

UNIVERSITÉ DE PARIS I
Magistère d'Economie, Première année
Cours de Microéconomie
Année universitaire 2025-2026
Exercices de la partie I

Les exercices marqués d'une ** sont corrigés en priorité. Les exercices marqués * sont corrigés en ligne.

Le producteur

Exercice 1

A**. Soit une entreprise dont la technologie est représentée par la fonction de production suivante:

$$y = x_1^\alpha x_2^\beta$$

où y désigne la quantité d'output produite avec x_1 unités d'input 1 et x_2 unités d'input 2. Les paramètres α et β sont tels que: $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On note c_1 et c_2 les coûts unitaires des inputs 1 et 2.

1. Représenter une isoquante associée à cette fonction de production. Commenter.
2. Calculer l'élasticité de substitution.
3. Déterminer les demandes conditionnelles d'inputs et la fonction de coût. En déduire le coût moyen. Commenter.

B**. Soit une entreprise dont la fonction de coût est:

$$C(c_1, c_2; y) = y^\alpha \left(c_1^\beta + c_2^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

où y désigne la quantité d'output, c_1 et c_2 désignent les coûts unitaires des inputs 1 et 2 et $\alpha > 0$ et $\beta < 1$.

1. Déterminer les demandes conditionnelles d'inputs.
2. En déduire l'élasticité de substitution.
3. Pouvez-vous déterminer la fonction de production associée à cette fonction de coût?

Exercice 2**

L'objectif de cet exercice est de construire un modèle simple susceptible d'étudier l'effet du progrès technique et de l'offre de travail sur les inégalités de revenu en France ces dernières décennies. On considère pour cela une entreprise produisant un bien sur un marché en concurrence parfaite avec une technologie représentée par la fonction suivante:

$$F(H, L) = [(A_h H)^\rho + (A_l L)^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$$

où H désigne le nombre d'heures de travail qualifié et L le nombre d'heures de travail non qualifié. Les deux paramètres A_h et A_l sont positifs. Le paramètre ρ est inférieur à 1 ($\rho \leq 1$). On note w_l le coût d'une heure de travail non qualifié et w_h le coût d'une heure de travail qualifié.

1. Expliquer pourquoi les deux paramètres A_h et A_l sont appelés paramètres de progrès technique.

2. Déterminer la demande relative de travail $\frac{H^d}{L^d}$ où l'on note H^d et L^d les demandes conditionnelles de travail qualifié et non qualifié. Calculer l'élasticité de substitution travail qualifié-travail non qualifié.

3. Déterminer l'impact d'une augmentation des paramètres A_h et A_l sur la demande relative de travail en considérant le cas d'une augmentation du rapport $\frac{A_h}{A_l}$. Expliquer. On appelle une telle augmentation "progrès technique biaisé". Expliquer.

4. On considère les marchés du travail qualifié et non qualifié parfaitement concurrentiels. En supposant que les offres de travail sont inélastiques et égales à $\bar{H}$ et $\bar{L}$, déterminer le salaire relatif $\frac{w_h}{w_l}$ d'équilibre. Quel est l'impact du progrès technique biaisé sur le niveau du salaire relatif? Quel est l'impact d'une augmentation de $\frac{\bar{H}}{\bar{L}}$? Expliquer.

5. A partir de données sur les travailleurs français ("Contribution ceilings and the Incidence of Payroll Taxes", De Economist, 2017, "Alvaredo, F., Breda, T., Roantree B. et E. Saez, disponible sur l'EPI), les auteurs ont essayé d'expliquer l'évolution temporelle de la variable $\frac{w_h}{w_l}$.

(i) Ils proposent d'estimer l'équation suivante (équation 2 de l'article):

$$\ln \left(\frac{w_{h,t}}{w_{l,t}} \right) = \frac{1}{\sigma} \left[(\sigma - 1) \ln \left(\frac{A_{h,t}}{A_{l,t}} \right) - \ln \left(\frac{\bar{H}_t}{\bar{L}_t} \right) \right]$$

Expliquez en quoi le modèle développé aux questions précédentes permet d'obtenir la même équation.

(ii) Ils supposent par ailleurs que le progrès technique suit une dynamique telle que $\ln \left(\frac{A_{h,t}}{A_{l,t}} \right) = \gamma_0 + \gamma_1 t$ où t désigne le temps et γ_0 et γ_1 deux paramètres.

Montrer qu'alors l'équation de la question (i) peut se réécrire:

$$\ln \left(\frac{w_{h,t}}{w_{l,t}} \right) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 \ln \left(\frac{\bar{H}_t}{\bar{L}_t} \right) + \beta_3$$

(iii) L'estimation des paramètres du modèle donne $\beta_2 = -0,29$ et $\beta_1 > 0$.

Calculer l'élasticité de substitution.

6. Comment les auteurs parviennent à réconcilier le rôle du progrès technique biaisé et l'évolution des inégalités de rémunération en France? Pour répondre à cette question, vous vous appuyerez sur l'article et en particulier sur les pages 1 à 9 et 19 à 20.

Exercice 3**

Historiens et économistes sont habitués à voir les différents types d'énergie comme des substituts, le pétrole remplaçant par exemple le charbon. Dans son *Histoire des symbioses énergétiques et matérielles* publiée par les Annales des mines en janvier 2021, l'historien Jean-Baptiste Fressoz met en avant une série de faits qui semblent mettre cette approche en question. Ainsi,

au cours des deux derniers siècles, l'éventail des matières premières utilisées s'élargit sans cesse, et chacune des matières est consommée en quantités croissantes. Les matières premières ne deviennent jamais obsolètes et les processus de substitution sont largement compensés par les effets rebonds ou les réorientations d'usage. Entre 1900 et 2015, le poids total des matières premières consommées par l'économie mondiale a été multiplié par 12. [...] Entre 1960 et 2010, sur les soixante-neuf principales matières premières, seules six ont vu leur consommation mondiale décliner. Et pour cinq d'entre elles, cette décroissance est due à leur toxicité et à des interdictions prononcées au plan national. Malgré la crise environnementale et la crise financière de 2008, la consommation matérielle mondiale s'accélère.

En fait, la microéconomie du producteur montre que la baisse du prix du charbon conduit à une hausse de l'utilisation de l'ensemble des énergies.

On considère une technologie qui permet de produire y unités d'un bien final à partir de capital k et de travail ℓ . On suppose que $y = k^\alpha \ell^\beta$, avec α et β deux nombres réels positifs tels que $\alpha + \beta < 1$.

1. Soient r et w le prix unitaire du capital et le salaire du travail, respectivement. Déterminez les demandes conditionnelles des deux facteurs que vous noterez $K(w, r, y)$ et $L(w, r, y)$. Quel est l'effet d'une hausse de w sur la demande $K(w, r, y)$? Le capital et le travail sont-ils substitués ou compléments ?

L'entreprise se comporte de façon concurrentielle en considérant les prix comme donnés. Le prix du bien final est égal à 1.

2. Ecrire le profit de la firme en fonction de k , ℓ et des prix des facteurs et déterminez la combinaison de capital et de travail qui maximisent le profit.

3. Comment la quantité de capital change-t-elle avec le salaire ? Ce résultat s'accorde-t-il avec celui obtenu question 1 ?

4. Ecrire le profit de la firme en fonction de y , r et w en utilisant les demandes conditionnelles trouvées à la question 1.

5. Déterminez l'offre de biens que vous noterez $Y(r, w)$.

6. Comment l'offre réagit-elle à une hausse du salaire ?

7. Décomposez alors l'impact d'une hausse du salaire sur la demande de capital de sorte à concilier les résultats obtenus Questions 1 et 3.

8. (Sans calculs) Décrivez comment l'entreprise ajuste finalement la quantité de capital qu'elle utilise lorsque le salaire augmente. Faites le lien avec le fait stylisé d'une hausse de l'utilisation des énergies substituables mis en avant par Jean-Baptiste Fressoz.

Exercice 4**

On considère une firme qui produit un seul output avec une technologie de production utilisant N inputs ($N \geq 2$). A long terme la firme peut adapter la quantité de tous les inputs. On note $C(w, q)$ la fonction de coût de long-terme avec q la quantité d'output et $w = (w_1, \dots, w_N)$ où w_i est le coût unitaire de l'input i . On suppose cette fonction convexe en q . A court terme la quantité d'input 1 est fixe. Lorsque la firme peut modifier la quantité de tous les inputs (long-terme), la firme maximisatrice de

profit souhaite offrir une quantité $\bar{q}$ pour un prix $\bar{p}$. Montrez qu'une augmentation marginale du prix par rapport à $\bar{p}$ induit une plus forte augmentation de l'offre à long terme qu'à court terme.

Exercice 5*

On considère la production d'un unique bien avec la fonction de production suivante:

$$Y = \left[(A_K K)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (A_L L)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

où L mesure le nombre d'heures de travail et K le stock de capital. Le paramètre σ est tel que $\sigma > 0$. Les paramètres A_K et A_L sont positifs.

Tous les marchés sont concurrentiels. Le prix de l'output est normalisé à 1.

1. Calculer l'élasticité de substitution associée à cette fonction de production.

On note w la rémunération unitaire du travail et r la rémunération unitaire du capital et w^* et r^* les rémunérations d'équilibre. On suppose que l'offre de travail et de capital sont inélastiques et respectivement égales à $\bar{L}$ et $\bar{K}$.

2. Calculer la part de la rémunération du travail ($s_L = \frac{w^* L}{Y}$) et la part de la rémunération du capital ($s_K = \frac{r^* K}{Y}$) lorsque les marchés du travail et du capital sont à l'équilibre.

3. Interpréter une augmentation des paramètres A_L et A_K . Montrer que l'élasticité de w^* par rapport à A_L est égale à $1 - \frac{s_K}{\sigma}$. Quel est son signe? Comment expliquer ce résultat? Quel est son signe si on retient des valeurs raisonnables pour les paramètres soit $\sigma = 0,5$ et $s_K = 0,4$?

4. De la même manière, montrer que l'élasticité de w^* par rapport à A_K est égale à $\frac{s_K}{\sigma}$ et commenter ce résultat.

5. Selon vous, le processus d'automatisation des tâches au travail s'apparente-t-il à une augmentation de A_L , de A_K ou d'aucun des deux?

Les économistes, insatisfaits du modèle précédent pour modéliser l'automatisation des tâches, modélisent la production de la manière suivante. La production de l'output nécessite l'accomplissement de N tâches. Une tâche i se traduit par la production de $y(i)$ services ou biens intermédiaires. Les tâches de 1 à I peuvent être automatisées et les autres (de $I+1$ à N) ne peuvent être accomplies qu'avec du travail. La technologie d'une tâche i qui peut être automatisée est: $y(i) = k(i) + l(i)$ où $l(i)$ et $k(i)$ sont les quantités de travail et de capital allouées à la tâche i . Une tâche i qui ne peut pas être automatisée est uniquement réalisée avec du travail avec $y(i) = \gamma l(i)$ avec $0 < \gamma < 1$.

La production d'output est égale à:

$$Y = \left(\sum_{i=1}^N y(i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

avec $0 < \sigma < 1$.

1. Interpréter la fonction de production de l'output.

2. Montrer que si $\frac{w}{r} > 1$, toutes les tâches qui peuvent être automatisées sont réalisées avec du capital uniquement.

On supposera à présent que $\frac{w}{r} > 1$.

3. Montrer que la demande de capital pour la tâche i est égale à: $r^{-\sigma} S^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$ avec $S = \sum_{i=1}^N y(i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$. En déduire la rémunération du capital à l'équilibre en fonction de S et de l'offre de capital égale à $\bar{K}$.

4. Déterminez de la même manière la rémunération du travail à l'équilibre en fonction de S et de l'offre de travail égale à $\bar{L}$.

5. A quelle condition, a-t-on $\frac{w}{r} > 1$ à l'équilibre? On supposera cette condition satisfaite.

6. Après avoir déterminé $k(i)$ et $l(i)$, en déduire que la production d'équilibre peut s'écrire:

$$Y = \left[I^{\frac{1}{\sigma}} \bar{K}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (N - I)^{\frac{1}{\sigma}} (\gamma \bar{L})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

7. Commenter cette fonction de production en montrant comment la modélisation utilisée endogénéise d'une certaine manière certains paramètres de la fonction de production de la partie précédente.

8. Calculer la part de la rémunération du travail (vous pouvez utiliser les résultats de la partie précédente) que l'on notera s_L .

9. Quel est l'effet d'une augmentation de I sur la production Y et sur s_L ?

10. Discuter l'effet d'une augmentation de I sur la rémunération du travail en remarquant que $w^* \bar{L} = s_L Y$.

11. Conclure en expliquant en quoi ce modèle est plus satisfaisant que le précédent pour analyser l'effet de l'automatisation des tâches.

Exercice 6*

L'objectif de cet exercice est de préciser certains déterminants du temps de travail au sein de la firme. Pour cela nous construisons un modèle dans lequel nous distinguons heures travaillées et nombre de travailleurs.

On considère une entreprise maximisatrice de profit qui souhaite produire Y unités d'un bien. La production ne dépend que du nombre d'heures de travail efficace. Ce nombre d'heures efficaces dépend du nombre de travailleurs embauchés (noté N), du nombre d'heures effectuées par chaque travailleur (noté H) et de l'efficacité du travailleur. On supposera que lorsqu'un travailleur effectue H heures, le nombre d'heures efficaces est égal à $e(H) = H^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$. La production de l'entreprise est donc égal à $G(N.e(H))$ où F est une fonction croissante.

Embaucher un travailleur occasionne un coût fixe égal à F . Par ailleurs, le salaire nominal horaire est égal à w . La durée légale du travail est égale à T heures de sorte que si l'entreprise souhaite faire travailler le travailleur au delà des T heures, le salaire horaire est égal à $w(1 + x)$ avec $x > 0$.

1. Calculer l'élasticité de $e(H)$ par rapport à H .

2. Déterminer le coût d'un travailleur qui travaille H heures. En déduire le programme de la firme.

3. (i) Montrer que si l'on note L le nombre total d'heures efficaces, le programme de la firme s'écrit:

$\min_{H,L} WL$ sous contrainte $G(L) \geq Y$ avec W le coût d'une heure de travail efficace que l'on précisera.

(ii) En déduire que la résolution de ce programme revient à déterminer H qui minimise le coût d'une heure efficace.

4. (i) Supposons que le travailleur travaille un nombre d'heures inférieur ou égal à T .

Montrer que le coût d'une heure efficace est minimal en H^* avec:

$$H^* = \begin{cases} \frac{F\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{w} & \text{si } \frac{Tw}{F} > \frac{\alpha}{1-\alpha} \\ T & \text{si } \frac{Tw}{F} \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \end{cases}$$

Quel est l'effet d'une augmentation de α sur H^* ? Expliquer.

(ii) Supposons que le travailleur travaille un nombre d'heures supérieur ou égal à T .

Montrer que le coût d'une heure efficace est minimal en H^* avec:

$$H^* = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{F-xwT}{w(1+x)} & \text{si } \frac{Tw}{F} < \frac{\alpha}{1+x-\alpha} \\ T & \text{si } \frac{Tw}{F} \geq \frac{\alpha}{1+x-\alpha} \end{cases}$$

5. En déduire le nombre d'heures travaillées qui minimise le coût d'une heure efficace.

6. Quel est l'effet d'une réduction de la durée légale du travail sur le nombre optimal d'heures travaillées? Sur la demande de travailleurs? Expliquer.

Exercice 7**

Le Tableau 1, tiré de Goux et Maurin (2000), s'intéresse à la structure de l'emploi par qualification en France. On se concentre sur la demande de travail pour rendre compte des grandes forces que ce tableau met en évidence. On considère une entreprise (représentative) du secteur s choisissant le volume d'emploi L_s^i de qualification i . Elle prend le coût du travail w^i comme donné. Soit

$$y_s = \frac{F_s(L_s)}{A_s},$$

la production de ce secteur, avec $L_s = (L_s^i)$ le vecteur des quantités de travail de qualification i employé dans le secteur s , et A_s un indicateur inversement lié au progrès technique. On supposera que F_s est une fonction à rendements d'échelle constant.

1**. Commentez le Tableau 1.

TABLE 1.—CHANGES IN LABOR-DEMAND COMPOSITION BY SEX AND EDUCATION

Educational Level	Structure in 1970	Evolution by Subperiod (%)				Structure in 1993
		1970–1977	1977–1985	1985–1993	1970–1993	
Men						
No diploma	23.4 (0.3)	–25.9 (1.4)	–17.6 (1.8)	–15.1 (2.6)	–48.2 (1.5)	12.1 (0.3)
Vocational degree ^a	36.3 (0.3)	–3.0 (1.2)	–5.0 (1.2)	–11.8 (1.5)	–18.7 (1.4)	29.5 (0.4)
Bac or equivalent ^b	4.5 (0.1)	22.4 (5.0)	–1.7 (3.7)	21.9 (5.5)	46.7 (7.0)	6.6 (0.2)
Bac + 2 years ^c	0.8 (0.1)	43.7 (13.7)	134.2 (16.6)	41.0 (8.6)	374.6 (42.0)	3.9 (0.2)
>Bac + 2 years ^d	2.0 (0.1)	55.6 (9.3)	13.2 (5.6)	44.5 (7.7)	154.4 (16.0)	5.1 (0.2)
Women						
No diploma	8.8 (0.2)	–10.4 (2.8)	–14.5 (2.8)	–1.9 (4.2)	–24.9 (3.1)	6.6 (0.2)
Vocational degree ^a	18.9 (0.3)	17.1 (2.2)	3.6 (1.7)	–9.5 (2.0)	9.7 (2.6)	20.7 (0.4)
Bac or equivalent ^b	3.2 (0.1)	51.2 (7.1)	4.4 (4.2)	41.5 (6.3)	123.2 (11.3)	7.2 (0.2)
Bac + 2 years ^c	1.3 (0.1)	12.1 (8.8)	160.1 (16.1)	31.4 (6.9)	283.1 (27.5)	5.0 (0.2)
>Bac + 2 years ^d	0.8 (0.1)	79.0 (16.9)	51.5 (10.7)	59.3 (10.8)	331.9 (39.9)	3.3 (0.2)
Total	100.0					100.0

Source: FQP surveys 1970, 1977, 1985, and 1993, INSEE.

Field: wage-earners.

Reading: between 1970 and 1993, the share of male workers with no diploma in employment fell by 48.2%. It fell from 23.4% in 1970 to 12.1% in 1993. Employment is measured in months of full-time employment. Standard errors are in parentheses.

^a Vocational training diplomas essentially consist of CEP (*Certificat d'études primaires*, a primary-school leaving diploma, now abolished), CAP (*Certificat d'aptitude professionnelle*) and BEP (*Brevet d'Enseignement Professionnel*).^b Bac is an abbreviation for *Baccalauréat*, which is the advanced high-school leaving diploma, a prerequisite for admission to university and other postsecondary education (not to be confused with the English word bachelor).^c "Bac + 2 years" refers to postsecondary degrees requiring two years of education beyond the *Baccalauréat* (most of them are vocationally oriented diplomas).^d ">Bac + 2 years" are engineering qualifications and bachelor's, master's, and doctoral degrees.

Les données sont à présent anciennes. Vous trouverez des données plus récentes dans "Quarante ans d'évolution de l'offre et de la demande de travail par qualification – Progrès technique, coût du travail et transformation sociale", de D. Goux et E. Maurin en 2019 dans *Economie et Statistiques*.

2**. Montrer que si les rendements d'échelle sont constants, alors la fonction de coût s'écrit $C(y, w) = yc(w)$ où y est la quantité d'output et w le vecteur des coûts des facteurs. En déduire que dans cet exercice, la fonction de coût du secteur s peut s'écrire

$$C_s(w, A_s y_s) = A_s y_s c_s(w)$$

3**. Montrez que la demande de travail de qualification i est:

$$L_s^i = A_s y_s \frac{\partial c_s(w)}{\partial w^i}.$$

4**. Décomposez le changement de l'emploi dL_s^i comme provenant des modifications de la demande de biens finals et du progrès technique d'une part et du coût du travail d'autre part.

5**. On cherche à exprimer la contribution de la demande de biens finals et du progrès-technique en fonction de variables observables par un économiste appliqué.

En utilisant

$$C_s(w, A_s y_s) = \sum_k w^k L_s^k$$

et les résultats des questions 2 et 3, montrez que l'on a :

$$\sum_k w^k dL_s^k = c_s(w) d(A_s y_s).$$

(a) Déduisez-en que la contribution de la demande de biens finals et du progrès-technique à l'évolution de l'emploi de qualification i dans le secteur s peut s'écrire

$$L_s^i \frac{\sum_j w^j dL_s^j}{\sum_k w^k L_s^k}.$$

(b) Déduisez-en la décomposition suivante de l'évolution de l'emploi L_s^i :

$$dL_s^i = L_s^i \frac{\sum_j w^j dL_s^j}{\sum_k w^k L_s^k} + \sum_k (A_s y_s) \frac{\partial^2 c_s(w_s)}{\partial w^i \partial w^k}$$

(c) Montrez qu'un économiste appliqué est alors capable d'isoler la contribution du coût du travail, de la demande de bien et du progrès-technique à l'évolution de l'emploi.

6*. Isolez les impacts respectifs de la demande domestique et du commerce international (importations et exportations).

7*. En rassemblant les résultats précédents, écrivez finalement une décomposition du changement de l'emploi dL_t^i correspondant à celle du Tableau 7, lui aussi tiré de Goux et Maurin (2000).

8*. Commentez le Tableau 7.

TABLE 7.—CHANGES IN RELATIVE LABOR DEMAND: SHIFTS ARISING FROM INTERINDUSTRY JOB REALLOCATIONS VERSUS SHIFTS ARISING FROM RELATIVE LABOR COSTS, 1970–1993

Educational Level	dL_t (in %)	Impact of . . . (in Points)				
		Technical Progress (dL_t^{TP})	Imports (dL_t^{PX})	Exports (dL_t^{EX})	Domestic Consump. (dL_t^{PC})	Relative Labor Costs (dL_t^w)
Men						
No diploma	-48.2 (1.5)	-0.4 (1.4)	3.3 (0.2)	-2.5 (0.1)	-34.2 (0.4)	-14.4 (2.1)
Vocational degree	-18.7 (1.4)	-1.7 (0.8)	-0.7 (0.1)	1.2 (0.1)	-3.9 (0.3)	-13.6 (1.9)
Bac or equivalent	46.7 (7.0)	-4.4 (1.5)	-5.2 (0.4)	5.5 (0.3)	39.1 (0.8)	11.7 (7.2)
Bac + 2 years	374.6 (42.0)	-45.7 (2.3)	-46.2 (1.0)	38.1 (0.7)	202.7 (1.8)	225.7 (42.1)
>Bac + 2 years	154.4 (16.0)	-0.8 (3.5)	-13.8 (0.6)	13.5 (0.6)	113.2 (1.0)	42.3 (16.5)
Women						
No diploma	-24.9 (3.1)	7.3 (1.9)	1.2 (0.2)	-3.2 (0.1)	-28.7 (0.7)	-1.5 (3.8)
Vocational degree	9.7 (2.6)	3.0 (1.2)	1.2 (0.2)	-2.3 (0.1)	9.4 (0.5)	-1.6 (3.0)
Bac or equivalent	123.2 (11.3)	3.6 (1.9)	1.2 (0.3)	-0.4 (0.2)	59.7 (0.9)	59.1 (11.6)
Bac + 2 years	283.1 (27.5)	-19.5 (2.9)	-0.9 (0.4)	1.9 (0.3)	154.8 (1.2)	146.8 (27.8)
>Bac + 2 years	331.9 (39.9)	29.1 (4.0)	-0.6 (0.4)	3.0 (0.4)	154.7 (1.0)	145.7 (40.2)

Source: FQP surveys 1970 and 1993, INSEE.

Field: wage-earners.

Reading: Between 1970 and 1993, the share of dropout male workers in total employment fell by 48.2% (dL_t). Industry asymmetries of technical progress (dL_t^{TP}) contributed -0.4%, exports -2.5% (dL_t^{PX}), and imports +3.3% (dL_t^{PX}), domestic demand for goods and services -34.2% (dL_t^{PC}), and changes in relative labor costs -14.4% (dL_t^w). The income effect (dL_t^{PX}) is negligible and is not represented. Standard errors are in parentheses.

See the note for table 1 for the definition of the educational levels.

Le consommateur

Exercice 1**

On considère un ménage composé de n enfants et d'un adulte qui peut consommer deux biens et l'on note p_h le prix du bien h ($h = 1, 2$). On suppose par ailleurs que les préférences du ménage sont représentées par la fonction suivante:

$$c_1 \ln \left(\frac{x_1}{1+n} - a_1 \right) + c_2 \ln (x_2 - a_2)$$

avec $c_h > 0$ et $c_1 + c_2 = 1$. x_h désigne la quantité de bien h consommée par le ménage.

1. Calculer le taux marginal de substitution entre les deux biens. Quel est l'effet d'une augmentation du nombre d'enfants. Interpréter.

Déterminer la dépense en bien h lorsque le revenu du ménage est égal à $R > p_1 a_1(n+1) + p_2 a_2$.

Comment interpréter les termes $p_1(n+1)a_1$ et $p_2 a_2$? Comment s'interprètent les coefficients c_h ?

2. Calculer l'utilité indirecte du ménage que l'on notera $V(R, p_1, p_2, n)$.

3. On note $e(p_1, p_2, n, u)$ la fonction de dépense d'un ménage avec n enfants. La variable u désigne le niveau d'utilité.

A quoi est égal $V(e(p_1, p_2, n, u), p_1, p_2, n)$? En déduire la fonction de dépense dans le cas où $a_1 = a_2 = 0$.

4. Un ménage sans enfant dispose d'un revenu R . On cherche à déterminer le "coefficient multiplicateur" qui doit être appliqué à ce revenu pour assurer le même bien-être à un ménage avec n enfants. Montrer que ce coefficient est égal à:

$$\frac{e(p_1, p_2, n, u)}{e(p_1, p_2, 0, u)}$$

Calculez un tel coefficient.

Est-il facile d'estimer empiriquement ce coefficient?

Exercice 2**

Soit un consommateur dont les préférences sont représentées par la fonction suivante:

$$U(L, C) = C - \frac{1}{\eta}(T - L)^\eta$$

où l'on note L le temps de loisir et C la quantité d'un bien de consommation. On suppose $\eta > 1$.

Le salaire horaire est égal à w et le prix du bien de consommation est égal à 1. Ce consommateur partage son temps T entre loisir et travail. Le consommateur dispose d'aucun autre revenu que le revenu de son travail.

1. Calculer le Taux Marginal de Substitution consommation loisir. Que vaut-il lorsque L est égal à T ? Que vaut le salaire de réserve? Que vaut le Taux marginal de Substitution lorsque $L = 0$.

2. Déterminer la demande de loisir et la demande de bien de consommation.
3. Déterminer l'offre de travail. Calculer l'élasticité de l'offre de travail par rapport à w . Quel est son signe? Un tel résultat était-il prévisible?

A partir de cette question on se limite à la solution intérieure ($w < T^{\eta-1}$).

5. L'état décide de taxer le revenu du travail au taux t de sorte que lorsque le travailleur travaille l heures, ce travailleur perçoit $(1-t)wl$. Déterminer l'offre de travail après introduction de cette taxe.

6. Calculez les recettes fiscales de l'Etat.

7. Montrer qu'une hausse de t conduit à une baisse des recettes fiscales si:

$$\frac{1}{\eta-1} \geq \frac{1-t}{t}$$

Commenter une telle condition. En supposant que $t = \frac{1}{3}$, la condition précédente vous semble-telle réaliste?

Exercice 3**

Soit un consommateur dont les préférences sont définies sur L biens et représentées par la fonction d'utilité suivante:

$$U(x_1, \dots, x_L) = \left[\sum_{l=1}^L (x_l)^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}} \quad (1)$$

où ρ est un paramètre inférieur à 1 ($0 < \rho < 1$) et x_l désigne la quantité de bien l consommée. On note p_l le prix unitaire du bien l ($l = 1, \dots, L$)

1. Ecrire le programme de minimisation des dépenses du consommateur pour la fonction d'utilité spécifiée par l'équation (1).

Montrer que la solution de ce programme $(x_1^*, \dots, x_L^*)$ est caractérisée par les conditions suivantes:

$$\begin{cases} (x_l^*)^\rho = \left(\frac{p_l}{p_k} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} (x_k^*)^\rho \text{ pour } l = 1 \dots L \text{ et } k \text{ fixé} \\ \sum_{l=1}^L (x_l^*)^\rho = (\bar{U})^\rho \end{cases}$$

où $\bar{U}$ désigne le niveau d'utilité minimal souhaité par l'agent.

En déduire que la demande compensée de bien k est égale à:

$$h_k(p_1, \dots, p_L, U) = U \frac{(p_k)^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left[\sum_{l=1}^L (p_l)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{\frac{1}{\rho}}}$$

Calculer l'élasticité de substitution entre deux biens et interpréter le paramètre ρ .

2. Déterminer la fonction de dépense. En supposant que tous les prix sont égaux, montrer que la fonction de dépense décroît si L augmente. Commenter. Pourquoi peut-on dire que le consommateur a du goût pour la variété?

Exercice 4**

1. On définit un indice J comme permettant de mesurer correctement l'évolution du coût de la vie entre une année t et une année $t + 1$ si l'on peut affirmer que:

- le bien-être du consommateur s'est amélioré entre deux années si et seulement si $\frac{R^{t+1}}{R^t} > J$
- le bien-être du consommateur s'est détérioré entre deux années si et seulement si $\frac{R^{t+1}}{R^t} < J$.

où l'on note R^t le revenu nominal l'année t .

Déterminer un tel indice si les préférences sont représentées par la fonction (1)?

2. A la date t , le consommateur dispose d'un revenu nominal R^t pour acquérir L_t biens. Un bien i est vendu à un prix p_i^t . A la date $t + 1$, le consommateur dispose d'un revenu nominal R^{t+1} pour acquérir L_{t+1} biens vendus aux prix p_i^{t+1} . Le progrès technique s'est traduit par l'arrivée de nouveaux biens ($L_t < L_{t+1}$). Que peut-on dire de l'évolution du bien-être du consommateur entre les deux périodes si les prix restent inchangés et si $R^t = R^{t+1}$? Si $R^t > R^{t+1}$?

3. On se contente parfois de l'indice de Laspeyres suivant:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^L p_i^{t+1} x_i^t}{\sum_{i=1}^L p_i^t x_i^t}$$

où l'on note x_i^t la consommation en bien i à la date t et p_i^t le prix du bien i à la date t .

Montrer que $I \geq J$. Quel type d'erreur peut-on commettre sur l'évolution du coût de la vie en s'en tenant à l'indice I ? Quelle en est la raison?

Exercice 5*

Le partage de la valeur ajoutée se déforme depuis 1980 au détriment des revenus du travail dans la plupart des économies développées. Pour en rendre compte, on s'appuie souvent sur les modifications de la structure de la production, caractérisées par un progrès technique biaisé en faveur du capital. Le financement des entreprises, qui se détournent de l'endettement, viendrait renforcer ce mouvement. Certains avancent aussi que jouent les politiques publiques, par exemple les réformes du marché du travail affaiblissant le pouvoir de négociation des salariés¹. Dans cet esprit, cet exercice cherche à préciser le rôle de la fiscalité sur la consommation dans cette histoire.

PARTIE 1. OFFRE DE TRAVAIL ET CONSOMMATION*

¹On pourra consulter la synthèse de Sophie Piton, accessible depuis <http://ses.ens-lyon.fr>

On considère un consommateur dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité $(c - \bar{c})^{1/2} L^{1/2}$ où c représente la quantité de biens consommés et L le temps de loisir. Le temps de loisir ne peut excéder une dotation temps $T > 0$. Le temps passé à travailler est égal à $\ell = T - L$ avec $0 \leq \ell \leq T$. Le prix d'un bien de consommation est égal à q euros. En notant θ le salaire perçu, le revenu du travail est de $\theta\ell$ euros. La quantité $\bar{c}$ est nécessaire pour satisfaire les besoins vitaux du consommateur : on doit avoir $c \geq \bar{c}$. Les sources de revenu autres que le travail sont résumées dans un revenu monétaire exogène m , $m \geq 0$. On suppose également que

$$\theta T + m > q\bar{c} \quad (2)$$

1. Ecrivez le problème que doit résoudre le consommateur pour choisir sa consommation c et le loisir L .
2. Quelle est la solution c^* et L^* de ce programme lorsque $m - q\bar{c} \leq \theta T$?
3. Que devient cette solution lorsque $m - q\bar{c} > \theta T$?

PARTIE 2. IMPOSITION DES BIENS ET PARTAGE DE LA VALEUR AJOUTÉE

On suppose que l'Etat doit collecter un montant total de recettes fiscales $R > 0$. Il le fait en introduisant une taxe $t = q - p$ sur le bien de consommation, avec p le prix hors-taxe supposé fixé. Il y a deux consommateurs. Le premier représente un travailleur : il ne perçoit aucun revenu autre que ceux du travail, $m = m_1 = 0$. Au contraire, $m = m_2 > 0$ pour le second type, que l'on interprète comme un capitaliste. On suppose que (2) reste vraie pour $m = m_2$.

1. Ecrivez la recette collectée en fonction de q dans chacune des configurations identifiées dans la Partie 1. On notera cette recette par la fonction $R(q)$.
2. Montrez qu'il existe un prix q permettant de collecter R si R reste en deçà d'un plafond (2 reste vraie).
3. Montrez alors qu'il existe un seuil $\bar{R}$ tel que le capitaliste tire tout son revenu du capital si et seulement si $R \leq \bar{R}$. Ecrivez ce seuil en fonction de la dépense $p\bar{c}$ et des revenus θT et m_2 . Commentez.
4. Comment le seuil $\bar{R}$ dépend-il du revenu m_2 ? Commentez.
5. Quel est l'effet, dans cet exercice, de la taxe sur la déformation du partage de la valeur ajoutée ? Vous semble-t-il judicieux d'essayer d'atténuer cette déformation ?

Exercice 6

L'objectif de cet exercice est de montrer que le modèle canonique d'économie urbaine permet de construire une mesure monétaire du coût, pour les consommateurs, induit par une plus grande concentration urbaine. On considère pour cela une ville linéaire avec un centre localisé en 0. Les consommateurs-habitants consomment deux biens: le bien de consommation (en quantité c) et un logement de superficie h . Les préférences sont définies sur ces deux biens par une fonction quasi-concave et croissante notée $u(c, h)$. Le nombre de consommateurs résidant dans la ville est noté N . L'objectif de cet exercice est d'étudier l'effet de N sur le bien-être des consommateurs. On suppose que le prix du mètre-carré de logement dépend de la distance du logement au centre ($x \geq 0$) et de N . Il est noté $p(x, N)$. Chaque consommateur dispose d'un

revenu R . Un consommateur est obligé de se rendre au centre pour travailler. Le coût de transport est égal à $t.x$ avec $t > 0$. Le prix du bien de consommation est normalisé à 1. Les consommateurs se localisent librement dans la ville de sorte que chacun a la même utilité notée $\bar{u}$.

1. On note $e(p(x, N), u)$ la fonction de dépense d'un consommateur localisé en x où u note le niveau d'utilité. Calculez l'effet d'une augmentation marginale de N sur $e(p(x, N), u)$. Expliquez pourquoi cet effet marginal est une mesure monétaire de l'effet d'une augmentation marginale de la taille de la ville N . En déduire que pour un consommateur localisé au centre ($x = 0$), si N augmente de 1%, pour maintenir le même niveau d'utilité, le revenu doit augmenter de $s_h \cdot \varepsilon_N$ % où s_h est la part des dépenses en logement dans le revenu et ε_N est l'élasticité du prix du logement $p(0, N)$ à la taille de la ville N .

2. On suppose que la fonction de production de logements est à rendements constants et utilise trois facteurs: la terre, le capital et le travail. On note $R(x)$ le prix du mètre carré de terre pour la localisation x . Le marché de la construction de logements est parfaitement concurrentiel. On note $C(q, R(x))$ le coût total de production de q mètres carrés de logement.

(i) Expliquez pourquoi $C(q, R(x)) = q \cdot c(R(x))$ où $c(R(x))$ est le coût unitaire de production.

(ii) En déduire $p(x, N)$ en fonction de $c(R(x))$.

(iii) Montrer que ε_N peut s'écrire en fonction de la part des dépenses de terre dans le coût de construction d'un mètre carré au centre et de l'élasticité du prix de mètre-carré de terre au centre ville par rapport à N .

3. On considère que les propriétaires de logements disposent de tout le pouvoir de négociation et vendent un mètre-carré de logement au maximum qu'est prêt à payer un consommateur.

(i) Montrer que $p(x, N)$ vérifie l'égalité $e(p(x, N), \bar{u}) = R - t.x$.

(ii) En déduire que $\frac{\partial p(x, N)}{\partial x} \cdot h(x) = -t$ où $h(x)$ est la demande de mètres-carrés d'un consommateur localisé en x . Commentez.

(iii) Quel est l'effet d'une baisse de x sur $h(x)$?

4. L'offre de terre à une localisation donnée est supposée inélastique et normalisée à 1. Montrer, en supposant que le marché de la terre est concurrentiel, que $q(x) = [\mathcal{C}'(R(x))]^{-1}$ où $q(x)$ est la quantité de mètres-carrés de logement produits en x .

5. Expliquez pourquoi, à l'équilibre, on a $N(x) \cdot h(x) = q(x)$ pour tout x et $2 \int_0^{\bar{x}} N(x) dx = N$ où l'on note par $N(x)$ le nombre d'habitants en x et $\bar{x}$ la distance entre le dernier habitant et le centre ville.

6. En déduire que si on suppose que $R(\bar{x}) \simeq 0$, $R(0)$ est proportionnel à N . Commentez et expliquez.

7. Calculez l'impact monétaire d'une augmentation de 1% du nombre d'habitants d'une ville si on suppose qu'un habitant consacre 30% de son revenu au logement et que le coût de la terre dans le coût total de production des logements est de 40%.

Exercice 7**

On cherche à apprécier la perte de bien-être qu'implique l'impôt sur le revenu selon

que certaines dépenses de consommation peuvent être déduites ou non de l'assiette d'imposition. On considère pour cela deux biens de consommation, 1 et 2. On note p_i le prix unitaire du bien i ($i = 1, 2$). Le prix du bien 1 est normalisé à 1 et le prix du bien 2 est égal à p . Le consommateur dispose également d'une dotation de temps T qu'il peut répartir entre loisir (L) et heures travaillées. Le salaire horaire est noté w . Il y a un seul consommateur dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité $u(c_1, c_2, L)$, croissante avec c_1 , c_2 et L et quasi-concave. Le revenu est taxé au taux $\tau > 0$.

1. Ecrivez la contrainte de budget du consommateur. Montrez que tout se passe comme si le revenu n'était pas taxé et la consommation était taxée t avec t tel que $(1 - \tau)^{-1} = 1 + t$.

Vous noterez $v(p_1, p_2, w; wT)$ l'utilité indirecte qu'obtient le consommateur s'il fait face aux prix (p_1, p_2, w) .

2. Exprimez la variation équivalente EV de la taxation sur le revenu en vous référant à l'utilité indirecte.

Soit $e(p_1, p_2, w; \bar{u})$ la dépense nécessaire aux prix (p_1, p_2, w) pour atteindre l'utilité $\bar{u}$.

3. Exprimez la variation équivalente EV en vous référant à fonction de dépense e .

4. Exprimez la perte sociale au sens de la variation équivalente.

5. Montrez que, pour un petit taux de taxe, $t \simeq 0$, la perte sociale est approximativement égale à:

$$\frac{1}{2}t^2 \frac{\partial h_1}{\partial p_1}(1, p, w; v_0) + \frac{1}{2}t^2 p^2 \frac{\partial h_2}{\partial p_2}(1, p, w; v_0) + pt^2 \frac{\partial h_2}{\partial p_1}(1, p, w; v_0)$$

où v_0 désigne le niveau d'utilité lorsque les biens sont taxés.

6. Déterminez le signe de la perte sociale en utilisant les propriétés de la matrice de Slutsky.

On suppose maintenant que le consommateur peut déduire sa dépense en biens 1 de l'assiette de l'impôt sur le revenu.

7. Quelle est la perte sociale associée à l'impôt sur le revenu ?

8. Que concluez-vous de la désirabilité des déductions fiscales ?

Exercice 8*

Soit un consommateur dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité suivante:

$$U(x_1, x_2) = [\alpha_1 (x_1)^\rho + \alpha_2 (x_2)^\rho]^{\frac{1}{\rho}} \quad (3)$$

avec α_1 et α_2 deux paramètres positifs.

1. Montrer que lorsque $\rho = 1$, les courbes d'indifférences sont linéaires. Interpréter.

2. (i) Montrer que:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln [\alpha_1 (x_1)^\rho + \alpha_2 (x_2)^\rho] - \ln (\alpha_1 + \alpha_2)}{\rho} = \frac{\alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

(ii) En déduire que lorsque ρ tend vers 0, la fonction d'utilité U représente les mêmes préférences que la fonction d'utilité Cobb-Douglas $(x_1)^{\alpha_1} (x_2)^{\alpha_2}$.

3. Calculer les demandes de bien en considérant que le consommateur dispose d'un revenu R et que les prix unitaires des biens sont égaux à p_1 et p_2 .

Exercice 9 “Pourquoi le centre de Paris est-il riche et le centre de Détroit pauvre?”*

Des agents habitent une ville composée de deux quartiers : un centre et une banlieue. Tous les emplois sont situés au centre et tous les agents travaillent. Le coût de transport nécessaire pour aller de la banlieue au centre est égal à $T > 0$. Par ailleurs les agents ont des préférences qui peuvent être représentées par la fonction d'utilité suivante:

$$U(x, s) = x^\alpha s^{1-\alpha}$$

où x désigne la quantité de l'unique bien de consommation et s désigne le nombre de mètres carrés du logement loué par l'agent. On a $0 < \alpha < 1$. On suppose le prix du bien de consommation égal à 1. Le coût de location d'un mètre carré est égal à 1 en banlieue et est noté r au centre ville.

1. Considérons un agent localisé en banlieue. Cet agent est contraint d'aller au centre travailler et supporte donc le coût de transport T . Le revenu de cet agent est égal à R . On suppose $R > T$. Déterminer la demande de mètres carrés ainsi que la demande en bien de consommation de cet agent. En déduire l'utilité indirecte de l'agent. On notera u^* le niveau d'utilité obtenu.

Partie A

Dans cette partie tous les agents sont identiques et perçoivent un revenu R ($R > T$).

1. Considérons un agent localisé au centre. Déterminer les demandes Hicksiennes de bien de consommation et de mètres carrés. Commenter. Faites une représentation graphique dans le plan (s, x) . Déterminer la fonction de dépense que l'on notera $e(r, u)$ où u désigne le niveau d'utilité atteint.

2. Déterminer le loyer maximal par mètre carré qu'est prêt à payer un habitant du centre. On notera ce loyer $\bar{r}$. Ce loyer est-il supérieur à 1? Commenter. Comment varie un tel loyer si T augmente? Montrer que ces résultats ne dépendent pas de la fonction d'utilité spécifiée.

3. Représenter sur un même graphique dans un plan (s, x) les demandes hicksiennes de mètres carrés et de bien de consommation d'un agent habitant le centre et d'un agent habitant la banlieue en supposant que les deux agents ont une même utilité u^* . Commenter.

4. Peut-on ainsi expliquer que les centres villes sont plus denses que les banlieues? Montrer que ce résultat ne dépend pas de la fonction d'utilité spécifiée.

Partie B

On considère à présent qu'il existe deux groupes d'agents : les agents riches dont le revenu est égal à $\bar{R}$ et les agents pauvres dont le revenu est égal à $\underline{R}$. On suppose $\bar{R} > \underline{R} > T$.

1. Comparer l'utilité obtenu par un pauvre (noté $\underline{u}^*$) et par un riche (noté $\overline{u}^*$) lorsque ces deux agents sont localisés en banlieue. Commenter.
2. Déterminer le loyer maximal qu'est disposé à payer un agent riche au centre ville. Comparer-le à celui qu'est prêt à payer un agent pauvre. Expliquer.
3. On suppose que les mètres carrés sont loués aux agents qui sont prêts à payer le plus cher. Dans quel quartier les pauvres sont-ils incités à habiter?

Exercice 10

Un consommateur peut acquérir deux biens en quantités notées x_1 et x_2 . Les préférences de ce consommateur sont représentées par la fonction d'utilité suivante:

$$U(x_1, x_2) = (x_1 + 4)(x_1 + x_2)$$

Le prix du bien 1 est égal à 1 et le prix du bien 2 est égal à p .

1. Représentez graphiquement une courbe d'indifférence.
2. Déterminer les fonctions de demande marshaliennes en fonction du revenu R . Caractérisez les deux biens.