-b)} + (1-p)\frac{1}{1-b}[W + \alpha r_-]^{(1-b)}$$

On trouve alors :

$$\alpha = \frac{W(K-1)}{\bar{r} - K r_-}$$

avec $K = e^{\frac{1}{b} \ln \frac{p}{1-p} \frac{\bar{r}}{r_-}} > 1$

2. Un accroissement du revenu W induit-il une hausse du montant placé dans le placement risqué? Expliquez ce résultat. (2 points)
Un accroissement du revenu W induit une hausse du montant placé dans le rendement risqué car l'indice absolu d'aversion pour le risque diminue si le revenu augmente.

Exercice 2 (8 points)

1. Ecrire le programme de l'agent 1 permettant de déterminer le partage du revenu entre les deux individus et montrer que le programme est équivalent à (2 points) :

$$\text{Min}_{x_1, x_2} px_1 + (1-p)x_2 \text{ sous contrainte } pu(x_1) + (1-p)u(x_2) \geq u(w)$$

L'agent 1 maximise son espérance de gain (neutralité au risque) donnée par $p(y_1 - x_1) + (1-p)(y_2 - x_2)$ sous contrainte que l'agent 2 accepte i.e. que son espérance d'utilité soit supérieure à $u(w)$. Cela est équivalent à minimiser $px_1 + (1-p)x_2$ sous contrainte $pu(x_1) + (1-p)u(x_2) \geq u(w)$.

2. Représenter graphiquement la solution de ce programme dans un repère (x_1, x_2) en justifiant soigneusement le graphique. (2 points)
La courbe d'indifférence de l'agent 2 est convexe car $u(x)$ est concave. La courbe d'indifférence de l'agent 1 est linéaire et de pente $\frac{p}{1-p}$ car l'agent 1 est neutre au risque. L'agent 2 cherche donc la droite la plus basse possible sous contrainte de couper la courbe d'indifférence de niveau $u(w)$ de l'agent 2. L'optimalité est obtenue au point de tangence entre les deux courbes d'indifférence.
3. En déduire la rémunération de chacun des deux agents. (2 points)
Le point de tangence est à l'égalité des deux pentes soit $TMS(x_1, x_2) = \frac{p}{1-p}$. Le TMS de l'agent 2 est égal à $\frac{p}{1-p} \frac{u'(x_1)}{u'(x_2)}$. On en déduit que $x_1 = x_2 = w$. On a donc pour l'agent 1 : $y_1 - w$ et $y_2 - w$.
4. Comment varie la rémunération de l'agent 2 en cas d'accroissement de risque du revenu du projet? (2 points)
L'agent 1 a une rémunération non risquée indépendante du revenu du projet. Tout accroissement de risque est supporté uniquement par l'agent 2.

Exercice 3 (5 points)

1. Déterminer le montant optimal de l'indemnité choisie par l'agent si l'expert estime que la probabilité de dommage est égale à $\frac{1}{3}$. (2 points) L'agent choisit l'indemnité I en maximisant l'espérance d'utilité donnée par $\frac{1}{3}u(Y - D + \frac{2}{3}I) + pu(Y - \frac{1}{3}I)$. On trouve alors une indemnité choisie égale à D . Le revenu de l'agent est alors certain et égale à $Y - \frac{1}{3}D$ conditionnellement à l'estimation de la probabilité $\frac{1}{3}$ de l'expert.
2. L'individu est-il prêt à payer pour obtenir l'information de l'expert? (3 points) Précisons la distribution de revenu avec et sans information :
Sans information, le revenu est Y avec probabilité $\frac{1}{2}$ et $Y - D$ avec probabilité $\frac{1}{2}$.
Avec l'information de l'expert, ex ante, le revenu est égal à :

- (a) $Y - \frac{1}{3}D$ avec probabilité $\frac{1}{2}$
- (b) $Y - D$ avec probabilité $\frac{2}{6}$
- (c) Y avec probabilité $\frac{1}{6}$.

Cette dernière distribution domine stochastiquement au second ordre la distribution sans information. En effet, on obtient la distribution sans information en ajoutant la lotterie de moyenne nulle qui donne $\frac{1}{3}D$ avec probabilité $\frac{2}{3}$ et $-\frac{2}{3}D$ avec probabilité $\frac{1}{3}$ lorsque le revenu est égal à $Y - \frac{1}{3}D$. On conclut que l'agent est prêt à payer pour obtenir l'information et réduire ainsi le risque.