

Cours de mathématiques avancées - Magistère d'économie

TD sur les espaces euclidiens

Exercice 1. On considère

- (1) $\phi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_1(x, y) = \pi xy$.
- (2) $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \pi x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2$.
- (3) $\phi_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_3((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_3 y_2 + x_2 y_3 + 2x_3 y_3$.
- (4) $\phi_4 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_4((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1 y_3 + 2x_1 y_1 - x_2 y_1 - 2x_3 y_3 + 7x_1 y_4$

Donner la matrice associée dans la base canonique. Donner la matrice dans les bases suivantes :

- (1) $\{(2)\}$
- (2) $\{(1, 1), (1, 2)\}$
- (3) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$
- (4) $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\}$

Exercice 2. On considère

- (1) $\phi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_1(x, y) = \pi xy$.
- (2) $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \pi x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2$.
- (3) $\phi_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_3((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_3 y_2 + x_2 y_3 + 2x_3 y_3$.
- (4) $\phi_4 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_4((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1 y_3 + 2x_1 y_1 - x_2 y_1 - 2x_3 y_3 + 7x_1 y_4$

Dire si ces formes sont dégénérées, symétriques. Pour les formes symétriques, appliquer le critère de Sylvester, pour déterminer si elles sont définies et positives. Pour les autres utiliser la définition.

Exercice 3. Soit $\mathcal{C}([0, 1])$ l'espace vectoriel des applications continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\phi : \mathcal{C}([0, 1]) \times \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(f, g) = \int_0^1 (1+t)f(t)g(t)dt$. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 4. Soit $\phi : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.

Montrer que ϕ est un produit scalaire. Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique.

Exercice 5. Soit $\mathcal{C}([0, 1])$ l'espace vectoriel des applications continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\phi : \mathcal{C}([0, 1]) \times \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(f, g) = \int_0^1 (1+t)f(t)g(t)dt$. Les fonctions $f(t) = t + 2$ et $g(t) = t^2 - 2t - 3$ sont-elles orthogonales ? La fonction f est-elle de norme 1 ?

Exercice 6. Soit $\phi : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$.

- (1) Montrer que ϕ est un produit scalaire.
- (2) Le sous-espace $\mathbb{R}_3[x]$, muni de la restriction de ϕ , est-il un espace euclidien ?
- (3) La base $\{1, x, x^2, x^3\}$ est-elle orthogonale ?
- (4) Déterminer tous les vecteurs de $\mathbb{R}_3[x]$ orthogonaux à x^2 .

Exercice 7. Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, muni du produit scalaire $\phi(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$. Montrer que $F = \{1, \cos(t), \cos(2t), \dots, \sin(t), \sin(2t), \dots\}$ est une famille orthogonale.

Exercice 8. Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ définie, par rapport à la base canonique, par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Écrire l'expression de ϕ dans la base canonique et vérifier que ϕ est un produit scalaire.

Exercice 9. Soit $\phi(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ définie pour tout $x, y \in \mathbb{R}^3$. Écrire la matrice de ϕ dans la base canonique et vérifier que ϕ est un produit scalaire.

Exercice 10. Soient $f_1 = (1, 0, 1)$, $f_2 = (-1, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$. Orthonormaliser cet ensemble de vecteurs en utilisant le théorème de Gram-Schmidt.

Exercice 11. Soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (1) Montrer que R_θ est orthogonale.
- (2) Que peut-on dire des vecteurs colonnes de R_θ ?
- (3) Que représente géométriquement $X \rightarrow R_\theta X$?

Exercice 12. Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Soit ϕ l'application bilinéaire dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- (1) Que vaut $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$?
- (2) Montrer que M est diagonalisable.
- (3) Montrer que 1 est une valeur propre (utiliser le théorème du rang).
- (4) Quelle est l'autre valeur propre ?
- (5) Décrire les sous-espaces propres.
- (6) Trouver une base orthonormée du sous-espace propre E_1 .
- (7) Donner une base orthonormée de vecteurs propres de M .
- (8) Écrire ϕ dans cette nouvelle base.

Exercice 13. Soit ϕ l'application bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) Calculer $\phi((1, 1, 5), (-1, 2, 1))$.
- (2) Donner la signature de ϕ .
- (3) Calculer la matrice de ϕ dans la base $F = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (0, -1, 1)\}$.

Exercice 14. Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + 56z^2 - 4xy + 14xz - 36yz$.

- (1) Montrer qu'il s'agit d'une forme quadratique.
- (2) Donner la forme polaire.
- (3) Écrire la matrice associée à q dans la base canonique.
- (4) Donner la signature de q .
- (5) Décrire la matrice de q dans la base $B = \{\vec{u}_1 = \vec{e}_1, \vec{u}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{u}_3 = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$.
- (6) Existe-il des vecteurs $X \in \mathbb{R}^3$ non nuls tels que $q(X) = 0$?

Exercice 15. Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3$.

- (1) Est-ce que q est définie ?
- (2) Ecrire la matrice associée à q dans la base canonique.
- (3) Diagonaliser cette matrice.
- (4) Est-ce que q est positive ?
- (5) Exprimer q dans la base des vecteurs propres, et ensuite dans la base canonique, comme somme de carrés.

Exercice 16. Appliquer la méthode de Gauss à la forme

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 6xy + 4xz + 16yz + 4yt + 8zt.$$

Calculer la signature.