

Cours de mathématiques avancées - Magistère d'économie

TD sur les espaces vectoriels

Exercice 1. Déterminer a, b tels que $(1, -1, a, b)$ appartienne à $L\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}$.

Exercice 2. A quelle condition une droite du plan est-elle un sous-espace vectoriel ?

Exercice 3. Dire si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels :

- (1) ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
- (2) ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, paires ;
- (3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$
- (4) ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(-1) = -f(1)$
- (5) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 0\}$
- (6) $\{u_n, n \in \mathbb{N} : u_0 \leq u_2\}$
- (7) $\{u_n, n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$

Exercice 4. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, tels que $P(1) + P'(0) = 0$ est un sous-espace vectoriel.

Exercice 5. Soient $\vec{v}_1 = (1, 2, 3, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 2, 3)$, $\vec{v}_3 = (2, 3, 4, -3)$. Soient $F_1 = \{\vec{v}_1\}$, $F_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $F_3 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Soient $\vec{w}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{w}_2 = (1, -1, 1, -1)$, $\vec{w}_3 = (-3, -4, -5, 6)$.

- (1) Est-ce que $\vec{w}_i, i = 1, 2, 3$ est une combinaison linéaire des vecteurs dans F_1, F_2 ou F_3 ?
- (2) Déterminer $L(F_i), i = 1, 2, 3$.
- (3) Déterminer toutes les manières d'écrire $(0, 0, 0, 0)$ et $(1, 3, 5, 3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs de F_3 .

Exercice 6. Montrer que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $V = L(\{(-2, 0, 0)\})$ sont en somme directe.

Exercice 7. Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + z = 0$. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une famille génératrice.

Exercice 8. Montrer que $\{1, x, x^2, \dots, x^d\}$ engendre l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à d .

Exercice 9. Soit S l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

Pourquoi S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Donner une famille génératrice.

Exercice 10. Montrer que si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre, alors $\{\vec{u}, \vec{v} + \vec{u}\}$ est libre.

Exercice 11. Soit $F = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$. Donner les coordonnées de $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ dans cette famille.

Exercice 12. Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + z = 0$ (déjà étudié). Donner une base.

Exercice 13. Pour chacune des familles suivantes dire si elle constitue une famille libre, génératrice ou une base de $\mathbb{R}^2$:

- (1) $F_1 = \{(2, 1), (4, 1)\}$

$$(2) F_2 = \{(-1, 2), (4, 3), (6, -1)\}$$

$$(3) F_3 = \{(2, -3), (1, 5), (0, 0)\}$$

$$(4) F_4 = \{(1, 1)\}$$

Exercice 14. Montrer que $(2, 1, 1), (1, 3, 1), (-2, 1, 3)$ constituent une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire les coordonnées de $(1, 1, 1)$ dans cette base.

Exercice 15. Soit $U = L(\{\vec{u}_1 = (1, 2, -1, 3), \vec{u}_2 = (2, 4, 1, -2), \vec{u}_3 = (3, 6, 0, 1)\})$. Soit $W = L(\{\vec{w}_1 = (1, 2, -4, 11), \vec{w}_2 = (2, 4, -5, 14)\})$. Quelle est la dimension de W ? Montrer que $U = W$; en donner une base.

Exercice 16. En $\mathbb{R}^4$ on considère $\vec{x}_1 = (1, 0, 1, 0), \vec{x}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{x}_3 = (1, 1, 1, 0), \vec{x}_4 = (0, 1, 1, 0)$. On pose $U_1 = Vect\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$, $U_2 = Vect\{\vec{x}_3, \vec{x}_4\}$. Chercher une base de $U_1 + U_2$. En déduire la dimension de $U_1 \cap U_2$.

Exercice 17. Soit $F = \{1 + x + x^2 + x^3, 1 - x - x^3, 1 - x^2 - x^3, 3 - x^3\}$. Est-ce que F génère l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3? F est une famille libre dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 7? Donner une base de $L(F)$.

Exercice 18. Soient $\vec{v}_1 = (1, 2, -3, 4, 0, 1), \vec{v}_2 = (1, 3, -4, 6, 5, 4), \vec{v}_3 = (3, 8, -11, 16, 10, 9)$. Ces vecteurs sont-ils libres? Quelle est la dimension de $L(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\})$? Donner une base.

Exercice 19. Déterminer le rang de l'ensemble des quatre vecteurs suivants : $(1, -1, 2, 0), (2, 1, -1, 1), (0, 1, 2, 3), (3, -1, -, 1)$.