

Cours de mathématiques avancées - Magistère d'économie

TD sur les applications linéaires

1. APPLICATIONS LINÉAIRES - THÉORÈME SUR LES DIMENSIONS

Exercice 1. Soit

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x - z, 2x + y - 3z, -y + 2z)\end{aligned}$$

Trouver une base de $\text{Ker}\varphi$ et une base de $\text{Im}(\varphi)$.

Exercice 2. Soit

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) &\rightarrow (x - z, y - t, x + y - z - t, 2x + 3y - 2z - 3t)\end{aligned}$$

- (1) Trouver une base de $\text{Ker}\varphi$.
- (2) Montrer que $\{\vec{e}_1 = (1, 0, 1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 1), \vec{e}_3 = (1, 0, 2, 0), \vec{e}_4 = (0, 1, 0, 2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
- (3) Montrer que $\{\varphi(\vec{e}_3), \varphi(\vec{e}_4)\}$ est une base de $\text{Im}(\varphi)$.
- (4) φ est-elle injective? Surjective? Bijective?
- (5) Déterminer un sous-espace A de $\mathbb{R}^4$ tel que la restriction de φ à A soit injective.

Exercice 3. Dans l'espace des polynômes, on considère l'application der , de dérivation d'un polynôme.

- (1) der est-elle linéaire?
- (2) Trouver $\text{Im}(der)$.
- (3) Trouver $\text{Ker}(der)$.
- (4) Est-ce que der est un isomorphisme?

Exercice 4. Dans l'espace des polynômes, on considère l'application dec , qui associe à un polynôme $P(x)$ le polynôme $P(x + 1)$.

- (1) Trouver $\text{Im}(dec)$.
- (2) Trouver $\text{Ker}(dec)$.
- (3) Est-ce que dec est un isomorphisme? Si oui, quelle est sa réciproque?

2. APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Exercice 5. En $\mathbb{R}^3$ on considère la base canonique et la seule application linéaire telle que $\varphi(e_i) = f_i$, où $\vec{f}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{f}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{f}_3 = (2, 1, 1)$.

- (1) Ecrire la matrice A de cette application linéaire.
- (2) Décrire $\text{Im}(\varphi)$, $\text{Ker}(\varphi)$.

Exercice 6. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y = 0, x - y + t + z = 0\}$.

- (1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel donné par le noyau d'une application linéaire. Exprimer la matrice correspondante à l'application linéaire.
- (2) Calculer la dimension de F .

Exercice 7. On considère l'application der de dérivation d'un polynôme de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 dans lui-même.

- (1) Ecrire la matrice de der dans la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.
- (2) der est-elle injective? Surjective? Bijective?

(3) Quelle est la dimension de $Im(der)$? Et de $Ker(der)$?

Exercice 8. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x + 2y + 3z, 2x + 4y + 6z, -x + y + 3z, 3x - 2y - 7z) \end{aligned}$$

- (1) Est-ce que φ est surjective?
- (2) Ecrire la matrice associée à φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
- (3) Décrire $Im(\varphi)$ et calculer sa dimension.
- (4) Décrire $Ker(\varphi)$.

Exercice 9. Dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on considère l'application dec , qui associe à un polynôme $P(x)$ le polynôme $P(x+1)$.

- (1) Ecrire la matrice A de dec dans la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.
- (2) En utilisant le point précédent, calculer l'image de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$.
- (3) Montrer que la famille $\{1, 1+x, 1+2x+x^2, 1+3x+3x^2+x^3\}$ forme une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Exercice 10. En $\mathbb{R}^3$, soit $\varphi(x, y, z) = A(x, y, z)^T$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. φ est-elle injective? Surjective? Donner une base de $Ker(\varphi)$ et une base de $Im(\varphi)$.

Exercice 11. En $\mathbb{R}^3$, soit $\varphi(x, y, z) = A(x, y, z)^T$, où $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. φ est-elle injective? Surjective? Donner une base de $Ker(\varphi)$ et une base de $Im(\varphi)$.

3. MATRICES ; RETOUR SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 12. Soit $m \neq 0$. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$

- (1) Calculer $M^2 - M - 2I$. En utilisant le déterminant, déduire que M est inversible.
- (2) Exprimer M^{-1} en fonction de M et de I et finalement trouver l'expression de M^{-1} .

- (3) Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

Exercice 13. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ donnés. Calculer les solutions de $\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$ en écrivant ce système sous forme matricielle.

Exercice 14. Résoudre le système $\begin{cases} tx - y = 2 \\ 2tx + y = 0 \\ (t+1)y = 2 \end{cases}$ en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. On considère $AX = (a, b, c)^T$. Montrer que soit ce système n'a aucune solution, soit il admet une infinité de solutions de la forme $\lambda(1, -1, 2) + \vec{\omega}$, où $A\vec{\omega} = (a, b, c)^T$.
Suggestion : Reprendre l'exercice 11.

Exercice 16. Utiliser le déterminant pour montrer que $(4, -2, -2), (-1, -3, 2), (-3, 2, 2)$ sont linéairement indépendants.

Exercice 17. Soient P, M deux matrices carrées, soit P inversible. Montrer que la trace de M est égale à la trace de $P^{-1}MP$.

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ b-1 & b & b+1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que le déterminant de cette matrice est un multiple de ab .

Exercice 19. Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que $\det(-A) = (-1)^n \det A$.

Exercice 20. Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

4. CHANGEMENT DE BASE

Exercice 21. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la base $\tilde{B} = \{(1, 0, 2), (2, 1, -1), (3, 0, 7)\}$. Ecrire les coordonnées de (x, y, z) dans cette base.

Exercice 22. Soit E la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $F = \{\vec{f}_1 = (1, 0, 1), \vec{f}_2 = (0, 1, 1), \vec{f}_3 = (1, 1, 1)\}$. Calculer la matrice de passage de E à F et puis de F à E . Soit $X = (a, b, c)$ un vecteur exprimé dans E . L'exprimer dans F . Soit $Y = (a', b', c')$ un vecteur exprimé dans F . L'exprimer dans E .

Exercice 23. En $\mathbb{R}^2$, on considère la base canonique. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\rightarrow (x_1 - 2x_2, 4x_2 - 2x_1) \end{aligned}$$

- (1) Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique.
- (2) Les vecteurs $2\vec{e}_2 - \vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ constituent une base B' de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de φ dans cette base.

Exercice 24. Dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, soit φ l'application qui associe à P le polynôme $(1-x)P'(x) - 2P(x)$.

- (1) Déterminer $\text{Ker}(\varphi), \text{Im}(\varphi)$.
- (2) Montrer que $\tilde{B} = \{1, x, x^2 - 1\}$ est une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

5. DIAGONALISATION/TRIGONALISATION D'UNE MATRICE

Exercice 25. Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 26. Soit M une matrice carrée. Soit λ_0 une valeur propre et supposons que $\text{Ker}(M - \lambda_0 I_n)$ ait dimension $n - r$. Montrer que le rang de $M - \lambda_0 I_n$ vaut r .

Exercice 27. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 13 & -23 \\ 13 & 4 & 6 \\ -23 & 6 & 17 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 28. Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -11 & -5 & -33 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable et trouver une matrice diagonale D et une matrice de passage P telles que $A = PDP^{-1}$

Exercice 29. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (1) Quel est le rang de A ? En déduire que 0 est une valeur propre.
- (2) Calculer le polynôme caractéristique et déduire que A est diagonalisable.
- (3) Diagonaliser A .

Exercice 30. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 31. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 32. En $\mathbb{R}^3$ on considère la base canonique. Ecrire toutes les applications linéaires non injectives telles que $T(e_1) = e_1 + e_3$, $T(e_2) = e_2$. Parmi ces applications, chercher celles avec valeur propre 2.

Exercice 33. Dans l'espace des polynômes, on considère l'application "dérivation". Montrer que 0 est la seule valeur propre.

Exercice 34. Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.