

Chapitre 3. Théorie des jeux non coopératifs

III. Equilibre de Nash (NE)

4. NE multiples et conventions

Jeux de coordination

Jeu 4

	Droite	Gauche
Droite	(1, 1)	(-1, -1)
Gauche	(-1, -1)	(1, 1)

Histoire : règle de conduite automobile. Chacun décide avant d'avoir observé le choix de l'autre. Ils courent le risque d'une issue sous-optimale parce qu'ils anticipent mal le choix de l'autre (« il a l'air d'un anglais, il va choisir 'gauche', faisons de même », pense l'un, « c'est un français, etc. » pense l'autre. Drame de la coordination sous-optimale.

Jeu 4 bis. Guerre des sexes

	b_1 : foot	b_2 : ballet
a_1 : foot	(2, 1)	(0, 0)
a_2 : ballet	(0, 0)	(1, 2)

Jeu 4 ter. Poule mouillée

	b_1 : je reste	b_2 : je m'écarte
a_1 : je reste	(-2, -2)	(1, -1)
a_2 : je m'écarte	(-1, 1)	(0, 0)

Dans chaque jeu, il existe deux équilibres de Nash. Aucun ne peut être considéré comme une prédiction puisque leur survenue dépend des anticipations de chaque agent sur le choix de l'autre. Toutes les issues sont également possibles.

Ces jeux soulèvent un problème de coordination différent du dilemme du prisonnier, où l'équilibre se réalise mais est sous-optimal. Ici, les OP sont des NE mais rien ne garantit que les joueurs choisissent les stratégies qui conduisent à un OP.

Une convention préalable peut être le moyen de sélectionner un OP et de garantir sa réalisation. Cette convention, parce qu'elle est un NE, sera respectée si chacun pense que les autres la respectent. Nul n'a intérêt à enfreindre la convention s'il pense que les autres la respectent. Nul n'a de raison de penser que les autres ne la respectent pas.

Inversement, si les OP ne sont pas des NE (comme dans le dilemme du prisonnier et beaucoup d'autres jeux), alors des conventions préalablement décidées pour faire appliquer les OP ne sont pas respectées. Les agents, même s'ils s'accordent préalablement, n'ont aucun moyen de faire appliquer un accord sur un OP qui n'est pas un NE. Les prisonniers comprennent la situation, peuvent même préalablement s'accorder pour ne pas se dénoncer (voir exo 1 td 4), rien ne permet l'application de cette résolution, à moins de modifier la matrice des gains. Cf. Hobbes, *Le Léviathan* : la seule solution est dans l'abandon par chacun de sa liberté de décision.

⇒ Parce qu'il dépend d'anticipations sur le choix de l'autre qui n'ont pas de fondement, le concept de NE ne peut pas toujours permettre de prédire l'issue d'un jeu. Mais il peut mettre en évidence la difficulté de coordination autour d'une situation optimale : les issues qui ne sont pas des NE ne peuvent se produire que par hasard, sur la base d'une erreur d'anticipation.

Jeu 5. Chasse au cerf

	Cerf	Lièvre
Cerf	(2, 2)	(0, 1)
Lièvre	(1, 0)	(1, 1)

Rousseau raconte la fiction de l'état de nature, qui est celui où « la condition de l'homme naissant » est celle « d'un animal borné d'abord aux pures sensations, et profitant à peine des dons que lui offrait la nature, loin de songer à lui rien arracher », i.e. qui vit seul, se reproduit au hasard de rencontres jamais renouvelées, se nourrit non de chasse mais de cueillette.

Un hasard historique le fait sortir de cette condition animale. Mais il se présente des difficultés et, dans une première socialisation des hommes réunis en 'troupeau', naissent les premières actions collectives :

Instruit par l'expérience que l'amour du bien-être est le seul mobile des actions humaines, il se trouva en état de distinguer les occasions rares où l'intérêt commun devait le faire compter sur l'assistance de ses semblables, (...) Dans le premier cas il s'unissait avec eux en troupeau, ou tout au plus par quelque sorte d'association libre qui n'obligeait personne, et qui ne durait qu'autant que le besoin passager qui l'avait formée. (...) Voilà comment les hommes purent insensiblement acquérir quelque idée grossière des engagements mutuels, et de l'avantage de les remplir, mais seulement autant que pouvait l'exiger l'intérêt présent et sensible ; car la prévoyance n'était rien pour eux, et loin de s'occuper d'un avenir éloigné, ils ne songeaient pas même au lendemain. S'agissait-il de prendre un cerf, chacun sentait bien qu'il devait pour cela garder fidèlement son poste ; mais si un lièvre venait à passer à

la portée de l'un d'eux, il ne faut pas douter qu'il ne le poursuivit sans scrupule, et qu'ayant atteint sa proie il ne se souciât fort peu de faire manquer la leur à ses compagnons. (*Discours sur l'origine de l'inégalité*)

La plupart des théoriciens des jeux modélisent et commentent ainsi : (cerf ; cerf) Pareto-domine (lièvre, lièvre), les deux sont des NE, mais (lièvre, lièvre) peut apparaître « plus prudent » : chaque joueur choisit entre deux stratégies dont l'une minimise le risque, est 'prudente' parce qu'elle garantit de gagner 1.

Objections

- Cela ne vaut pas si les joueurs se mettent d'accord sur (cerf, cerf), ce qui correspond à « l'idée grossière des engagements mutuels [= accord préalable] et de l'avantage de les remplir [c'est un OP] » et si cet engagement mutuel est un NE : il n'y a aucun intérêt à dévier unilatéralement.
- L'argument de Rousseau n'est pas que les chasseurs sont prudents et renoncent au cerf parce qu'ils prévoient la possible défaillance d'autrui, et donc dévient non pas unilatéralement mais parce qu'ils supposent que les autres ont déjà varié. L'argument de Rousseau est au contraire que les chasseurs sont imprévoyants et méconnaissent leur intérêt véritable qui serait prévoyant : « ... l'avantage de les remplir, mais seulement autant que pouvait l'exiger *l'intérêt présent et sensible* ; car *la prévoyance n'était rien pour eux*, et loin de s'occuper d'un avenir éloigné, ils ne songeaient pas même au lendemain ». Dans le texte de Rousseau, celui qui abandonne la chasse au cerf pour courir le lièvre n'imagine même pas qu'un de ses compagnons pourrait avoir déjà fait de même : il abandonne tout de suite sans même songer à ses compagnons parce qu'en voyant passer le lièvre, il oublie qu'il préférerait le cerf, sa matrice de gain change : il était bien d'accord au départ, mais sa perception de son intérêt est perturbée et on retrouve une situation du type dilemme du prisonnier.

L'exemple de Rousseau est donc mal choisi. Le jeu 5 bis pourrait convenir, parce que (lièvre, lièvre) n'est plus un NE : on retrouve un équilibre en stratégies dominantes, sous-optimal.

Jeu 5 bis

	Cerf	Lièvre
Cerf	(2, 2)	(0, 3)
Lièvre	(3, 0)	(1, 1)

La possibilité qu'existent plusieurs NE est présente, cf. exo 3 dossier 5. Difficile de choisir quand l'un ne Pareto-domine pas l'autre.

5. L'absence d'équilibre de Nash

Cas fréquent au-delà des jeux à somme nulle.

Jeu 6

	Pile	Face
Pile	(1, -1)	(-1, 1)
Face	(-1, 1)	(1, -1)

Jeu 6 bis

	Pierre	Feuille	Ciseaux
Pierre	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
Feuille	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
Ciseaux	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

Il n'y a ni stratégie dominante, ni stratégie dominée, ni équilibre de Nash.

Le jeu ne peut se jouer que parce que les joueurs ne peuvent pas anticiper le choix d'autrui. Le concept de NE ne permet pas d'élire une solution parmi toutes. Solution mathématique (interprétation délicate) est d'introduire des stratégies mixtes au lieu de stratégies pures. Les stratégies pures consistent à choisir une action (pierre, feuille ou ciseaux, le 'ou étant exclusif). Les stratégies mixtes consistent à choisir une distribution de probabilité sur les actions (par exemple, je peux choisir de jouer chaque action à 33%). Hors programme.

IV. Stratégies continues

1. Définition

Mêmes hypothèses sur les joueurs ($n \geq 2$, souvent $n = 2$), mais les ensembles de stratégies peuvent prendre une infinité de valeurs.

Choisir un nombre entier entre 0 et 10 est un choix en stratégies discrètes, dénombrables. Choisir un réel entre 0 et 10 est un choix en stratégies continues, choix parmi une infinité de stratégies. Ce qui est le cas le + souvent quand les agents choisissent un prix, ou une qté. Alors on ne peut plus représenter le jeu sous forme normale (tableau).

On peut représenter les fcts de meilleure réponse, lorsque le gain de chaque joueur dépend non seulement de son choix mais aussi du choix d'autrui, parce qu'alors, son choix dépend de l'anticipation qu'il fait du choix d'autrui.

Deux joueurs 1 et 2 ; deux stratégies x_1 et x_2 allant de 0 à 10. On est en interaction stratégique si le gain de chacun dépend non seulement de son choix mais du choix de l'autre. Alors $x_1 = R_1(x_2)$ et $x_2 = R_2(x_1)$.

On peut appliquer le concept d'équilibre de Nash : intersection des fonctions de meilleure réponse, à condition qu'elle existe. Sinon, pas de NE.

2. Représentations graphiques des fcts de meilleure réponse quand elles se déduisent de la dérivation de la fct de gain

On suppose des fcts de meilleure réponse symétriques (hypothèse qui peut être levée). Deux possibilités :

Substituts stratégiques : $x_i = R_i(x_j)$, avec $R_i'(x_j) < 0$;

Compléments stratégiques : $x_i = R_i(x_j)$, $R_i'(x_j) > 0$.

Exemple (compléments stratégiques)

Choix d'investissement où $I = a_i + a_j$

Les variables sont a_i et a_j

G_i dépend positivement de a_i et a_j , et négativement de a_i (qui représente un coût pour i)

$$G_i(a_i) = a_i(c + a_j - a_i)$$

$G_i(a_i)$ continue dérivable.

$G_i'(a_i) = c + a_j - 2a_i$, donc la fonction de meilleure réponse de i est : $a_i = (c + a_j) / 2$.

Réciproquement, pour j : $G_j(a_j) = a_j(c + a_i - a_j)$, donc $G_j'(a_j) = c + a_i - 2a_j$, donc la fonction de meilleure réponse de B est : $a_j = (c + a_i) / 2$.

Dans le quart de plan (a_i, a_j) , la pente des droites est inférieure à 1. Leur intersection est l'équilibre de Nash unique du jeu.

NE = (a_i^*, a_j^*) tel que : $a_i^* = MR_i(a_j^*)$ et $a_j^* = MR_j(a_i^*)$.

On obtient : $a_i^* = \frac{c + a_j^*}{2}$.

$$\Leftrightarrow 2a_i^* = 3c/2 + a_i^*/2$$

$$\Leftrightarrow a_i^* = c$$

L'équilibre de Nash est $(a_i^*, a_j^*) = (c, c)$.

Représentation graphique :

- $a_i(a_j)$ dans le plan (a_j, a_i) = droite : $a_i = c/2$ à l'origine et pente = $1/2$.
- $a_j(a_i)$ dans le plan (a_i, a_j) = droite : $a_j = c/2$ à l'origine et pente = $1/2$.

On représente les deux fonctions dans le plan (a_i, a_j) ; $a_i(a_j)$ est donc une droite de pente égale à 2.

Trois remarques

- i) Si les fonctions de meilleure réponse ont une pente strictement supérieure à 1, il n'existe pas d'équilibre de Nash.
- ii) Si les fonctions de meilleure réponse ont une pente négative, les actions sont substitués stratégiques. Il peut exister, ou pas un équilibre de Nash.
- iii) Les fonctions de meilleure réponse ne sont pas symétriques si les fonctions de gain ne le sont pas.

3. Quand les fonctions de gain sont discontinues ou non dérivables

La détermination des fcts de meilleure réponse n'est plus possible par dérivation. On raisonne sur les différentes possibilités pour déterminer les NE. Cf. exo 1, dossier 5 : les gains de chaque joueur sont discontinus + chapitre 4 (duopole de Bertrand).