Cours de mathématiques avancées - Magistère d'économie

TD sur les espaces vectoriels

Exercice 1. Déterminer a, b tels que $(1, -1, a, b)$ appartienne à $L\{(1,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

Exercice 2. A quelle condition une droite du plan est-elle un sous-espace vectoriel ?

Exercice 3. Dire si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels :

(1) ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
(2) ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, paires ;
(3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$
(4) ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(-1) = -f(-1)$
(5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 0\}$
(6) $\{u_n, n \in \mathbb{N} : u_0 \leq u_2\}$
(7) $\{u_n, n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$

Exercice 4. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, tels que $P(1) + P'(0) = 0$ est un sous-espace vectoriel.

Exercice 5. Soient $\vec{v_1} = (1,2,3,0)$, $\vec{v_2} = (0,1,2,3)$, $\vec{v_3} = (2,3,4,-3)$. Soient $F_1 = \{\vec{v_1}\}$, $F_2 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$, $F_3 = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$. Soient $\vec{w_1} = (1,1,1,1)$, $\vec{w_2} = (1,-1,1,-1)$, $\vec{w_3} = (-3,-4,-5,6)$.

(1) Est-ce que $\vec{w_i}, i = 1,2,3$ est une combinaison linéaire des vecteurs dans F_1, F_2 ou F_3 ?
(2) Déterminer $L(F_i), i = 1,2,3$.
(3) Déterminer toutes les manières d'écrire $(0,0,0,0)$ et $(1,3,5,3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs de F_3.

Exercice 6. Montrer que $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $V = L(\{(-2,0,0)\})$ sont en somme directe.

Exercice 7. Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + z = 0$. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une famille génératrice.

Exercice 8. Montrer que $\{1, x, x^2, ..., x^d\}$ engendre l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à d.

Exercice 9. Soit S l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

Pourquoi S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Donner une famille génératrice.

Exercice 10. Montrer que si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre, alors $\{\vec{u}, \vec{v} + \vec{u}\}$ est libre.

Exercice 11. Soit $F = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$. Donner les coordonnées de $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ dans cette famille.

Exercice 12. Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + z = 0$ (déjà étudié). Donner une base.

Exercice 13. Pour chacune des familles suivantes dire si elle constitue une famille libre, génératrice ou une base de $\mathbb{R}^2$:

(1) $F_1 = \{(2,1),(4,1)\}$

(2) $F_2 = \{(-1,2),(4,3),(6,-1)\}$
(3) $F_3 = \{(2,-3),(1,5),(0,0)\}$
(4) $F_4 = \{(1,1)\}$

Exercice 14. Montrer que $(2,1,1),(1,3,1),(-2,1,3)$ constituent une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire les coordonnées de $(1,1,1)$ dans cette base.

Exercice 15. Soit $U = L(\{\vec{u_1} = (1,2,-1,3), \vec{u_2} = (2,4,1,-2), \vec{u_3} = (3,6,0,1)\})$. Soit $W = L(\{\vec{w_1} = (1,2,-4,11), \vec{w_2} = (2,4,-5,14)\})$. Quelle est la dimension de W ? Montrer que $U = W$; en donner une base.

Exercice 16. En $\mathbb{R}^4$ on considère $\vec{x_1} = (1,0,1,0)$, $\vec{x_2} = (0,1,0,0)$, $\vec{x_3} = (1,1,1,0)$, $\vec{x_4} = (0,1,1,0)$. On pose $U_1 = Vect\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}$, $U_2 = Vect\{\vec{x_3}, \vec{x_4}\}$. Chercher une base de $U_1 + U_2$. En déduire la dimension de $U_1 \cap U_2$.

Exercice 17. Soit $F = \{1 + x + x^2 + x^3, 1 - x - x^3, 1 - x^2 - x^3, 3 - x^3\}$. Est-ce que F génère l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 ? F est une famille libre dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 7 ? Donner une base de $L(F)$.

Exercice 18. Soient $\vec{v_1} = (1,2,-3,4,0,1)$, $\vec{v_2} = (1,3,-4,6,5,4)$, $\vec{v_3} = (3,8,-11,16,10,9)$. Ces vecteurs sont-ils libres ? Quelle est la dimension de $L(\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\})$? Donner une base.

Exercice 19. Déterminer le rang de l'ensemble des quatre vecteurs suivants : $(1,-1,2,0)$, $(2,1,-1,1)$, $(0,1,2,3)$, $(3,-1,-1,1)$.