

UNIVERSITÉ DE PARIS I
Magistère d'Economie, Première année
Cours de Microéconomie
Année universitaire 2025-2026
Exercices de la partie I - Producteur
 Eléments de correction

Exercice 4

On peut noter $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N)$ le vecteur d'inputs optimal pour produire la quantité $\bar{q}$. Lorsque la production q varie, à court terme, le vecteur optimal s'écrit $(\bar{z}_1, z_2^{CT}, \dots, z_N^{CT})$. Ce vecteur de facteurs permet de produire une quantité q variable à un coût minimum. A long-terme, le vecteur optimal s'écrit $(z_1^{LT}, z_2^{LT}, \dots, z_N^{LT})$. Ce vecteur d'inputs permet aussi de produire q à un coût minimum. Toutefois comme la quantité z_1 est variable, le producteur a un coût au plus égal à celui qu'il supporte si $z_1 = \bar{z}_1$. On en déduit que $C^{CT}(w, q) = w_1 \bar{z}_1 + \sum_{i=2}^N w_i z_i^{CT} \geq \sum_{i=1}^N w_i z_i^{LT} = C^{LT}(q, w)$. Comme on a supposé que la fonction de coût est convexe en q , on en déduit que pour tout $q > \bar{q}$, $\frac{\partial}{\partial q} C^{CT}(q, w) \geq \frac{\partial}{\partial q} C^{LT}(q, w)$. A l'optimum, le producteur offre une quantité q^* telle que $\frac{\partial}{\partial q} C^j(q, w) = p$ ($j = CT, LT$). On en déduit que l'offre de court terme est supérieure à l'offre de long terme pour tout $p > \bar{p}$.

Exercice 5

On considère la production d'un unique bien avec la fonction de production suivante:

$$Y = \left[(A_K K)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (A_L L)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

où L mesure le nombre d'heures de travail et K le stock de capital. Le paramètre σ est tel que $\sigma > 0$. Les paramètres A_K et A_L sont positifs.

Tous les marchés sont concurrentiels. Le prix de l'output est normalisé à 1.

1. Calculer l'élasticité de substitution associée à cette fonction de production.

On calcule le $TMS_{L,K} = \left(\frac{A_K}{A_L} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \left(\frac{L}{K} \right)^{\frac{1}{\sigma}}$. On en déduit que $\frac{L}{K} = TMS^{\sigma} \cdot \left(\frac{A_L}{A_K} \right)^{\sigma-1}$. On en déduit que l'élasticité de substitution est égale à σ .

2. Calculer la part de la rémunération du travail ($s_L = \frac{w^* L}{Y}$) et la part de la rémunération du capital ($s_K = \frac{r^* K}{Y}$) lorsque les marchés du travail et du capital sont à l'équilibre.

La firme a pour objectif de maximiser le profit:

$$\text{Max } F(K, L) - wL - rK.$$

avec $F(K, L) = Y$

A l'optimum, les deux conditions d'optimalité suivantes sont satisfaites:

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = r \text{ et } \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = w$$

On a donc à l'équilibre sur le marché du capital: $\frac{\partial F(\bar{K}, \bar{L})}{\partial K} = (A_K)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} (\bar{K})^{-\frac{1}{\sigma}} \left[(A_K \bar{K})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (A_L \bar{L})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right] r^*$

où r^* désigne la rémunération d'équilibre.

De la même manière sur le marché du travail:

$$(A_L)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} (\bar{L})^{-\frac{1}{\sigma}} \left[(A_K \bar{K})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (A_L \bar{L})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} = w^*$$

On cherche la part de la rémunération du capital i. e. $\frac{r^* \bar{K}}{Y}$.

On calcule donc ce ratio à l'équilibre à partir de l'équation d'équilibre ci-dessus.

On trouve:

$$s_K = \frac{r^* \bar{K}}{Y} = (A_K)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} (\bar{K})^{1-\frac{1}{\sigma}} \left[(A_K \bar{K})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (A_L \bar{L})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1} - \frac{\sigma}{\sigma-1}} = \frac{(A_K)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} (\bar{K})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\left[(A_K \bar{K})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (A_L \bar{L})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]}$$

3. Interpréter une augmentation des paramètres A_L et A_K . Montrer que l'élasticité de w^* par rapport à A_L est égale à $1 - \frac{s_K}{\sigma}$. Quel est son signe? Comment expliquer ce résultat? Quel est son signe si on retient des valeurs raisonnables pour les paramètres soit $\sigma = 0,5$ et $s_K = 0,4$?

Une augmentation des termes A_i s'interprète comme du progrès technique.

Calculons l'élasticité de w^* par rapport à A_L .

On trouve (cela exige un peu de calcul mais sans aucune difficulté): $\frac{\partial w^*}{\partial A_L} \cdot \frac{A_L}{w^*} = 1 - \frac{s_K}{\sigma}$.

Interprétations:

(i) Le signe est a priori ambigu: si $\sigma > s_K$, l'élasticité est positive: une augmentation de A_L augmente le salaire d'équilibre mais si $\sigma < s_K$, une augmentation de A_L réduit le salaire d'équilibre. Cette ambiguïté qui dépend du niveau de l'élasticité de substitution s'explique par les deux effets de A_L sur la demande de travail. Une augmentation de A_L rend le travail plus productif et en cela conduit le producteur à en demander plus mais l'augmentation de A_L permet aussi au producteur d'économiser du travail et cela le conduit à diminuer la demande de travail.

(ii) Si $s_K = 0,4$ et si $\sigma > 1$, on se trouve dans le cas standard où l'augmentation de A_L accroît le salaire d'équilibre.

4. De la même manière, montrer que l'élasticité de w^* par rapport à A_K est égale à $\frac{s_K}{\sigma}$ et commenter ce résultat.

Interprétation: le progrès technique sur le capital accroît toujours le salaire d'équilibre. En effet cela induit le producteur à produire plus et donc à demander plus de travail.

5. Selon vous, le processus d'automatisation des tâches au travail s'apparente-t-il à une augmentation de A_L , de A_K ou d'aucun des deux?

On peut penser que l'automatisation des tâches se traduit plutôt par une augmentation de A_L en rendant le travail plus efficace. Si c'est le cas alors cette automatisation accroît le salaire d'équilibre (voir question 3). C'est ce résultat qui peut rendre les économistes insatisfaits.

1. Interpréter la fonction de production de l'output.

La fonction de production s'apparente à une fonction CES où les "facteurs de production" sont les différents services i .

2. Montrer que si $\frac{w}{r} > 1$, toutes les tâches qui peuvent être automatisées sont réalisées avec du capital uniquement.

Pour produire un service qui peut être automatisée, le capital et le travail sont parfaitement substituables ($y(i) = k(i) + l(i)$) en proportion 1 pour 1 (le TMST est égal à 1). On en déduit que si $w > r$, le producteur n'utilise que du capital.

On supposera à présent que $\frac{w}{r} > 1$.

3. Montrer que la demande de capital pour la tâche i est égale à: $r^{-\sigma} S^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$ avec $S = \sum_{i=1}^N y(i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$. En déduire la rémunération du capital à l'équilibre en fonction de S et de l'offre de capital égale à $\bar{K}$.

Le profit de la firme peut donc s'écrire: $\left(\sum_{i=1}^I k(i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \sum_{i=I+1}^N l(i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - w \sum_{i=I+1}^N l(i) - r \sum_{i=1}^I k(i)$

La firme maximise ce profit par rapport à $l(i)$ et $k(i)$.

Pour $k(i)$, on en déduit la condition d'optimalité:

$$r = k(i)^{-\frac{1}{\sigma}} \cdot S^{\frac{1}{\sigma-1}} \text{ avec } S = \sum_{i=1}^N y(i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$$

On en déduit $k(i) = r^{-\sigma} S^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$.

La demande de capital est donc égale à $I \cdot r^{-\sigma} S^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$

A l'équilibre sur le marché du capital, on a donc: $I \cdot (r^*)^{-\sigma} S^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{K}$

On en déduit $r^* = \left(\frac{I}{\bar{K}} \right)^{\frac{1}{\sigma}} S^{\frac{1}{\sigma-1}}$

4. Déterminez de la même manière la rémunération du travail à l'équilibre en fonction de S et de l'offre de travail égale à $\bar{L}$.

On trouve de la même manière $w^* = \left(\frac{N-I}{\bar{L}} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \gamma^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} S^{\frac{1}{\sigma-1}}$

5. A quelle condition, a-t-on $\frac{w}{r} > 1$ à l'équilibre? On supposera cette condition satisfaite.

On a $w^* > r^*$ ssi $\frac{\bar{L}}{\bar{K}} < \frac{N-I}{I} \cdot \gamma^{\sigma-1}$.

Si le travail est suffisamment rare alors le salaire est supérieur à r de sorte que les tâches automatisées seront effectivement accomplies avec du capital uniquement.

6. Après avoir déterminé $k(i)$ et $l(i)$, en déduire que la production d'équilibre peut s'écrire:

$$Y = \left[I^{\frac{1}{\sigma}} \bar{K}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (N-I)^{\frac{1}{\sigma}} (\gamma \bar{L})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

On détermine $k(i)$ et $l(i)$ en remplaçant les prix des facteurs par leur valeur d'équilibre.

On trouve alors: $k(i) = \frac{\bar{K}}{I}$ et $l(i) = \frac{\bar{L}}{N-I}$

On en déduit alors l'expression de la production.

7. Commenter cette fonction de production en montrant comment la modélisation utilisée endogénéise d'une certaine manière certains paramètres de la fonction de production de la partie précédente.

On a endogénéisé les termes A_L et A_K de la partie précédente. A_L et A_K dépendent du nombre de tâches qui peuvent être automatisées. L'automatisation se traduit par une hausse de A_K et une baisse de A_L .

8. Calculer la part de la rémunération du travail (vous pouvez utiliser les résultats de la partie précédente) que l'on notera s_L .

Par analogie avec la partie précédente, on en déduit que:

$$s_L = \frac{(A_L)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} (\bar{L})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\left[(A_K \bar{K})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (A_L \bar{L})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]} = \frac{1}{1 + \left(\frac{A_K \bar{K}}{A_L \bar{L}} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{I \bar{K}}{(N-I) \bar{L}} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}$$

9. Quel est l'effet d'une augmentation de I sur la production Y et sur s_L ?

Une augmentation de I augmente Y . En effet le signe de la dérivée de Y par rapport à I est positif ssi $\frac{N-I}{I} > \frac{\gamma \bar{L}}{\bar{K}}$. C'est vrai puisqu'on a supposé que $\frac{\bar{L}}{\bar{K}} < \frac{N-I}{I} \cdot \gamma^{\sigma-1}$. L'intuition

est claire: une augmentation du nombre de tâches automatisées augmente la production car une tâche automatisée est plus productive qu'une tâche non automatisée ($\gamma < 1$). Par ailleurs, une hausse de I réduit s_L . Là encore l'intuition est claire: l'augmentation du nombre de tâches automatisées réduit la demande de travail et donc réduit w^* et augmente Y . In fine, une hausse de I réduit s_L .

10. Discuter l'effet d'une augmentation de I sur la rémunération du travail en remarquant que $w^* \bar{L} = s_L Y$.

On en déduit que I a un effet ambigu sur les salaires: Y augmente mais s_L diminue.

11. Conclure en expliquant en quoi ce modèle est plus satisfaisant que le précédent pour analyser l'effet de l'automatisation des tâches.

Ce dernier modèle est une représentation plus riche de l'automatisation qu'une simple variation de A_L ou A_K : il y a à la fois une diminution de la demande de travail et une hausse possible de la masse salariale due à l'augmentation de la production.

Exercice 6

1. Elasticité: $\frac{e'(H)}{e(H)} H = \alpha$

2. (i) $wH + F$ (ii) $wT + w(1+x)(H - T) + F$

Le coût moyen:

(i) $CM(H) = wH^{1-\alpha} + FH^{-\alpha}$ et

(ii) $CM(H) = w(1+x)H^{1-\alpha} - wxTH^{-\alpha} + FH^{1-\alpha}$.

3. Minimisons le coût moyen en supposant que $H \leq T$.

$CM'(H) = 0$ ssi $H = \frac{F\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{w}$. On a $\frac{F\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{w} \leq T$ ssi $\frac{Tw}{F} \geq \frac{\alpha}{1-\alpha}$. On vérifie que dans ce cas $CM''(\frac{F\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{w}) > 0$. C'est bien un minimum.

Par conséquent si $\frac{Tw}{F} < \frac{\alpha}{1-\alpha}$, le minimum est atteint en $H = T$.

On remarque que H^* augmente si α augmente. En effet si les heures efficaces sont plus élastiques à H , la firme est incitée à augmenter le nombre d'heures pour réduire le coût moyen.

4. Minimisons le coût moyen en supposant que $H \geq T$.

$CM'(H) = 0$ ssi $H = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{F-xwT}{w(1+x)}$. On a $\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{F-xwT}{w(1+x)} \geq T$ ssi $\frac{Tw}{F} < \frac{\alpha}{1+x-\alpha}$. On vérifie que dans ce cas $CM''(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{F-xwT}{w(1+x)}) > 0$. C'est bien un minimum.

Par conséquent si $\frac{Tw}{F} > \frac{\alpha}{1+x-\alpha}$, le minimum est atteint en $H = T$.

6. Au total, à partir des questions 3 et 4, le minimum du coût moyen est donc:

$$H^* = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{F-xwT}{w(1+x)} & \text{si } \frac{Tw}{F} < \frac{\alpha}{1+x-\alpha} \\ T & \text{si } \frac{\alpha}{1-\alpha} > \frac{Tw}{F} > \frac{\alpha}{1+x-\alpha} \\ \frac{F\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{w} & \text{si } \frac{\alpha}{1-\alpha} < \frac{Tw}{F} \end{cases}$$

7. Si $H^* = T$, une baisse de T réduit H^* et donc accroît la demande travailleurs pour produire Y .

En revanche si $H^* > T$, une baisse de T augmente H^* et donc réduit la demande de travailleurs. Explication: une baisse de T augmente le coût fixe d'embauche égal ici à $F+Tw$. La firme préfère alors embaucher moins et augmenter les heures travaillées.