
Université de Paris I

Magistère d'Economie - Première année Cours de Microéconomie Interrogation de contrôle continu 2

Mercredi 20 avril 2022

Durée de l'épreuve : 1,5h

Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.

Exercice 1 (7 points)

On considère un agent économique qui dispose d'une richesse W et fait face à un risque de dommage monétaire égal à $D < W$ qui survient avec probabilité $\frac{1}{2}$. Cet agent a des préférences représentées par une fonction VNM égale à $u(x) = \alpha x - \beta x^2$ avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Une compagnie d'assurance lui propose un contrat d'assurance qui lui permet de profiter d'une indemnité I en cas de dommage en l'échange du paiement d'une prime $P = bI$ avec $b \geq \frac{1}{2}$.

1. Déterminer le montant optimal de l'indemnité choisie par cet agent.
2. La demande d'assurance est-elle, ici, un bien normal ? Expliquer un tel résultat.
3. Quel est l'impact du paramètre β sur la demande d'assurance. Expliquer un tel résultat.

Exercice 2 (5 points)

Une firme utilise une technologie risquée qui permet de produire une quantité de bien égale à $q = xL$ où L désigne les heures de travail et x une variable aléatoire avec :

$$x = \begin{cases} \bar{x} & \text{avec probabilité } p \\ \underline{x} & \text{avec probabilité } 1 - p \end{cases}$$

avec $\bar{x} > \underline{x} > 0$.

Le coût d'une heure de travail est égal à w et le prix du bien est égal à 1.

L'objectif de la firme est de maximiser l'espérance d'utilité du profit. La firme dispose d'une richesse initiale R qu'on suppose suffisante pour toujours éviter un profit négatif. La fonction de VNM est notée $u(s)$ avec $u'(s) > 0$ et $u''(s) < 0$. La firme détermine la demande de travail avant d'observer la réalisation de la variable x .

1. A quelle condition la demande de travail est-elle positive ? Expliquer ce résultat.
2. On considère que $u(s) = -\exp(-as)$ avec $a > 0$. Déterminer la demande de travail. Expliquer l'effet de a sur la demande de travail.

Exercice 3 (8 points)

On considère un agent économique dont les préférences sont représentées par la fonction CARA $u(x) = -\exp(-ax)$ avec $a > 0$. Cet agent dispose d'une richesse monétaire W et fait face à un risque de dommage monétaire égal à d_1 avec probabilité $\frac{1}{4}$ ou égal à d_2 avec la même probabilité $\frac{1}{4}$ avec $d_1 < d_2 < W$. Une compagnie d'assurance lui propose un contrat avec une franchise égale à f . On suppose que $f < d_1$. La compagnie assure une espérance de profit positive en fixant une prime égale à $P = cE(I)$ où c est un paramètre (on supposera $1 < c < 2$) et $E(I)$ désigne l'espérance d'indemnité versée à l'agent (l'indemnité I_i versée en cas de dommage d_i est égale à $d_i - f$). L'agent peut choisir le montant de la franchise f .

1. Ecrire l'espérance d'utilité de l'agent en fonction de f .
2. Déterminez le montant de f choisi par l'agent. On notera f^* le montant de franchise choisi par l'agent. Expliquez l'effet d'une augmentation de a et de c sur ce montant.

La compagnie d'assurance modifie le contrat proposé à l'agent en fixant $I_1 = d_1 - f^* - \varepsilon > 0$ et $I_2 = d_2 - f^* + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

3. Montrer que tout agent ayant des préférences représentées par une fonction VNM $u(x)$ concave préfère toujours le contrat avec franchise f^* au nouveau contrat.
4. Peut-on alors affirmer que le contrat avec franchise est le contrat qui permet de maximiser le taux de chargement de la compagnie d'assurance.

Eléments de correction

Exercice 1 (7 points)

L'agent maximise l'espérance d'utilité soit :

$$\alpha(W - bI + \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}D) - \frac{1}{2}\beta(W - bI)^2 - \frac{1}{2}(W - D + (1 - b)I)^2$$

On en déduit alors le montant optimal de l'indemnité :

$$I^* = \frac{W(2b - 1) + D(1 - b)}{b^2 + (1 - b)^2} - \frac{\alpha}{\beta}(b - \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{b^2 + (1 - b)^2}$$

On trouve alors qu'une augmentation de β induit une hausse de la demande d'assurance : une hausse du paramètre β est en effet associé à une hausse de l'indice absolu d'aversion pour le risque.

La demande d'assurance est ici un bien normal : l'indice absolu d'aversion pour le risque augmente si le revenu augmente.

Exercice 2 (5 points)

L'objectif de la firme est de maximiser :

$$pu(R + (\bar{x} - w)L) + (1 - p)u(R + L(\underline{x} - w))$$

La condition du premier ordre est :

$$p(\bar{x} - w)u'(R + (\bar{x} - w)L^*) + (1 - p)(\underline{x} - w)u'(R + L^*(\underline{x} - w)) = 0$$

On en déduit que $L^* > 0$ ssi $p(\bar{x} - w) + (1 - p)(\underline{x} - w) > 0$. Il faut que le rendement espéré soit strictement positif pour que la firme investisse.

On peut remarquer que si $w \leq \underline{x}$, la fonction est toujours strictement croissance de sorte qu'il n'y a pas de solution finie. Cela vient du fait que le profit est une loterie qui donne toujours un gain positif.

Pour la fonction CARA, on obtient :

$$L^* = \frac{\ln\left(\frac{p(\bar{x} - w)}{(1 - p)(w - \underline{x})}\right)}{a(\bar{x} - \underline{x})}$$

Une hausse de a réduit la demande de travail.

Exercice 2 (8 points)

L'agent maximise son espérance d'utilité qui est égale à :

$$\frac{1}{2}u(W - c(D - \frac{1}{2}f)) + \frac{1}{2}u(W - c(D - \frac{1}{2}f) - f)$$

où $D = \frac{1}{4}d_1 + \frac{1}{4}d_2$.

On trouve alors :

$$f^* = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{c}{2 - c}\right)$$

Une hausse de a induit une diminution du niveau de franchise choisi.

Avec le contrat avec franchise, le revenu est le suivant :

$$\begin{cases} W - P - f & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \\ W - P & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si la compagnie s'écarte du contrat avec franchise, le revenu est alors :

$$\begin{cases} W - P - f - \varepsilon & \text{avec probabilité } \frac{1}{4} \\ W - P - f + \varepsilon & \text{avec probabilité } \frac{1}{4} \\ W - P & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Cela revient à imposer une loterie qui donne $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$ avec équiprobabilité dans le cas où le revenu est égal à $W - P - f$. Le nouveau revenu est donc jugé plus risqué au sens de la dominance stochastique du second ordre.

On en déduit que l'agent est disposé à payer une prime plus faible si le contrat s'écarte du contrat avec franchise.

On en déduit que si la compagnie veut maximiser le profit, l'indemnité versée doit prendre la forme d'un contrat avec franchise.