

Eléments de corrections de l'interrogation du 8 mars 2023

Exercice 1

1. $F'_L = \theta$, $F'_K = \theta^2$, $\frac{dK}{dL} = -\frac{1}{\theta}$ (ou aussi $TMST(K, L) = \frac{1}{\theta}$). Hausse de θ réduit le nombre d'unités de capital supplémentaires nécessaires pour maintenir la production constante lorsque l'on réduit le volume de main d'oeuvre. Il peut s'apparenter à un progrès technique biaisé en faveur du capital.

2. $\min \{rK + wL \mid \theta L + \theta^2 K = y, L \geq 0, K \geq 0\}$. La pente d'une fonction s'iso-coût est $-\frac{w}{r}$ dans le plan $(0, L, K)$. Argument marginal : $dL \neq 0$, $\theta dL + \theta^2 dK = 0 \Leftrightarrow dK = -\frac{1}{\theta} dL$, changement de coût $rdK + wdL = r\left(\frac{w}{r} - \frac{1}{\theta}\right)dL$. Trois cas :

Si $\frac{w}{r} > \frac{1}{\theta}$, alors $dL < 0$ réduit le coût, donc $L = 0$, $K = \frac{y}{\theta^2}$.

Si $\frac{w}{r} < \frac{1}{\theta}$, alors $L = \frac{y}{\theta}$, $K = 0$.

Si $\frac{w}{r} = \frac{1}{\theta}$, alors tout (L, K) tel que $\theta L + \theta^2 K = y$, $L \geq 0$, $K \geq 0$ est solution.

Vous pouvez aussi vous appuyer sur le graphique de l'isoquante et remarquer que:

- (i) si la droite d'iso-coût a une pente inférieure au $TMST$ ($\frac{w}{r} < \frac{1}{\theta}$), la minimisation du coût est obtenue pour $K = 0$ et donc $L = \frac{y}{\theta}$
 - (ii) si la droite d'iso-coût a une pente supérieure au $TMST$ ($\frac{w}{r} > \frac{1}{\theta}$), la minimisation du coût est obtenue pour $L = 0$ et donc $K = \frac{y}{\theta^2}$
 - (iii) si la droite d'iso-coût a une pente égale au $TMST$ ($\frac{w}{r} = \frac{1}{\theta}$), la minimisation du coût est obtenue pour $L \geq 0$, $K \geq 0$ tels que $\theta L + \theta^2 K = y$
3. Pour $K = \bar{K} > 0$ et $L = \bar{L} > 0$, on doit avoir $\frac{w}{r} = \frac{1}{\theta}$. Hausse θ conduit à baisse $\frac{w}{r}$: le capital est plus productif, on en demande plus, son prix relatif augmente. Substitution.
 4. $\theta L + \theta^2 K - rK + wL - C\frac{\theta^2}{2}$
 5. La dérivée seconde en θ est $2K - C$. Elle est négative ssi $C > 2K$.
 6. La dérivée première est $L + 2\theta K - C\theta$. Elle est positive en $\theta = 0$. Elle est nulle en $\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{w}{r} > \frac{1}{\theta} \\ \frac{y}{\theta C} & \text{si } \frac{w}{r} < \frac{1}{\theta} \\ \frac{L}{C-2K} > 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
 7. A l'équilibre, $\theta = \frac{\bar{L}}{C-2\bar{K}}$.
 8. Une hausse de $\bar{K}$ conduit à une hausse de θ , ce qui réduit $\frac{w}{r}$. Autrement dit, la hausse de l'offre de capital ne réduit pas la rémunération relative du capital comme on aurait pu penser car cette hausse de l'offre conduit la firme à choisir une technologie biaisée en faveur du capital.

Exercice 2

1. Le coût est homogène de degré 1 en prix. Donc

$$\lambda^{\frac{\alpha}{\beta}} [w_1^\alpha + w_2^\alpha]^{\frac{1}{\beta}} y = \lambda [w_1^\alpha + w_2^\alpha]^{\frac{1}{\beta}} y \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

2. Le lemme de Shephard donne

$$x_i = \frac{\partial}{\partial w_i} [w_1^\alpha + w_2^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} y = w_i^{\alpha-1} [w_1^\alpha + w_2^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}-1} y$$

On obtient:

$$\begin{aligned} x_1 &= \left[1 + \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^\alpha \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} y \\ x_2 &= \left[1 + \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^\alpha \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} y \end{aligned}$$

3. On cherche la fonction de production c'est-à-dire une relation entre x_1 , x_2 et y .

Pour cela, on remarque que les demandes de facteurs ne dépendent que du rapport $\frac{w_1}{w_2}$. Par ailleurs, on peut calculer le rapport des demandes de facteurs:

$$\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^{1-\alpha}$$

On a donc:

$$\frac{w_2}{w_1} = \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

En remplaçant le rapport des coûts dans une des deux demandes de facteurs (x_1 par exemple), on trouve:

$$x_1 = \left[1 + \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} y$$

Ce qui équivaut à:

$$(x_1)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left[1 + \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right] y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

ou:

$$\begin{aligned} 1 &= \left[(x_1)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (x_2)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right] y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \Leftrightarrow y &= \left(x_1^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} + x_2^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} \end{aligned}$$

Fonction de production CES