Chapitre 3. Théorie des jeux non coopératifs

La théorie des jeux comporte deux branches : jeux coopératifs (exclu ici) et jeux non coopératifs. La différence est dans l'unité d'analyse, i.e. le jugement au nom duquel les décisions sont prises.

- Jeux coopératifs : l'unité est le groupe (la société tout entière ou une partie) qui cherche le plus grand gain (le contenu du gain est à préciser, il n'est pas forcément monétaire)
- Jeux non coopératifs : l'unité d'analyse est le joueur qui maximise son gain. Dans un jeu non coopératif, un agent peut avoir un comportement dit coopératif (i.e. allant dans l'intérêt du groupe) mais seulement s'il se trouve que son intérêt individuel se trouve maximisé lorsque l'intérêt du groupe est maximisé, i.e. si son comportement a priori non coopératif choisit une action qui va de fait dans le sens du gain du groupe. Le cadre est non coopératif même si la solution peut être coopérative.

I. Définition et règles

Deux manières de représenter un jeu : forme stratégique ou normale = tableau / forme extensive = arbre. La 2nde représentation est toujours possible mais surtout utile pour les jeux séquentiels (à plusieurs étapes successives). On étudie ici les jeux à un coup (= à 1 étape) donc *forme normale ou stratégique*.

Jeu défini par 4 éléments :

- Liste des joueurs : $i = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$.
- L'ensemble de stratégies de chaque joueur
  Ensemble discret fini : $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{ik}\}$, $k \geq 2$
  Ensemble continu infini : par exemple $S_i = \{s_{ik} \in [0, 10]\}$
- Pour chaque n-uplet de stratégies, le gain G_i de chaque joueur
  Par exemple, pour deux joueurs i et j, ayant chacun deux stratégies s_i et s_j, il existe 4 couples de stratégies ; les gains associés sont notés $G_i\,(s_i, s_j)$ et $G_i\,(s_i, s_j)$, $s_i \in S_i$, $s_j \in S_j$.
- Règles du jeu. Jeux non coopératifs à une étape (= non séquentiel, non répété, à choix simultanés, donc dans l'ignorance *a priori* du choix de l'autre).

Chacun choisit une stratégie pour maximiser son gain sur la base de toutes les informations : son ensemble de stratégies et ses gains qui dépendent des stratégies choisies par les autres joueurs : situation d'interaction stratégique. Il connait le nombre des autres joueurs, leurs ensembles de stratégies, leurs gains. Chacun choisit en anticipant le choix des autres.

A partir de ces éléments, on utilise des concepts de solutions de jeux : des cas les plus simples (équilibre en stratégies dominantes) aux plus élaborés (équilibre de Nash).

II. Stratégies discrètes. Equilibre en stratégies dominantes

1. Lecture du tableau

Jeu 1

	b_1	b_2
a_1	(2 , 2)	(1, 3)
a_2	(3, -1)	(0, 0)
a_3	(4, 3)	(2, 4)

2 joueurs : *A* et *B* ;

Ensemble de stratégies de $A = \{a_1, a_2, a_3\}$; ensemble de stratégies de $B = \{b_1, b_2\}$

Gains indiqués dans le tableau : (1,3) se lit : « si *A* choisit a_1 et *B* choisit b_2, le gain de *A* est 1, celui de *B* est 3.

2. Détermination des stratégies dominantes

Jeu 1

	b_1	b_2
a_1	(2 , 2)	(1, 3)
a_2	(3, -1)	(0, 0)
a_3	(4, 3)	(2, 4)

Si *A* choisit a_1, il obtient soit 2 (si *B* choisit b_1), soit 1 (si *B* choisit b_2).
Si *A* choisit a_2, il obtient soit 3 (si *B* choisit b_1), soit 0 (si *B* choisit b_2).
Si *A* choisit a_3, il obtient soit 4 (si *B* choisit b_1), soit 2 (si *B* choisit b_2).

Quel que soit le choix de B, a_3 procure à A un gain strictement supérieur à celui que procurent a_1 et a_2 : a_3 est une stratégie strictement dominante. Maximiser son gain conduit A à choisir a_3.

Une stratégie strictement dominante pour un agent est telle que, quel que soit le choix de l'autre, elle lui procure toujours un gain strictement supérieur à celui que lui procurerait n'importe laquelle des autres stratégies dont il dispose.

Définitions stratégie dominante et stratégie strictement dominante

Pour 2 joueurs *i* et *j*, $S_i = \{s_i, s'_i\}$, toutes les stratégies de *j* sont notée s_j, s_i est une stratégie dominante si et seulement si

$$Gi\,(s_i, s_j) \geq Gi\,(s'_i, s_j)\ \forall\, s_j \quad \text{et} \quad \text{il existe } s_j \text{ tel que } Gi\,(s_i, s_j) > Gi\,(s'_i, s_j)$$

Et : s_i est une stratégie strictement dominante si et seulement si

$$Gi\,(s_i, s_j) > Gi\,(s'_i, s_j)\ \forall\, s_j$$

Si *B* choisit b_1, il obtient 2 (si *A* choisit a_1), -1 (si *A* choisit a_2) ou 3 (si *A* choisit a_3)
Si *B* choisit b_2, il obtient 3 (si *A* choisit a_1), 0 (si *A* choisit a_2) ou 4 (si *A* choisit a_3)

Donc quel que soit le choix de A, b_2 lui procure un gain supérieur à celui que procure b_1 ; b_2 est une stratégie dominante.

3. Equilibre et optimalité

Ce jeu a un équilibre en stratégies dominantes : (a_3, b_2). La maximisation du gain par chaque joueur suffit à quiconque pour prédire l'issue du jeu.

L'équilibre en stratégies dominantes ici est un optimum de Pareto (OP), car on ne peut améliorer la situation d'aucun agent sans détériorer celle de l'autre : on ne peut améliorer la situation de A qu'au détriment de B et on ne peut pas améliorer la situation de B.

Il y a deux OP dans ce jeu : (a_3, b_1) et (a_3, b_2) ; l'équilibre en stratégies dominantes est un OP.

Jeu 1

	b_1	b_2
a_1	(2 , 2)	(1, 3)
a_2	(3, -1)	(0, 0)
a_3	(4,3) OP	(2,4) OP

Un changement minimal sur les gains de B, comme dans le jeu 1 bis, rend l'équilibre sous-optimal.

Jeu 1 *bis*

	b_1	b_2
a_1	(2 , 2)	(1, 3)
a_2	(3,5) OP	(0,6) OP
a_3	(4,3) OP	(2,4)

Ce jeu a 3 OP : (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1).

La stratégie dominante de A reste a_3, celle de B reste b_2 ; (a_3, b_2) reste l'équilibre en stratégies dominantes, (a_3, b_2), mais il n'est plus un OP puisqu'il est dominé par (a_2, b_1).

Pourtant, les joueurs ne choisissent pas (a_2, b_1) de manière non coopérative : le jeu non coopératif les fait choisir une issue collectivement irrationnelle : il serait dans l'intérêt des deux agents de se coordonner sur (a_2, b_1) mais la recherche du gain dans un jeu non coop leur fait manquer cet intérêt commun. C'est un ***paradoxe de la rationalité***. Des agents choisissent rationnellement une solution collectivement irrationnelle. L'exemple type est le dilemme du prisonnier, l'équilibre en stratégies dominantes n'est pas un OP. Voir exercice 1 du dossier 4.

Remarque : on a beaucoup dit que les économistes (i.e. Smith, Arrow et Hahn) avaient 'cru' à la main invisible' et que le dilemme du prisonnier (plus généralement les équilibres en stratégies dominantes sous-optimaux) montre que ça ne fonctionne pas. On n'a pas attendu le dilemme du prisonnier (assez simple) pour avoir idée des difficultés à faire coïncider rationalité individuelle et rationalité collective. Les conditions concurrentielles disent la difficulté de garantir la compatibilité entre rationalités, individuelle et collective.

III. Stratégies discrètes. Elimination itérative des stratégies dominées

Jeu 2

	b_1	b_2
a_1	(3 , 6)	(7, 1)
a_2	(5, 1)	(8, 2)
a_3	(6, 0)	(6, 2)

Pas de stratégie dominante pour A, ni pour B.

Raisonnement par étapes : élimination successive des stratégies strictement dominées = stratégies qui ne sont jamais choisies par un agent car conduisent, quel que soit le choix de l'autre agent, à un gain moindre qu'une des autres stratégies.

Pour 2 joueurs i et j, S_i = {s_i , t_i}, où t_i désigne toutes les stratégies de i différentes de s_i, Sj = {s_j } (toutes les stratégies de j sont notées s_j), s_i est une stratégie dominée si et seulement si,

$$\forall\, s_j, \textbf{ il existe } t_i \textbf{ tel que } Gi\,(s_i , s_j) \leq Gi\,(t_i , s_j)$$

De même, s_i est une stratégie strictement dominée si et seulement si

$$\forall\, s_j, \textbf{ il existe } t_i \textbf{ tel que } Gi\,(s_i , s_j) < Gi\,(t_i , s_j)$$

Première étape (fictive = étape dans le raisonnement)

Pour A, a_1 est strictement dominée par a_2 : A ne choisit jamais a_1.

Deuxième étape (fictive)

B a toutes les informations sur le jeu et sait que A est rationnel. Il sait que a_1 est exclu par A, il exclut donc les issues (a_1, b_1) et (a_1, b_2).

Jeu 2

	b_1	b_2
$\cancel{a_1}$	~~(3 , 6)~~	~~(7, 1)~~
a_2	(5, 1)	(8, 2)
a_3	(6, 0)	(6, 2)

Alors, b_2 devient dominante (et b_1 dominée).

Troisième étape (fictive)

A sait que B est rationnel et que B sait que lui-même (A) est rationnel. Il prévoit que B ne peut choisir b_1. A choisit a_2. La solution est (a_2, b_2).

Jeu 2

	$\cancel{b_1}$	b_2
$\cancel{a_1}$	~~(3 , 6)~~	~~(7, 1)~~
a_2	~~(5, 1)~~	(8, 2)
a_3	~~(6, 0)~~	(6, 2)

A choisit a_2. La solution par élimination des stratégies strictement dominées est (a_2, b_2).

Jeu 2

	$\cancel{b_1}$	b_2
$\cancel{a_1}$	~~(3 , 6)~~	~~(7, 1)~~
a_2	~~(5, 1)~~	(8, 2)
a_3	~~(6, 0)~~	~~(6, 2)~~

Pour déterminer un équilibre de ce type (par élimination itérative des stratégies dominées), on doit supposer non seulement que les agents sont rationnels mais que chacun sait que les autres le sont, et que les autres savent que chacun l'est etc. ***La rationalité est connaissance commune***. Ce qui permet de prévoir ce que seront, ou ne seront pas, les choix de l'autre même si les choix sont simultanés donc dans l'ignorance des choix réellement faits par l'autre.

Remarque : la rationalité connaissance commune ne va pas de soi. Un agent peut avoir intérêt à faire croire qu'il est irrationnel (dissuasion nucléaire, comportements capricieux).

Ici, l'équilibre par élimination des stratégies dominées est l'un des deux OP (l'autre OP est (a_1 ,b_1) mais ce n'est pas systématique (cf. exercice 3 dossier 4).

Ces deux concepts de solution (équilibre en stratégie dominante, équilibre par élimination des stratégies dominées) semblent assez évidents ou intuitifs. Mais le plus souvent, les jeux ne comportent pas d'équilibre des types qui précèdent. D'où le concept d'équilibre de Nash.

IV. Equilibre de Nash (NE)

Jeu 3

	b_1	b_2	b_3
a_1	(6 , 7)	(2 , 2)	(7 , 8)
a_2	(2 , 3)	(3 , 4)	(- 8 , 3)
a_3	(4 , 10)	(2 , 1)	(8 , 9)

1. Fonctions de meilleure réponse

On décrit les comportements rationnels par les fonctions de meilleure réponse

Fonction de meilleure réponse de A : MR_A (b_k)

Si A pense que B choisit b_1, *A* choisit a_1 : MR_A (b_1) = a_1
Si A pense que B choisit b_2, *A* choisit a_2 : MR_A (b_2) = a_2
Si A pense que B choisit b_3, *A* choisit a_3 ; MR_A (b_3) = a_3

A ne peut que 'penser', 'imaginer', 'anticiper', mais ni observer ni prévoir ce que sera le choix de l'autre. En effet, les choix sont simultanés donc chaque choix est fait dans l'ignorance du choix de l'autre. Si aucun élément (de type stratégie dominante ou stratégie dominée) ne permet de prévoir le choix de l'autre, l'anticipation du choix de l'autre est aléatoire, sans fondement.

Fonction de meilleure réponse de B : MR_B (a_k)

Si B pense que A choisit a_1, *B* choisit b_3 : MR_B (a_1) = b_3
Si pense que A choisit a_2, *B* choisit b_2 : MR_B (a_2) = b_2
Si pense que A choisit a_3, *B* choisit b_1 : MR_B (a_3) = b_1

Rien ne permet d'élire une issue (i.e. un couple de stratégies qui seraient choisies) plutôt qu'une autre, comme on le faisait dans les jeux 1 et 2. L'hypothèse de rationalité, comme norme de comportement pour le théoricien et pour les joueurs ne suffit pas à prédire l'issue de ce jeu. Toutes les issues sont également possibles.

Les issues possibles dépendent *a priori* :

- des anticipations (sans fondement rationnel) des agents sur le choix de l'autre.
- du comportement face au risque : A (respectivement B) peut préférer tenter l'issue qui peut lui procurer le gain le plus élevé (a_3) ou minimiser le risque de perte (pas a_2).

On a établi les fonctions de meilleure réponse de chaque agent aux choix de l'autre, mais si ces fonctions ne sont pas observées puisqu'on observe seulement des choix.

2. Equilibre et optimalité

Equilibre de Nash (NE) = point fixe : un NE est un couple de stratégies (a_i , b_j) tel que

$$a_i = MR_A(b_j) \text{ et } b_j = MR_B(a_i)$$

Dans le jeu 3, il existe un NE unique : (a_2, b_2).

Optimalité

Jeu 3

	b_1	b_2	b_3
a_1	(6 , 7)	(2 , 2)	(7 , 8)
a_2	(2 , 3)	(3 , 4)	(- 8 , 3)
a_3	(4 , 10) OP	(2 , 1)	(8 , 9) OP

L'équilibre unique (a_2, b_2) est sous-optimal, dominé par (a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_3, b_1) et (a_3, b_3). Le jeu contient deux OP : (a_3, b_1) et (a_3, b_3).

Remarque. Les NE forment un ensemble plus large d'équilibres que les équilibres en stratégies dominantes ou par élimination des stratégies dominées. L'ensemble des NE inclut l'ensemble des équilibres en stratégies dominantes et l'ensemble des équilibres par élimination des stratégies strictement dominées. A ces équilibres, il en ajoute d'autres.

3. Interprétation de l'équilibre de Nash

Comment advient-il ? non-déviation ou non- regret

Jeu 3

	b_1	b_2	b_3
a_1	(6 , 7)	(2 , 2)	(7 , 8)
a_2	(2 , 3)	(3 , 4)	(- 8 , 3)
a_3	(4 , 10) OP	(2 , 1)	(8 , 9) OP

Deux interprétations de l'équilibre de Nash

- Interprétation très approximative (incorrecte mais intuitive) :

  NE = situation dont aucun agent n'a intérêt à dévier *unilatéralement*, i.e. tel qu'aucun agent, considérant le choix de l'autre comme une donnée, ne désire pas changer son propre choix.

  Cette interprétation est utile pour une intuition rapide. Lisant le tableau, on s'interroge sur l'intérêt d'un agent à 'dévier' : en comparant les gains de A, a-t-il intérêt à 'glisser verticalement' ? en comparant les gains de B, a-t-il intérêt à 'glisser horizontalement' ?

  Par exemple, dans le jeu 3, (a_1, b_1) n'est pas un NE parce que B voudrait 'dévier' en (a_1, b_3) ; (a_1, b_3) n'est pas un NE car A voudrait 'dévier' en (a_3, b_3) ; (a_3, b_3) n'est pas un NE car B voudrait 'dévier' en (a_{13}, b_1) ; (a_{13}, b_1) n'est pas un NE car A voudrait 'dévier' en (a_1, b_1). Aucune de ces 4 issues n'est un NE. Les couples (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_1, b_2) et (a_3, b_2) n'en sont pas non plus.

  Pourtant, cette interprétation est incorrecte dans des jeux à un coup et choix simultanés. Une fois les choix faits, les règles imposent que nul ne peut dévier : on ne joue qu'une seule fois. L'équilibre de Nash dans un jeu à une étape ne peut pas être le résultat d'un processus. Au mieux, c'est un processus mental.

  Même si on concevait le NE comme résultat d'un processus de révision des choix des agents après observation du choix de l'autre, il faudrait faire deux remarques :

  (i) La déviation unilatérale suppose que chaque agent prend le choix de l'autre comme donné, i.e. suppose qu'il est indépendant du sien. Si les agents voyaient les autres modifier leur choix en observant le leur, leur croyance (le choix de l'autre est indépendant du mien) serait contredite par ce qui est observé (l'autre modifie son choix alors que rien n'a changé pour lui sauf d'observer mon propre choix : c'est donc que son choix dépend du mien !).

(ii) Si les choix sont effectués simultanément mais plusieurs fois, il faut des jeux répétés. Alors, l'ensemble des équilibres d'un jeu répété peut être beaucoup plus large que l'ensemble des équilibres du jeu à un coup… hors programme.

- *Interprétation correcte* : un NE est une situation de non-regret : aucun agent ne regrette son choix, après avoir observé le choix de l'autre. Comme chacun a agi en anticipant le choix de l'autre, l'absence de regret suppose qu'il a correctement anticipé le choix de l'autre, et que son choix est effectivement sa meilleure réponse. Or l'anticipation est formulée au hasard, sans fondement rationnel (elle n'est ni irrationnelle ni rationnelle). L'équilibre de Nash (NE) est donc le résultat des choix rationnels des agents d'une part (chacun maximise son gain, c'est ce qui permet de construire les fonctions de meilleure réponse) et de leurs anticipations sur le choix de l'autre d'autre part, anticipations sans lien avec la rationalité ni avec l'observation). Le NE se réalise si les agents anticipent correctement le choix de l'autre. Les solutions qui ne sont pas des NE ne peuvent arriver que par erreur d'anticipation des agents sur le choix de l'autre. Mais rien ne garantit l'absence d'erreur dans l'anticipation.

4. NE multiples et conventions

Jeux de coordination

Jeu 4

	Droite	Gauche
Droite	(1 , 1)	(-1, -1)
Gauche	(-1, -1)	(1, 1)

Histoire : règle de conduite automobile. Chacun décide avant d'avoir observé le choix de l'autre. Ils courent le risque d'une issue sous-optimale parce qu'ils anticipent mal le choix de l'autre (« il a l'air d'un anglais, il va choisir 'gauche', faisons de même », pense l'un, « c'est un français, etc. » pense l'autre. Drame de la coordination sous-optimale.

Jeu 4 *bis*. Guerre des sexes

	b_1 : foot	b_2 : ballet
a_1 : foot	(2 , 1)	(0 , 0)
a_2 : ballet	(0 , 0)	(1 , 2)

Jeu 4 *ter*. Poule mouillée

	b_1 : je reste	b_2 : je m'écarte
a_1 : je reste	(-2 , -2)	(1 , -1)
a_2 : je m'écarte	(-1 , 1)	(0 , 0)

Dans chaque jeu, il existe deux équilibres de Nash. Aucun ne peut être considéré comme une prédiction puisque leur survenue dépend des anticipations de chaque agent sur le choix de l'autre. Toutes les issues sont également possibles.

Ces jeux soulèvent un problème de coordination différent du dilemme du prisonnier, où l'équilibre se réalise mais est sous-optimal. Ici, les OP sont des NE mais rien ne garantit que les joueurs choisissent les stratégies qui conduisent à un OP.

Une convention préalable peut être le moyen de sélectionner un OP et de garantir sa réalisation. Cette convention, parce qu'elle est un NE, sera respectée si chacun pense que les autres la respectent. Nul n'a intérêt à enfreindre la convention s'il pense que les autres la respectent. Nul n'a de raison de penser que les autres ne la respectent pas.

Inversement, si les OP ne sont pas des NE (comme dans le dilemme du prisonnier et beaucoup d'autres jeux), alors des conventions préalablement décidées pour faire appliquer les OP ne sont pas respectées. Les agents, même s'ils s'accordent préalablement, n'ont aucun moyen de faire appliquer un accord sur un OP qui n'est pas un NE. Les prisonniers comprennent la situation, peuvent même préalablement s'accorder pour ne pas se dénoncer (voir exo 1 td 4), rien ne permet l'application de cette résolution, à moins de modifier la matrice des gains. Cf. Hobbes, *Le Léviathan* : la seule solution est dans l'abandon par chacun de sa liberté de décision.

- ⇨ Parce qu'il dépend d'anticipations sur le choix de l'autre qui n'ont pas de fondement, le concept de NE ne peut pas toujours permettre de prédire l'issue d'un jeu. Mais il peut mettre en évidence la difficulté de coordination autour d'une situation optimale : les issues qui ne sont pas des NE ne peuvent se produire que par hasard, sur la base d'une erreur d'anticipation.