

## CORRIGE DU DOSSIER DE TD 1

### Exercice 1

**a.** On a  $y = x$  donc  $y = e^{0,05t}$ . On procède à une transformation logarithmique :  $\ln y = \ln e^{0,05t}$ . Mais le logarithme de l'exponentielle de  $x$  est  $x$  (cf. le formulaire) :  $\ln y = 0,05t$ . On dérive alors cette expression par rapport à  $t$ .  $\ln y(t)$  est une fonction composée. On lui applique donc la formule de dérivation pertinente (cf. le formulaire) pour obtenir :

$$\frac{\frac{dy(t)}{dt}}{y(t)} = 0,05$$

L'expression de droite est le taux de croissance instantané de la variable  $y$  que nous noterons  $g_y$ . Il est donc égal à 5%. On remarque que cette valeur apparaît déjà dans l'écriture de  $y$  sous forme de fonction exponentielle.

**b.** Cette fois  $y = z$  ou  $y = e^{0,01t}$ . En appliquant la même méthode on montre que  $g_y = 0,01$  ou 1%.

**c.**  $y = xz$  ou  $y = e^{0,05t}e^{0,01t}$ . On peut réécrire  $y = e^{0,05t+0,01t} \Rightarrow y = e^{0,06t}$ . On a ici  $g_y = 0,06$ .

**d.** On a  $y = x/z$  donc  $y = \frac{e^{0,05t}}{e^{0,01t}}$  ou  $y = e^{0,05t-0,01t}$ . Donc  $g_y = 0,04$ .

**e.**  $y = x^\beta z^{1-\beta} \Rightarrow y = (e^{0,05})^{1/2}(e^{0,01t})^{1/2} \Rightarrow y = e^{0,025t}e^{0,005t} \Rightarrow y = e^{0,025t+0,005t}$ . On a ici  $g_y = 0,03$ .

**f.**  $y = \left(\frac{x}{z}\right)^\beta$ , avec  $\beta = \frac{1}{3}$ . On  $y = \left(\frac{e^{0,05t}}{e^{0,01t}}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y = (e^{0,05t-0,01t})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y = (e^{0,04t})^{1/3} \Rightarrow g_y \simeq 1,33\%$

### Exercice 2

**a.** Soit  $y = k^\beta$ . On doit écrire le taux de croissance de  $y$  en fonction de celui de  $k$ . Pour cela, on opère une transformation logarithmique et on dérive par  $t$  l'expression obtenue.

$$\ln y = \beta \ln k \Rightarrow g_y = \beta g_k$$

**b.** De la même façon on montre  $y = \frac{k}{m} \Rightarrow \ln y = \ln k - \ln m \Rightarrow g_y = g_k - g_m$

**c.**  $y = (k/m)^\beta \Rightarrow \ln y = \beta(\ln k - \ln m) \Rightarrow g_y = \beta(g_k - g_m)$

**d.**  $y = (kl)^\beta(1/m)^{1-\beta} \Rightarrow \ln y = \beta(\ln k + \ln l) - (1 - \beta)\ln m \Rightarrow$

On obtient ainsi  $g_y = \beta(g_k + g_l) - (1 - \beta)g_m$

### Exercice 3

On suppose que  $\frac{\dot{x}}{x} = 0,10$  et  $\frac{\dot{z}}{z} = 0,20$ , et que  $x(0) = 2$  et  $z(0) = 1$ . Calculez les valeurs numériques de  $y(t)$  pour  $t = 0, t = 1, t = 2$  et  $t = 10$  pour les cas suivants :

$$(a) y = xz; (b) y = \frac{x}{z}; (c) y = x^\beta z^{1-\beta}, \text{ avec } \beta = 1/3$$

Nous raisonnons en temps continu. D'après les données de l'exercice, on peut écrire :

$$x(t) = 2e^{0,1t} \text{ et } z(t) = e^{0,2t}$$

On peut obtenir le premier résultat à partir de  $\frac{\dot{x}}{x} = 0,10$ . Ceci peut être réécrit :

$$\frac{d\ln x}{dt} = 0,10 \quad \text{et donc} \quad d\ln x = 0,10 dt$$

Si on intègre la dernière expression, on obtient :

$$\int d\ln x(t) = \int 0,1 dt$$

$\Rightarrow \ln x(t) = 0,1t + c$  (application de la formule d'intégration du formulaire)

$\Rightarrow x(t) = 2e^{0,1t}$  car  $x(0) = 2$  (on pose  $t = 0$  pour trouver  $c$  puis on passe en exponentiel l'équation qui précède)

La même méthode permet d'obtenir  $z(t)$ . Sur ces bases, des calculs (un peu fastidieux mais utiles pour vos neurones) permettent de répondre aux questions de l'exercice.

(a)  $y(0) = 2 \times 1 = 2$ ;  $y(1) = 2e^{0,1}e^{0,2} = 2e^{0,3}$ ;  $y(2) = 2e^{0,2}e^{0,4} = 2e^{0,6}$ ;  $y(10) = 2e^3$

(b)  $y(0) = 2$ ;  $y(1) = 1.810$ ;  $y(2) = 1.637$ ;  $y(10) = 0.736$

(c)  $y(0)=2^{1/3}$ ,  $y(1)=1,45$ ;  $y(2)=1,76$ ;  $y(10)=6,67$ .

### Exercice 4

Le tracé du second schéma repose sur le fait que la pente du logarithme de X est aussi son taux de croissance. La pente de la courbe représentant  $\ln X$  sera d'abord croissante et égale à  $a$  puis elle va ensuite rejoindre l'horizontale avant de se relever jusqu'à revenir à  $a$ .

## CORRIGÉ DU DOSSIER DE TD 2

### Corrigé exercice 1 La fonction de production

La fonction de Cobb-Douglas s'écrit :

$$Y = AK^\alpha L^\beta \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \text{ et } 0 < \beta < 1$$

La productivité marginale du travail exprime l'accroissement de production résultant d'un accroissement marginal de la quantité de travail. Il s'agit donc de la dérivée de la fonction de production par rapport à  $L$ . On applique alors la formule de la dérivée d'une fonction puissance :

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dL} &= \beta A K^\alpha L^{\beta-1} \\ \frac{dY}{dL} &= \beta \frac{AK^\alpha L^\beta}{L} \quad [ \text{on applique } x^{-1} = \frac{1}{x} ] \\ \frac{dY}{dL} &= \beta \frac{Y}{L} \end{aligned}$$

De même, la productivité marginale du capital exprime l'accroissement de la production résultant d'un accroissement marginal de la quantité de capital. Il s'agit de la dérivée de la fonction de production par rapport à  $K$ . On applique la même formule de dérivation :

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dK} &= \alpha A K^{\alpha-1} L^\beta \\ \frac{dY}{dK} &= \alpha \frac{AK^\alpha L^\beta}{K} \quad [ \text{on applique } x^{-1} = \frac{1}{x} ] \\ \frac{dY}{dK} &= \alpha \frac{Y}{K} \end{aligned}$$

Le taux marginal de substitution entre le capital et le travail ou taux de substitution technique indique la variation du stock de capital nécessaire pour maintenir la production constante lorsque la quantité de travail varie à la marge. On écrit (en s'appuyant sur une définition vue en cours de microéconomie mais que vous pouvez retrouver) :

$$TMS_{KL} = -\frac{\delta K}{\delta L} = \frac{\frac{dY}{dL}}{\frac{dY}{dK}}$$

Ainsi on obtient :

$$TMS_{KL} = \frac{\beta K}{\alpha L}$$

L'élasticité de substitution du capital au travail indique la variation en pourcentage du rapport  $K/L$  provoquée par une variation de 1% du rapport w/r (prix des deux facteurs) (à nouveau,

nous nous appuyons sur les acquis de microéconomie de seconde année). La définition de cette élasticité conduit à la formule suivante :

$$\sigma = \frac{\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}}}{\frac{d\left(\frac{w}{r}\right)}{\frac{w}{r}}}$$

On raisonne ici à l'équilibre du producteur en supposant que ce dernier égalise son taux de substitution technique au rapport du prix des facteurs. Ainsi on peut écrire (d'après la question précédente) :

$$TMS_{KL} = \frac{\beta K}{\alpha L} = \frac{w}{r} \text{ ou encore } \frac{K}{L} = \frac{\alpha w}{\beta r}$$

En différenciant cette dernière expression on obtient :

$$d\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\alpha}{\beta} d\left(\frac{w}{r}\right)$$

Ces éléments permettent de simplifier la formule de l'élasticité et de montrer finalement que :

$$\sigma = 1$$

L'élasticité de substitution de la fonction Cobb-Douglas a pour propriété caractéristique d'être égale à 1.

A quelle condition les rendements d'échelle de notre fonction sont-ils constants ? Ils seront constants si la production est multipliée par  $z$  lorsqu'on multiplie par  $z$  les quantités de capital et de travail utilisées.

$$\text{Soit } F(zK, zL) = A(zK)^\alpha (zL)^\beta = z^{\alpha+\beta} AK^\alpha L^\beta$$

On utilise ici le fait que  $(xy)^a = x^a y^a$  puis que  $x^a x^b = x^{a+b}$

On voit finalement que si  $\alpha + \beta = 1$ , la fonction de production est homogène de degré zéro ou, en termes économiques, les rendements d'échelles sont constants. Un doublement des quantités de tous les facteurs utilisés doublerait la production. C'est l'hypothèse du modèle de Solow qui implique que  $\beta = 1 - \alpha$ .

## Corrigé exercice 2 Le modèle de Solow sans progrès technique

### 1. Fonction de production sous forme intensive

La fonction de production est à rendement d'échelle constant. Si on multiplie les quantités de facteurs utilisées par une constante, la production se trouve multipliée par cette constante. Cette propriété de la fonction de production permet de l'écrire sous forme intensive de la façon suivante en choisissant pour constante  $1/L$  :

$$\frac{Y}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha \left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha}$$
$$\Rightarrow y = k^\alpha$$

D'autres façons de faire sont possibles. On peut par exemple diviser la fonction de production initiale des deux côtés par  $L = (L)^\alpha(L)^{1-\alpha}$ .

### 2. Equation dynamique fondamentale

Nous partons de l'équation d'accumulation du capital :

$$\dot{K} = sY - \delta K \quad (1)$$

On rappelle que  $\dot{K}$  est le taux de variation instantané du stock de capital. De façon générale  $\dot{X} = dX/dt$

Si par ailleurs, on applique une transformation logarithmique au capital par unité de travail efficace :

$$\ln k = \ln \left(\frac{K}{L}\right)$$

On obtient :

$$\ln k = \ln K - \ln L$$

En dérivant les éléments de cette équation par rapport au temps, on obtient la relation entre leurs taux de croissance :

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$$

Dans cette expression on introduit l'équation (1) pour obtenir :

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sY - \delta K}{K} - n$$

Il s'agit ensuite de simplifier l'écriture pour faire apparaître la variation instantanée du capital par tête comme une fonction du niveau de capital par tête :

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sY}{K} \frac{L}{L} - (\delta + n)$$

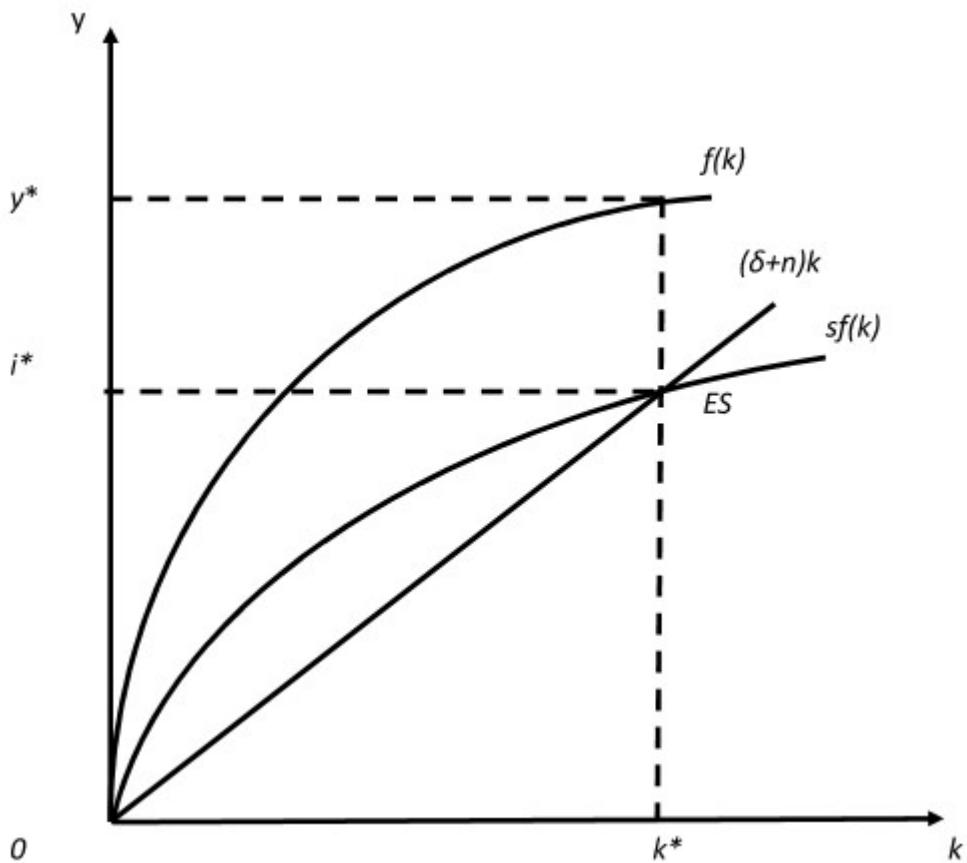
$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sy}{k} - (\delta + n)$$

$$\dot{k} = sk^\alpha - (\delta + n)k$$

On obtient ici l'équation dynamique fondamentale du modèle qui définit la loi de variation du capital par tête en fonction du montant de capital par tête atteint à l'instant t. Cette variation dépend de l'écart entre la fonction d'investissement  $i=sk^\alpha$  et la fonction d'investissement de point mort  $i_{pm}=(\delta + n)k$  qui permet de préserver un niveau de capital par tête donné en compensant la dépréciation du capital (destruction lié à son usage) et la dilution du capital (baisse de  $k$  liée à l'augmentation de la population en se rappelant que  $k$  est le stock de capital  $K$  divisé par la population active  $L$ ).

### 3. Graphique de Solow

Les propriétés de cette équation peuvent être examinées à l'aide d'un graphique représentant la fonction d'investissement  $i=sk^\alpha$  et la fonction d'investissement de point mort  $i_{pm}=(\delta + n)k$  :



On peut commencer par placer la fonction de production sur le graphique. Elle est représentée par une courbe croissante mais dont la pente est décroissante (on le vérifie en calculant la dérivée de  $y = k^\alpha$ ).

On trace ensuite la fonction d'investissement sous la courbe de la fonction de production. Son allure est similaire. La pente est positive et décroissante mais inférieure à la courbe de la fonction de production car elle dépend aussi du taux d'épargne qui est plus petit que 1. Attention, sa pente tend vers zéro donc vers l'horizontale. La courbe ne doit pas avoir de partie décroissante à son extrémité !

Enfin on trace la droite représentant la fonction d'investissement de point mort dont la pente est donnée par le taux de dépréciation et le taux de croissance de la population active.

Le point d'intersection de la droite d'investissement de point mort et de la courbe représentant l'investissement détermine l'état stationnaire de l'économie. En ce point, le capital par tête est constant (d'après l'équation fondamentale).

On peut faire apparaître la dynamique de l'économie sur l'axe des abscisses. Si le capital par tête est inférieur à sa valeur d'état stationnaire  $k^*$ , on voit que  $i(k) > ipm(k)$ . D'après l'équation fondamentale, le capital par tête doit donc augmenter. On peut l'indiquer à l'aide de flèches. L'inverse est vrai si  $k > k^*$ .

#### 4. Mécanisme économique

Si le stock de capital par tête est inférieur à la valeur  $k^*$ , l'investissement des ménages est supérieur à la valeur qui permet juste de maintenant un capital par tête constant en compensant la dépréciation du capital et l'accroissement de la population (investissement de point mort). Il y donc croissance du capital par tête. Mais compte tenu de la productivité marginale décroissante du capital, le revenu supplémentaire et l'investissement supplémentaire générés par cette croissance sont de moins en moins importants. De son côté, l'investissement de point mort croît toujours au même rythme à mesure que le capital par tête augmente. Le rythme auquel  $k$  croît diminue donc pour tomber à zéro lorsque l'investissement rejoint sa valeur de point mort au point d'intersection des deux courbes. L'économie est alors sur son sentier régulier de croissance. Le capital par tête et le revenu par tête sont constants.

#### 5. Taux de croissance du revenu agrégé

Le long terme renvoie ici au temps nécessaire pour atteindre l'état stationnaire. On sait d'après le graphique de la question précédente que  $k$  reste constant à l'état stationnaire. Comme  $y$  est fonction de  $k$  (d'après la fonction de production intensive), cela veut dire que le taux de croissance de  $y$  est nul à l'état stationnaire. On en déduit que le revenu agrégé croît au même taux que la population dans le modèle de Solow sans progrès technique :

$$\begin{aligned} y &= \frac{Y}{L} \\ \ln y &= \ln Y - \ln L \\ g_y &= g_Y - g_L \\ g_Y &= n \end{aligned}$$

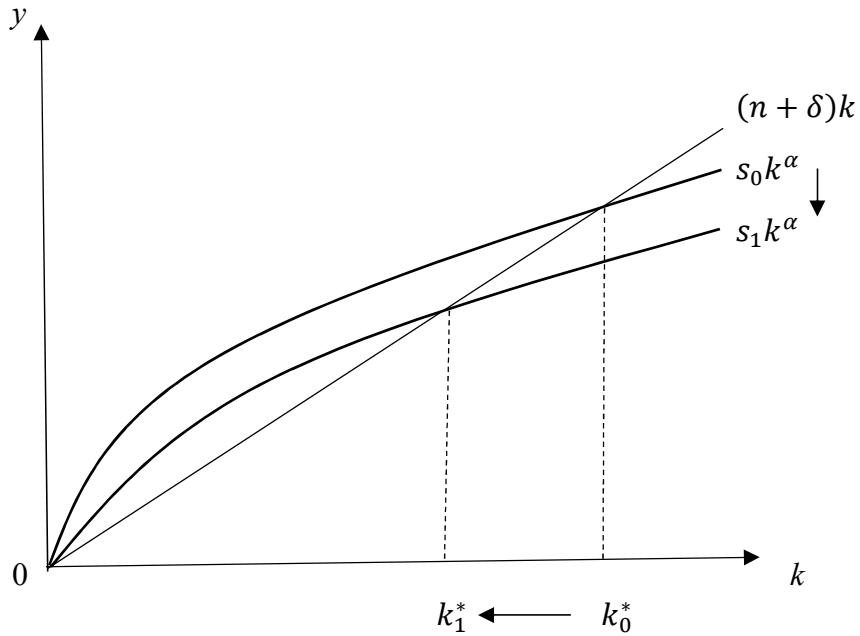
#### 6. Une législation qui décourage l'investissement

Les conséquences d'une chute du paramètre  $s$  peuvent s'analyser à partir du graphique de la question 3. La courbe d'investissement se déplace vers le bas.

A l'impact puis en transition, l'investissement descend sous l'investissement de point mort (le capital par tête n'a pas encore changé). Le capital par tête et le revenu par travailleur décroissent (en partant de l'état stationnaire initial).

A long terme, l'économie atteint un nouveau sentier de croissance régulier avec des taux de croissance identiques (nul pour  $y$  et égal à  $n$  pour  $Y$ ) mais des niveaux de  $k$  et de  $y$  moins importants qu'ils n'étaient auparavant. Remarquez que l'effet sur la consommation est ambigu.

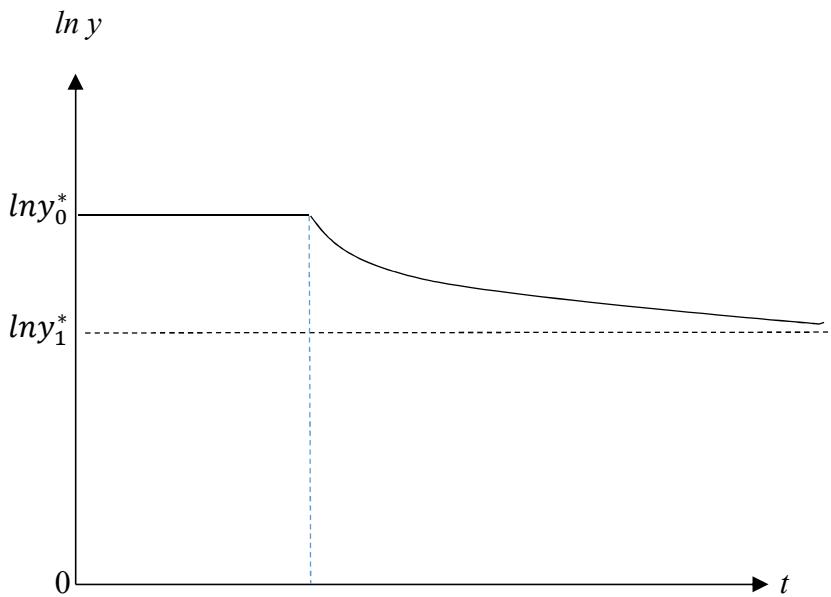
La chute du taux d'épargne signifie qu'on consomme une part plus importante du revenu mais le montant du revenu chute. (L'exercice 8 revient sur cette question).



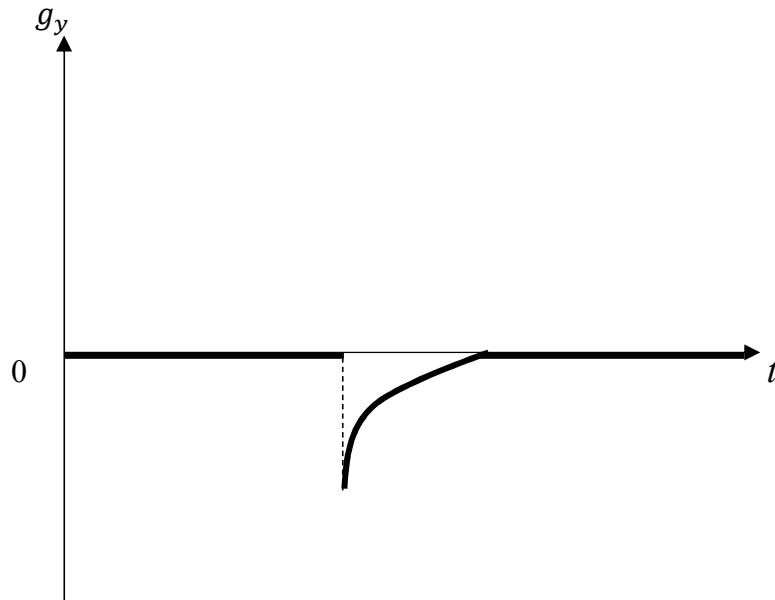
## 7. Dynamique de $\ln y$ et $g_y$

Cf. C. Jones p. 45-46.

L'évolution logarithme du revenu par habitant au cours du temps nous intéresse car sa pente est le taux de croissance du revenu par habitant.



Le taux de croissance du revenu par habitant est nul avant l'intervention du gouvernement. L'intervention génère une chute du revenu qui finit par se stabiliser à sa nouvelle valeur de long terme  $y_1^*$ .



## 8. Un impôt proportionnel sur le revenu

La mise en œuvre d'un impôt sur l'intégralité des revenus des ménages suivant la formule  $(1 - \tau)Y$  nous conduit à réécrire la fonction d'investissement qui est désormais  $I = s(1 - \tau)Y$  ou en divisant par le nombre de travailleurs :  $i = s(1 - \tau)y$ . C'est la seule modification du point de vue du modèle de Solow si on fait l'hypothèse que le gouvernement consomme les ressources qu'il collecte. On voit alors que l'introduction de la taxe est équivalente à la réduction du taux d'épargne considérée dans la question 7. Comme le revenu disponible des ménages baisse, ils sont contraints de réduire leur niveau d'investissement à taux d'épargne constant. La croissance est négative à court terme et on finit par atteindre un nouvel état stationnaire caractérisé par un revenu par travailleur inférieur.

Si l'Etat investit entièrement ses recettes fiscales et accumule du capital, cela augmente le montant de l'investissement. Contrairement aux ménages, on suppose que l'Etat, dans ce cas, ne consomme rien. L'investissement par travailleur devient :  $i = s(1 - \tau)y + \tau y = (s - s\tau + \tau)y$ . Comme on a  $s\tau < \tau$ , on constate qu'il y a bien augmentation de l'investissement. La courbe d'investissement se déplace vers le haut et l'économie finit par atteindre un état stationnaire correspondant à un revenu par travailleur plus élevé.

Il est possible de prolonger l'exercice en examinant ce qui se passe si l'Etat n'investit qu'une partie de ses recettes fiscale et ce au même taux que les ménages.

## Corrigé exercice 3

### Le modèle de Solow avec progrès technique

**1.** Pour écrire de la fonction de production sous forme intensive (en unités de travail efficace) on divise la fonction de production de l'économie par  $AL$ , la quantité de travail efficace :

$$\frac{Y}{AL} = \frac{K^\alpha(AL)^{1-\alpha}}{AL}$$

En s'appuyant sur les propriétés des fonctions puissances on peut alors écrire :

$$\frac{Y}{AL} = \frac{K^\alpha(AL)^{1-\alpha}}{(AL)^\alpha(AL)^{1-\alpha}}$$

En effet,  $(AL)^\alpha(AL)^{1-\alpha} = (AL)^{\alpha+1-\alpha}$ . En simplifiant on obtient :

$$\frac{Y}{AL} = \left(\frac{K}{AL}\right)^\alpha$$

C'est-à-dire :

$$\hat{y} = \hat{k}^\alpha$$

#### **2. Détermination de l'équation dynamique du modèle avec progrès technique**

On cherche à exprimer la loi de variation de  $\hat{k}$  en fonction des paramètres du modèle. Nous partons pour cela définition de cette grandeur :

$$\hat{k} = \frac{K}{AL}$$

Après transformation logarithmique on obtient :

$$\ln\hat{k} = \ln K - \ln A - \ln L$$

En dérivant cette expression par rapport à  $t$  on obtient :

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L}$$

Nous connaissons la loi de variation du stock de capital qui se définit ainsi :

$$\dot{K} = sY - \delta K$$

On peut donc écrire (en remplaçons les taux de croissance de  $A$  et  $L$  par les paramètres auxquels ils sont égaux par hypothèse) :

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{sY - \delta K}{K} - \gamma - n$$

On multiplie ensuite les deux membres de l'équation par  $\hat{k}$  et le tour est joué. On obtient :

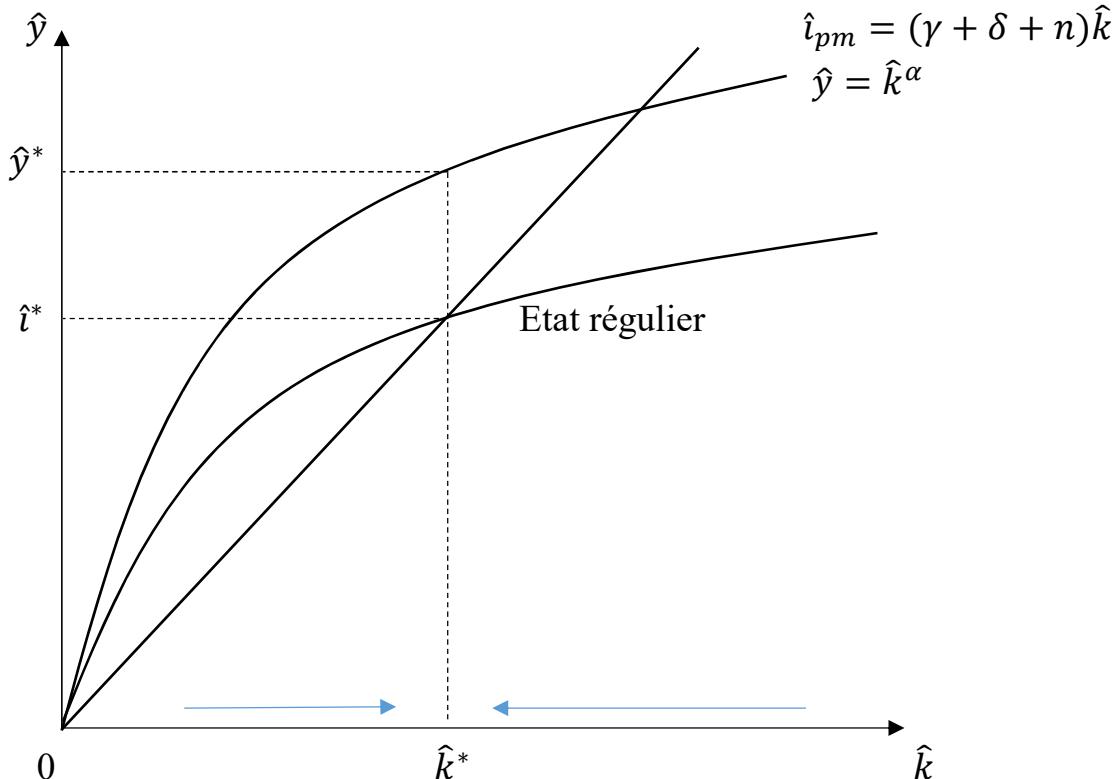
$$\dot{\hat{k}} = \frac{sY}{K} \frac{K}{AL} - (\delta + \gamma + n)\hat{k}$$

Ou encore :

$$\dot{\hat{k}} = s\hat{k}^\alpha - (\delta + \gamma + n)\hat{k}$$

On obtient ainsi une équation analogue à l'équation du modèle de Solow sans progrès technique. La variation du capital par unité de travail efficace dépend de l'écart entre l'investissement par travailleur efficace et un investissement de point mort qui tient désormais compte du rythme du progrès technique. Ce dernier est en effet l'équivalent d'un accroissement du nombre de travailleur. Il dilue le capital. On finalement exprimer le taux de croissance du capital par travailleur efficace en divisant les deux termes de l'équation par  $\hat{k}$ .

**3.** L'équation dynamique qui précède montre que la variation du capital par unité de travail efficace dépend de l'écart entre l'investissement par unité de travail efficace et l'investissement de point mort correspondant. Si  $\hat{k}$  est petit, l'investissement dépasse sa valeur de point mort et le capital par travailleur efficace  $\hat{k}$  augmente. Le mécanisme est ensuite similaire à celui qui a été présenté dans l'exercice 2. A mesure que l'investissement accroît  $\hat{k}$ , le revenu par travailleur efficace augmente et avec lui le montant total de l'investissement par unité de travail efficace. Mais comme la productivité marginale de  $\hat{k}$  est décroissante, le revenu augmente de moins en moins et il en est de même pour l'investissement qui finit par rejoindre sa valeur de point mort. En effet, cette dernière augmente toujours au même rythme. L'économie converge ainsi vers un état régulier caractérisé par une valeur stationnaire de  $\hat{k}$ . Cette dynamique s'observe sur le schéma de Solow corrigé :



On peut illustrer la trajectoire de  $\ln \hat{y}$  ou utiliser un graphique qui montre l'évolution du taux de croissance du capital par travailleur efficace.

4. On commence par déterminer les valeurs d'état régulier de  $\hat{k}^*$ ,  $\hat{y}^*$ . A l'état régulier, d'après la réponse précédente, on a :

$$s\hat{k}^\alpha - (\delta + \gamma + n)\hat{k} = 0$$

$$\frac{\hat{k}^\alpha}{\hat{k}} = \frac{\delta + \gamma + n}{s}$$

$$\hat{k}^{1-\alpha} = \frac{s}{\delta + \gamma + n}$$

$$\hat{k}^* = \left( \frac{s}{\delta + \gamma + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Compte tenu de la question 1, nous pouvons écrire :

$$\hat{y}^* = \left( \frac{s}{\delta + \gamma + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Mais  $\hat{y} = \frac{y}{A}$ , on peut donc écrire :

$$y^* = A \left( \frac{s}{\delta + \gamma + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Et par définition on a :

$$c^* = (1-s)A \left( \frac{s}{\delta + \gamma + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

## 5. Taux de croissance de la production par travailleur et de la production absolue

D'après la question 1, on a :

$$\hat{y} = \hat{k}^\alpha$$

Compte tenu de la définition du revenu par travailleur efficace  $\hat{y}$  (dans l'énoncé de l'exercice) on peut alors écrire :

$$y = A\hat{k}^\alpha$$

En procédant à une transformation logarithmique et en dérivant par rapport au temps on obtient :

$$g_y = g_A + \alpha g_{\hat{k}}$$

A long terme, comme nous l'avons vu dans la question 3,  $g_{\hat{k}} = 0$ . Le capital par unité de travail efficace est constant. On en déduit que le taux de croissance du revenu par travailleur est déterminé par le taux de croissance de l'efficacité du travail  $A$  c'est-à-dire par le rythme du progrès technique. En l'absence de progrès technique ( $g_A = \gamma = 0$ ), l'économie ne connaît pas la croissance. Pour cette raison, on peut dire que le progrès technique est le moteur de la

croissance. Il est aussi possible d'obtenir ce résultat en dérivant le logarithme du revenu d'état régulier obtenu dans la question précédente.

Dans cette économie, la production globale augmente plus vite que la population. Par définition :

$$y = \frac{Y}{L}$$

D'où :

$$g_y = g_Y - g_L$$

On en déduit :

$$g_Y = n + \gamma$$

Le taux de croissance du PIB est la somme du taux de croissance démographique et du taux de croissance de l'efficacité du travail.

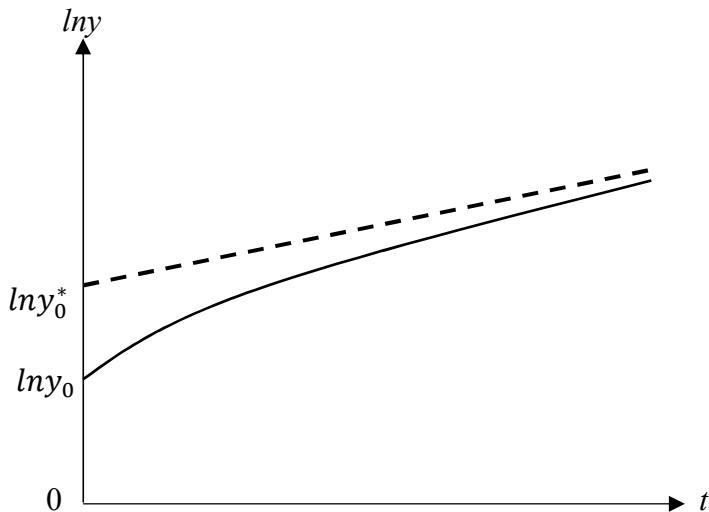
## 6. Tracé de la trajectoire du sentier régulier de croissance et de la trajectoire y conduisant

La représentation de la trajectoire du revenu est obtenue en logarithme dans l'espace temps- $\ln y$ . En effet, ceci permet de tracer simplement cette trajectoire grâce au fait que la pente de  $\ln y$  est le taux de croissance de  $y$  ( $g_y$ ).

L'analyse s'appuie sur le schéma de Solow et se décompose en trois étapes :

- i) Tracé du sentier régulier de croissance
- ii) Analyse de la situation initiale de l'économie (valeur de  $y_0$ )
- iii) Etude de la pente de la trajectoire de transition à  $t = 0$  et au-delà.

Résultat ici :



- i) Le sentier régulier est défini par sa pente, égale à  $g_A$  ou  $\gamma$  (d'après la réponse à la question 5), et par son ordonnée à l'origine qui correspondant à  $y_0^*$  (obtenu dans la réponse à la question 4). C'est en général une droite croissante puisque l'économie

connait le progrès technique. L'économie glisse le long de la droite en pointillée à partir de  $\ln y_0^*$  si elle est à l'état régulier.

- ii) Ici l'économie n'est pas à l'état régulier mais en dessous. Si  $\hat{k} < \hat{k}^*$ , d'après la fonction de production, cela veut dire que  $y_0 < y_0^*$ . Le schéma de Solow de la question 3, montre que l'économie finira par rejoindre son sentier régulier de croissance. Nous voulons préciser la trajectoire par laquelle elle va passer.
- iii) Pour cela, nous étudions d'abord la pente de cette trajectoire au temps  $t = 0$ , c'est-à-dire au niveau de son ordonnée à l'origine ou au point  $\ln y_0$ . Pour cela, on utilise l'équation clé obtenue dans la question 5 :

$$g_y = g_A + \alpha g_{\hat{k}} = g_A + \frac{\alpha}{\hat{k}} [s\hat{k}^\alpha - (\delta + \gamma + n)\hat{k}]$$

Cette équation indique le taux de croissance du revenu par travailleur à l'équilibre comme en dehors de l'équilibre. D'après le schéma de la question 3, nous savons que si le capital par unité de travail efficace est en dessous de sa valeur d'équilibre est en dessous de sa valeur d'état régulier, l'investissement dépasse l'investissement de point mort et le taux de croissance  $g_{\hat{k}}$  est positif. Ceci signifie que la pente de la trajectoire définie par  $\ln y$  est supérieure à  $g_A$  à  $t = 0$ . Le schéma nous montre aussi que l'écart entre l'investissement et l'investissement de point mort va se réduire à mesure que l'économie converge vers l'état régulier. Ceci veut dire que  $g_{\hat{k}}$  tend vers zéro et que  $g_y$  rejoint progressivement  $g_A$  (cf. l'équation ci-dessus toujours). La trajectoire de transition du revenu tend asymptotiquement vers la trajectoire de long terme du revenu comme sur le schéma ci-dessus.

## 7. Un accroissement de $\gamma$ , le taux de croissance de l'efficacité du travail $A$

### 7.a schéma de Solow

Pour répondre à cette question, il faut commencer par considérer ce qui se passe sur le schéma de Solow de la question 3. La valeur de  $\hat{k}$  ne change puisque ni  $K$ , ni  $A$ , ni  $L$  ne changent. Mais la hausse de  $\gamma$  fait monter l'investissement de point mort relativement à l'investissement en unités de travail efficace. Ceci implique une chute du capital par unité de travail efficace jusqu'à sa nouvelle valeur de long terme. Ceci résultat peut surprendre. La réforme de la recherche semble avoir un impact négatif sur l'économie alors que le progrès technique a accéléré. Est-ce vraiment le cas ?

### 7.b Nouvelle trajectoire de long terme

Ce qui nous intéresse vraiment est l'effet du choc sur la croissance économique c'est-à-dire son effet sur la trajectoire du revenu par travailleur.

Pour obtenir cette trajectoire, nous commençons par tracer la nouvelle trajectoire de long terme du revenu. Nous avons vu que le taux de croissance du revenu par travailleur est déterminé par le rythme du progrès technique. Il augmente donc en passant de  $\gamma$  à  $\gamma'$ . La pente de la trajectoire augmente donc. Mais à partir des résultats de la question 4, on peut voir que l'ordonnée à l'origine de la trajectoire de croissance équilibrée diminue (voir le graphique plus bas).

### 7.c Trajectoire en transition

Il reste à examiner la trajectoire du revenu par travailleur à l'impact et en transition. A l'impact, le revenu par travailleur n'est pas modifié car les conditions de la production sont inchangées. Mais nous voulons connaître la façon dont le taux de croissance de  $y$  change.

D'après la question 5 nous savons que :

$$g_y = g_A + \alpha g_{\hat{k}}$$

$g_A$  augmente mais  $g_{\hat{k}}$  devient négatif. A priori, l'effet sur  $g_y$  est donc ambigu.

Il s'agit de déterminer plus précisément  $g_A$  et  $g_{\hat{k}}$  à l'instant du choc.

Lorsque le choc survient,  $g_A = \gamma'$  mais le stock de capital par travailleur efficace est tel que le taux de croissance de  $\hat{k}$  est nul avec  $\gamma$  (état stationnaire qui précède le choc). On peut donc écrire :

$$g_{\hat{k}} = s \frac{\hat{k}^\alpha}{\hat{k}} - (\delta + \gamma' + n) \quad \text{où} \quad s \frac{\hat{k}^\alpha}{\hat{k}} = (\delta + \gamma + n)$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} g_{\hat{k}} &= (\delta + \gamma + n) - (\delta + \gamma' + n) \\ g_{\hat{k}} &= \gamma - \gamma' \end{aligned}$$

Au final, nous pouvons écrire :

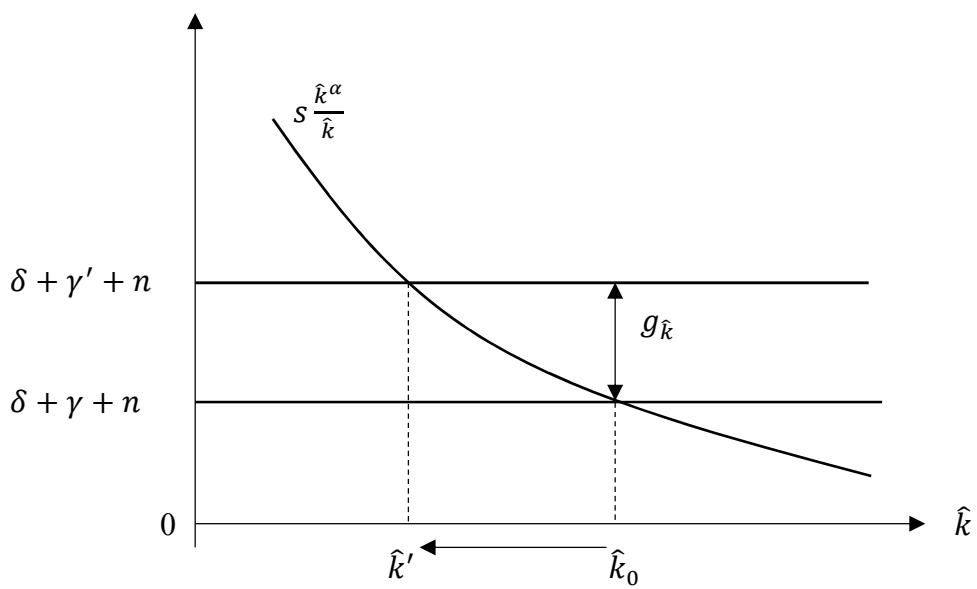
$$g_y = \gamma' + \alpha(\gamma - \gamma')$$

En réarrangeant les termes on obtient :

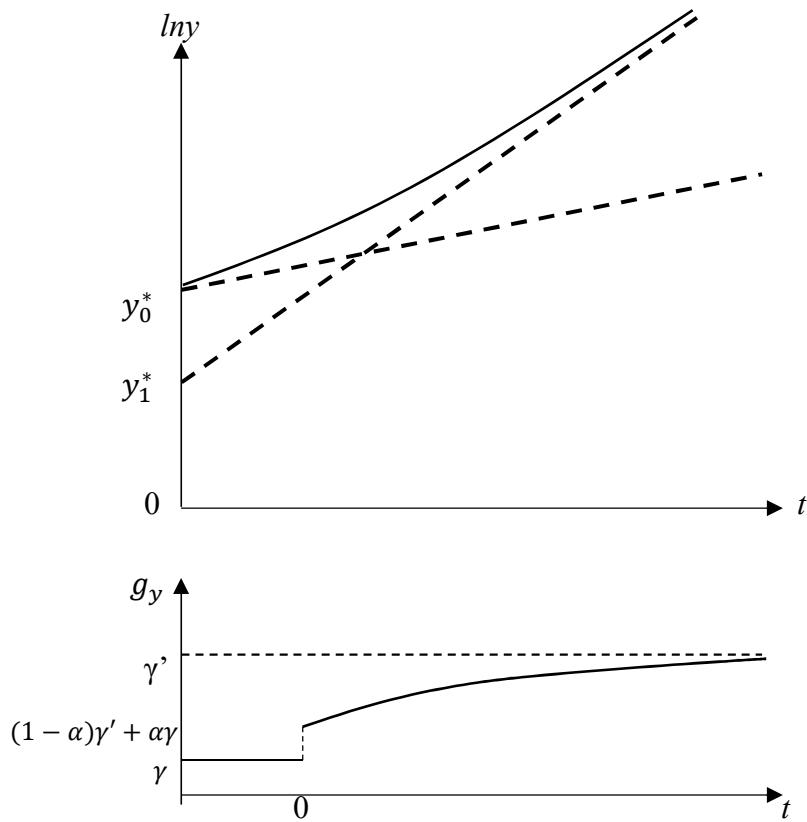
$$g_y = (1 - \alpha)\gamma' + \alpha\gamma$$

On voit que le taux de croissance du revenu par travailleur est une somme pondérée des taux de croissance de l'efficacité du travail avant et après le choc. Ceci implique  $\gamma < g_y < \gamma'$  (pour le voir, remplacez  $\gamma$  par une valeur précise comme 0,5 ou 1/3).

A l'instant du choc, le taux de croissance du revenu par travailleur s'élève donc au-dessus de sa valeur initiale mais en dessous de sa nouvelle valeur de long terme. Il va ensuite augmenter de moins en moins vite jusqu'à rejoindre sa valeur finale  $\gamma'$ . En effet,  $g_{\hat{k}}$  devient négatif à l'instant du choc (voir la formule ci-dessus) puis diminue en valeur absolue à mesure que  $\hat{k}$  tend vers sa nouvelle valeur de long terme  $\hat{k}'$ . Vous pouvez le comprendre aisément en considérant le graphique suivant qui n'est qu'une reformulation du schéma de Solow de la question 3. L'analyse de l'évolution de  $g_y$  est l'analyse de la pente de la trajectoire  $lny$ . Cette pente augmente à l'impact au-dessus de la pente de l'ancienne trajectoire de long terme et continue ensuite d'augmenter jusqu'à rejoindre la pente de la nouvelle trajectoire de long terme.



L'évolution de  $y$  est illustrée sur les graphiques suivants :



## 8. Un accroissement ponctuel de l'efficacité du travail $A$

Sur le graphique de la question 3, la hausse de  $A$  fait chuter le capital par travailleur efficace. Ce choc est équivalent à la hausse ponctuelle de la population.  $\hat{k}$  tombe sous sa valeur d'état régulier. L'investissement dépasse l'investissement de point mort et le capital par travailleur

efficace s'accroît jusqu'à retrouver sa valeur initiale. On revient donc à la situation initiale avec un taux de croissance inchangé pour le revenu par travailleur  $y$ .

Etudions maintenant de plus près l'évolution du revenu par travailleur durant la transition. La fonction de production intensive de l'économie nous indique que ce revenu fait un saut lorsque  $A$  augmente. En effet on a :

$$y = A\hat{k}^\alpha$$

Et par conséquent :

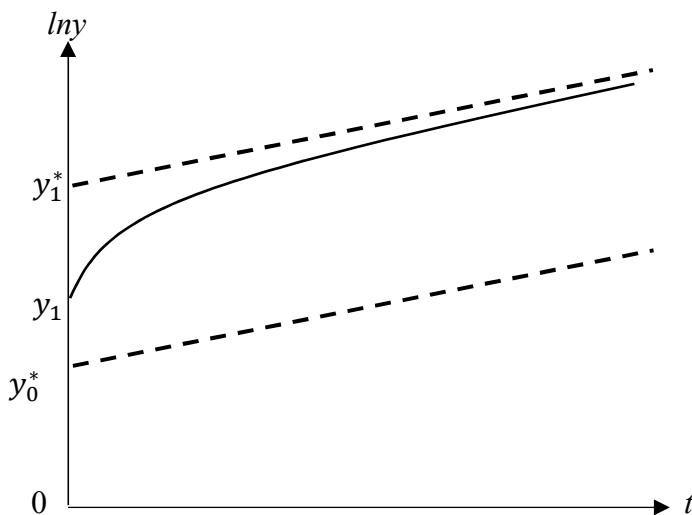
$$y = A^{1-\alpha}k^\alpha \text{ car } \hat{k}^\alpha = \left(\frac{k}{A}\right)^\alpha$$

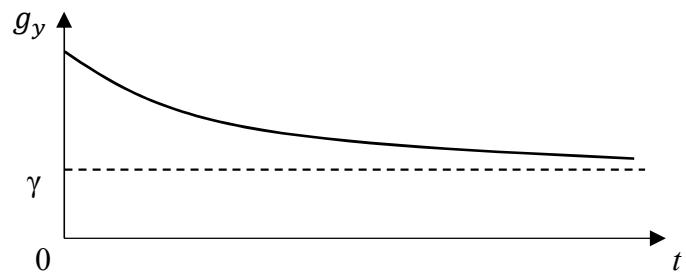
On note par ailleurs que la trajectoire de long terme se déplace vers le haut. Le nouveau revenu d'état régulier à l'impact dépasse la nouvelle valeur du revenu. En effet, compte tenu de l'équation du revenu d'état régulier, on voit que  $y^*$  augmente plus que  $y$  (pour le voir on peut dériver  $y$  et  $y^*$  par rapport à  $A$ ).

Par ailleurs, nous avons déterminé dans la question précédente le taux de croissance à court terme ou hors de l'état régulier de  $y$  :

$$g_y = \gamma + \alpha \left[ \frac{s\hat{k}^\alpha - (\delta + \gamma + n)\hat{k}}{\hat{k}} \right]$$

Nous avons vu que la hausse de  $A$  fait chuter  $\hat{k}$  sous sa valeur d'état régulier. Ainsi on a  $s\hat{k}^\alpha - (\delta + \gamma + n)\hat{k} > 0$  à la suite du choc. Cela veut dire que le taux de croissance du revenu par travailleur s'accroît au-dessus de  $\gamma$  moment du choc et baisse ensuite jusqu'à revenir à sa valeur de long terme. Ceci peut être expliqué en termes économiques, par le fait que la hausse de  $A$  élève la productivité marginale du capital relativement à la productivité marginale du travail. Tout se passe comme si le capital était relativement plus rare. C'est ce phénomène qui permet une accélération temporaire de la croissance.





**9)** Sur le long terme, une accélération du progrès technique est préférable à une augmentation ponctuelle de l'efficacité du travail. En effet, une augmentation ponctuelle de  $A$  conduit à une accélération temporaire de la croissance. L'économie atteint un sentier de croissance équilibré plus élevé mais le taux de croissance à long terme est inchangé. Si le rythme du progrès technique accélère, l'économie rejoint une trajectoire dont la pente est plus élevée. Au bout d'un certain temps, le niveau de vie sera plus grand dans ce second cas que dans le cas où l'économie a connu une hausse temporaire de  $A$ . Et l'écart de niveau de vie s'accroîtra sans cesse avec le temps.

## Corrigé de l'exercice 4

### La règle d'or d'accumulation du capital

#### 1. Relation entre $\hat{c}^*$ et $\hat{k}^*$

On part de la définition de la consommation par unité de travail efficace puis on tient compte des implications de l'état régulier.

$$\hat{c}^* = (1 - s)\hat{y}^* \quad \text{avec} \quad s\hat{y}^* = (\delta + \gamma + n)\hat{k}^*$$

Ainsi

$$\hat{c}^* = (\hat{k}^*)^\alpha - (\delta + \gamma + n)\hat{k}^* \quad (1)$$

Cette équation exprime simplement le fait que la consommation en unité de travail efficace correspond à la production (même unité) moins l'investissement effectif en unité de travail efficace. En effet, sur le sentier régulier de croissance, cet investissement est à son niveau de point mort.

#### 2. Règle d'or

On utilise l'équation (1) pour déterminer le montant du capital par travailleur efficace qui maximise la consommation. Pour cela, il suffit d'annuler la dérivée de  $\hat{c}^*$  par rapport à  $\hat{k}^*$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{c}^*}{d\hat{k}^*} &= \alpha(\hat{k}^*)^{\alpha-1} - (\delta + \gamma + n) = 0 \\ \alpha(\hat{k}^*)^{\alpha-1} &= \delta + \gamma + n \end{aligned}$$

Cette équation peut se réécrire :

$$f'(\hat{k}_{or}) = \delta + \gamma + n$$

En effet,  $\hat{y} = \hat{k}^\alpha$  est la fonction de production intensive en unité de travail efficace. La consommation par unité de travail efficace est maximisée si la productivité marginale du capital par unité de travail efficace est égale à  $\delta + \gamma + n$ . Cette condition est aussi appelée règle d'or du capital par unité de travail efficace.

Graphiquement, cette condition se traduit sur le schéma de Solow. Elle correspond à la valeur de  $\hat{k}$  pour laquelle la pente de la fonction de production est égale à la pente de droite d'investissement de point mort.

#### 3. Capital par travailleur efficace qui maximise la consommation

On a donc

$$\alpha(\hat{k}^*)^{\alpha-1} = \delta + \gamma + n$$

D'où

$$(\hat{k}^*)^{\alpha-1} = \frac{\delta + \gamma + n}{\alpha} \Rightarrow (\hat{k}^*)^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{\delta + \gamma + n}$$

Ainsi :

$$\hat{k}_{or} = \left( \frac{\alpha}{\delta + \gamma + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (2)$$

#### 4. Taux d'épargne de règle d'or

On commence par déterminer le taux d'épargne sur le sentier régulier :

$$\begin{aligned}\hat{k}^* &= \left( \frac{s}{\delta + \gamma + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ (\hat{k}^*)^{1-\alpha} &= \frac{s}{\delta + \gamma + n} \\ s &= (\delta + \gamma + n)(\hat{k}^*)^{1-\alpha} \quad (3)\end{aligned}$$

Pour obtenir le taux d'épargne de règle d'or, il suffit de substituer l'expression de  $\hat{k}_{or}$  que nous venons d'obtenir (équation 2) dans l'équation (3) qui définit le taux d'épargne en fonction de  $\hat{k}^*$ .

$$s_{or} = (\delta + \gamma + n) \left( \frac{\alpha}{\delta + \gamma + n} \right) = \alpha$$

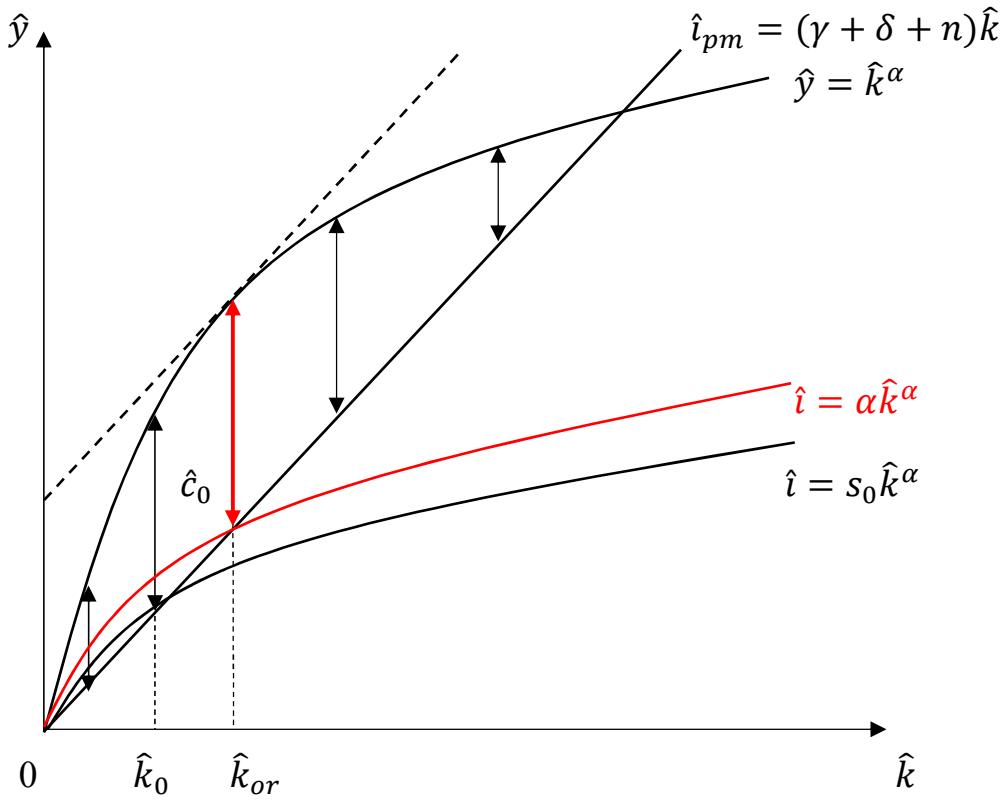
Economiquement, on constate que le taux d'épargne de règle d'or correspond à part de la rémunération du capital dans le revenu agrégé dans le modèle de Solow. Il s'agit aussi de l'élasticité de la production par rapport au capital.

#### 5. Est-il possible de trop épargner ?

Dans le modèle de Solow, une variation du taux d'épargne produit un double effet sur la consommation. A revenu donné, une hausse du taux d'épargne réduit la consommation. Mais nous savons aussi qu'une hausse du taux d'épargne accroît l'investissement relativement à l'investissement de point mort et élève ainsi le revenu d'état régulier (équation 2 plus haut). Une hausse du revenu accroît la consommation. Ces deux effets apparaissent clairement dans la définition de la consommation d'état régulier (équation 3 dans la question 1).

Tant que le taux d'épargne est inférieur à sa valeur de règle d'or ( $\alpha$ ), son augmentation accroît le revenu suffisamment pour éléver la consommation (par travailleur efficace). Le second effet l'emporte sur le premier. Mais au-delà de la valeur de règle d'or, le premier effet l'emporte. Le revenu d'état régulier continue d'augmenter mais sa hausse n'est pas suffisante pour compenser le fait qu'une part toujours réduite du revenu est consommée.

Ceci apparaît clairement sur le schéma de Solow suivant. Nous avons fait apparaître le capital par travailleur efficace de règle d'or (en appliquant la règle d'or) au point où la pente de la tangente à la fonction de production est égale à  $\gamma + \delta + n$  et donc parallèle à la droite d'investissement de point mort. Les doubles flèches correspondent à différentes valeurs de la consommation qui seront obtenues en fonction de valeurs du taux d'épargne  $s$  plus petites ou plus grandes que  $\alpha$ . Pour chaque valeur de  $s$ , il faut tracer une courbe d'investissement qui passe au niveau de la pointe inférieure de la flèche. On voit alors comment la consommation d'état stationnaire varie avec  $s$ .



## Corrigé de l'exercice 5 Education et croissance

$$Y = K^\alpha (hL)^{1-\alpha} \text{ où } 0 < \alpha < 1 \text{ et } \tilde{k} = K/(hL)$$

### 1. Equation dynamique et valeurs d'état régulier

Nous cherchons l'équation dynamique du modèle de Solow modifié par l'introduction du capital humain conçu ici comme une constante  $h$ . Vous pouvez constater que cette constante  $h$  vient simplement remplacer la constante  $A$  habituelle. Il s'agit donc de réinterpréter le modèle de Solow avec progrès technique. L'obtention de l'équation dynamique ne pose donc aucune difficulté nouvelle.

Soit

$$\tilde{k} = K/(hL)$$

On peut donc écrire :

$$\ln \tilde{k} = \ln K - \ln h - \ln L$$

On dérive par rapport à  $t$  :

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \quad \text{car } h \text{ est une constante}$$

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}}{hL} - n\tilde{k}$$

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{sY}{hL} - n\tilde{k} \text{ car le taux de dépréciation est nul}$$

On obtient finalement :

$$\dot{\tilde{k}} = s\tilde{k}^\alpha - n\tilde{k}$$

On obtient la solution d'état régulier en supposant que le capital par unité de travail efficace est constant :

$$s\tilde{k}^\alpha = n\tilde{k}$$

En résolvant grâce aux transformations habituelles on obtient :

$$\tilde{k} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

D'où, grâce à la fonction de production sous forme intensive :

$$\tilde{y} = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Enfin :

$$y^* = h\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Le revenu d'état régulier est une fonction croissante du taux d'épargne. En effet, un taux d'épargne plus élevé permet d'atteindre un capital par tête plus élevé à investissement de point mort donné. Le taux de croissance démographique joue négativement sur le revenu d'état régulier car il accroît l'investissement de point mort. Le capital humain par travailleur accroît le revenu d'état régulier car il augmente la productivité du travail et repousse le point d'état stationnaire. Comme le modèle ne comporte pas de progrès technique, le taux de croissance de la production globale se confond avec le taux de croissance démographique. Il n'est pas influencé par le niveau d'éducation. Ce dernier a seulement un effet en niveau.

## 2. Taux de croissance du revenu en dehors du sentier régulier et convergence

Le modèle de Solow le plus simple prédit que les pays les plus pauvres doivent connaître une croissance plus forte liée à la transition vers le sentier régulier. Ce n'est pourtant pas ce qui est observé à l'échelle mondiale. La prise en compte du capital humain permet de comprendre cela comme l'a montré Robert Barro.

On cherche ici à montrer la relation entre le taux de croissance de transition et les variables  $y$  et  $h$ .

Nous pouvons partir de la fonction de production sous forme intensive :

$$\tilde{y} = \tilde{k}^\alpha$$

On en déduit :

$$\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = \alpha \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}}$$

D'où

$$\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = \alpha \left( s \frac{\tilde{k}^\alpha}{\tilde{k}} - n \right) = \alpha(s\tilde{k}^{\alpha-1} - n)$$

Mais

$$\tilde{y} = \tilde{k}^\alpha \Rightarrow \tilde{k} = (\tilde{y})^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow \tilde{k} = \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Ainsi finalement :

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} &= \alpha \left( s \left[ \left( \frac{y}{h} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\alpha-1} - n \right) \\ \frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} &= \alpha \left( s \left( \frac{y}{h} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - n \right) \\ \frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} &= \alpha s \left( \frac{h}{y} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \alpha n\end{aligned}$$

Dans ce modèle, le taux de croissance du revenu par travailleurs efficace est identique au taux de croissance du revenu par travailleur car  $h$  est constant :

$$\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{h}}{h} = \frac{\dot{y}}{y}$$

Ainsi, la dernière équation montre que le taux de croissance du revenu durant la transition dépend du niveau du revenu. Ceci traduit le phénomène de convergence. Plus le revenu approche de sa valeur d'état régulier plus la croissance ralentit. Mais on voit aussi que le montant de capital humain par travailleur  $h$  agit positivement sur le taux de croissance durant la convergence. Un pays avec un revenu par habitant très faible peut ainsi avoir un taux de croissance faible si le niveau d'éducation de la population et la productivité est travailleur sont faibles.

## Corrigé de l'exercice 6

### Comptabilité de la croissance

#### **1. Evolution du taux de croissance après un changement de rythme du progrès technique**

Le taux de croissance de la production par travailleur est égal au taux de progrès technique dans un modèle de Solow avec progrès technique. Ce taux de croissance passe donc de 2% à 3%.

#### **2. Equation de comptabilité de la croissance**

A partir de la fonction de production sous forme intensive on obtient :

$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha \frac{\dot{k}}{k} + \frac{\dot{B}}{B}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{\dot{B}}{B} &= \frac{\dot{y}}{y} - \alpha \frac{\dot{k}}{k} \\ \frac{\dot{B}}{B} &= \frac{2}{3} \frac{\dot{y}}{y}\end{aligned}$$

**3.** Les taux de croissance du revenu par travailleur et du capital par travailleur sont identiques à long terme. La formule montre ainsi que le taux de croissance de la productivité totale des facteurs doit correspondre à 2/3 du taux de croissance du PIB par travailleur.

**4.** Lorsque le taux de croissance passe de 2 à 3%, la formule de départ ( $\frac{\dot{y}}{y} = \alpha \frac{\dot{k}}{k} + \frac{\dot{B}}{B}$ ) implique que 2/3 de l'augmentation sont dû à la modification du taux de croissance de la productivité totale des facteurs et le tiers restant est dû à la modification du taux de croissance du capital par travailleurs.

#### **5. Compatibilité des résultats des questions 1 et 4**

La comptabilité de la croissance attribue une partie de la croissance et de son évolution à la croissance du capital par travailleur et l'autre partie à la croissance de la productivité totale des facteurs. Nous savons cependant, grâce au modèle de Solow, que la croissance du capital par travailleur s'explique elle-même par la croissance de la productivité totale des facteurs (ou de l'efficacité du travail  $A$ ). De ce point de vue, la comptabilité de la croissance peut-être trompeuse. L'accroissement de  $A$  conduit à l'accumulation de capital en relevant sa productivité marginale relativement à celle du travail. C'est cette accumulation de capital que la comptabilité présente (de façon trompeuse) comme une source autonome de croissance de la production.

## CORRIGE DU DOSSIER DE TD 3

### Exercice 1. La croissance démographique dans le modèle AK

#### 1. Taux de croissance de la production

La fonction de production de cette économie à la forme suivante :

$$Y = AKL^{1-\alpha}$$

On peut introduire cette fonction de production dans la loi de variation du capital :

$$\dot{K} = sY - \delta K \Rightarrow \frac{\dot{K}}{K} = sAL^{1-\alpha} - \delta$$

Pour obtenir le taux de croissance de la production  $\dot{Y}$  on peut simplement dériver la transformation logarithmique de la fonction de production en tenant compte du fait que  $A$  est une constante :

$$\begin{aligned} Y = AKL^{1-\alpha} &\Rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L} \\ &\Rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = sAL^{1-\alpha} - \delta + (1-\alpha)n \end{aligned}$$

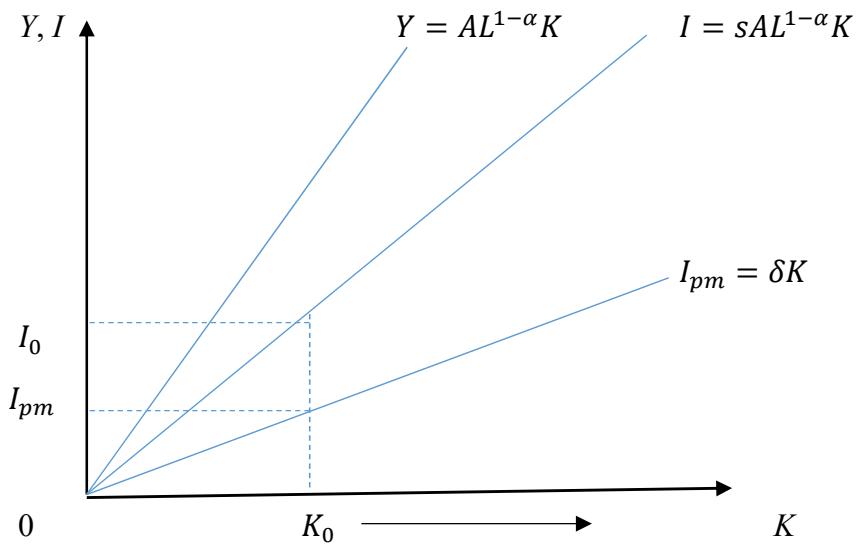
On peut constater ici que le taux de croissance du revenu agrégé est une fonction croissance de la population  $L$  (ceci dépend de la valeur des paramètres bien sûr). On parle à ce sujet d'effet d'échelle.

#### 2. Dynamique de l'économie avec population constante

L'équation dynamique du capital fait dépendre l'évolution de  $K$  de l'écart entre l'investissement  $sAL^{1-\alpha}K$  et l'investissement de point mort  $\delta K$ . Elle est obtenue par substitution de la fonction de production dans l'équation d'accumulation du capital :

$$\dot{K} = sAL^{1-\alpha}K - \delta K$$

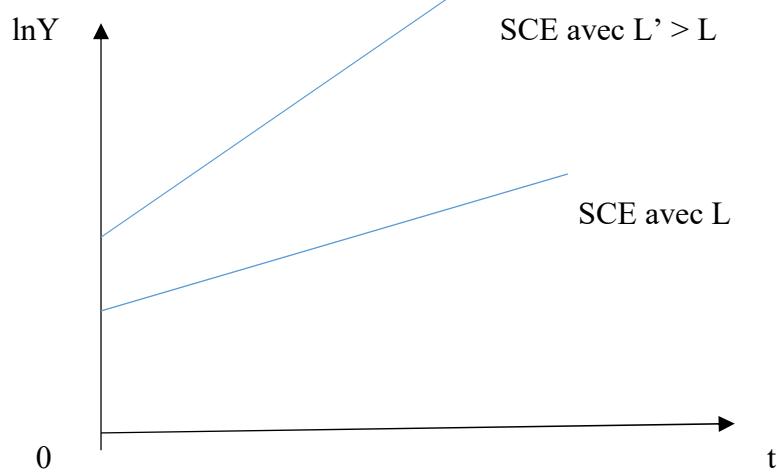
On peut représenter cette dynamique sur un schéma de Solow en prenant appui sur les hypothèses de la question :



Ce schéma montre comment, dans le cadre d'un modèle  $AK$ , la dynamique ne converge pas vers un état régulier, la croissance est d'emblée régulière puisque le taux de croissance est constant. On peut aussi voir qu'une hausse du taux d'épargne conduit à une hausse définitive du taux de croissance constant. Ces propriétés dérivent du fait que la productivité marginale du capital n'est pas décroissante à cause de la présence des externalités (vérifiez que la productivité marginale du capital est constante). Ceci entraîne la propriété de rendement d'échelle croissant que vous pouvez aussi vérifier.

### 3. Effet d'une augmentation ponctuelle de la population avec $n = 0$

Graphiquement, une augmentation ponctuelle de la population avec un taux de croissance démographique qui reste nul (pas de croissance continue de la population) fait pivoter la droite d'investissement vers le haut ou vers la gauche. L'écart grandit entre l'investissement de point mort pour toute valeur de  $K$ . Ceci signifie que cet accroissement de la population a l'effet d'échelle attendu. Il accélère la croissance ou relève le taux de croissance du capital et de la production. Comme la population reste constante par la suite, ceci veut dire que le niveau de vie de chaque travailleur s'élèvera plus vite après ce choc démographique. Ceci peut-être représenté sur un schéma de la trajectoire du revenu (notez que la production fait un bon à l'impact) :



#### 4. Conséquence de la croissance de la population à taux constant

D'après l'équation déterminant le taux de croissance de la production, si  $L$  croît à un taux constant, le taux de croissance du PIB croît à un taux approximativement exponentiel lui aussi. Vous pouvez vérifier que le taux de croissance de  $\frac{\dot{Y}}{Y}$  est positif en calculant sa dérivée par rapport à  $t$ .

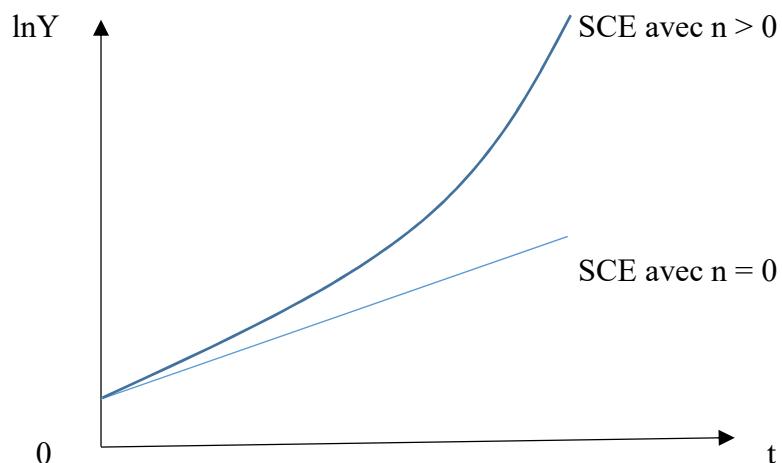
$$\frac{\dot{Y}}{Y} = sAL^{1-\alpha} - \delta + (1-\alpha)n$$

$$\Rightarrow \frac{d\frac{\dot{Y}}{Y}}{dt} = s(1-\alpha)AL^{1-\alpha-1} \frac{dL}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\frac{\dot{Y}}{Y}}{dt} = s(1-\alpha)AL^{-\alpha}Ln$$

$$\Rightarrow \frac{d\frac{\dot{Y}}{Y}}{dt} = n(1-\alpha)sAL^{1-\alpha} > 0$$

Représentation de la trajectoire du revenu ou sentier de croissance équilibrée :



Comme le souligne Charles Jones, cette accélération de la croissance ne se vérifie pas dans les faits. Romer dit bien sûr le contraire en 1986. Si Jones a raison, ceci suffit à invalider cette modélisation.

#### 5. Comment faire disparaître l'effet d'échelle

On peut considérer la fonction de production initiale comme la conséquence d'un effet externe affectant une fonction de production de type Cobb-Douglas parfaitement standard. On a au départ :

$$Y = BK^\alpha L^{1-\alpha}$$

Mais il se trouve que  $B$  dépend du stock de capital (effet d'apprentissage par la pratique par exemple) :

$$B = AK^{1-\alpha}$$

Par substitution :

$$\begin{aligned} Y &= (AK^{1-\alpha})K^\alpha L^{1-\alpha} \\ \Rightarrow Y &= AKL^{1-\alpha} \end{aligned}$$

On cherche à modifier l'externalité  $B$  de façon à faire disparaître la quantité de travail utilisée de la fonction de production. Ecrivons :

$$B = AK^{1-\alpha}L^{\alpha-1}$$

On suppose toujours un effet d'apprentissage par la pratique mais on ajoute une externalité négative liée à l'utilisation du travail. Le nombre de travailleur employé joue de façon négative sur leur efficacité. Dans ce cas on obtient :

$$\begin{aligned} Y &= (AK^{1-\alpha}L^{\alpha-1})K^\alpha L^{1-\alpha} \\ \Rightarrow Y &= AK \end{aligned}$$

Dans ces conditions :

$$\dot{K} = sY - \delta K \Rightarrow \frac{\dot{K}}{K} = sA - \delta$$

Et on a désormais (d'après cette fonction de production  $AK$  et avec  $A$  constant) :

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K} = sA - \delta$$

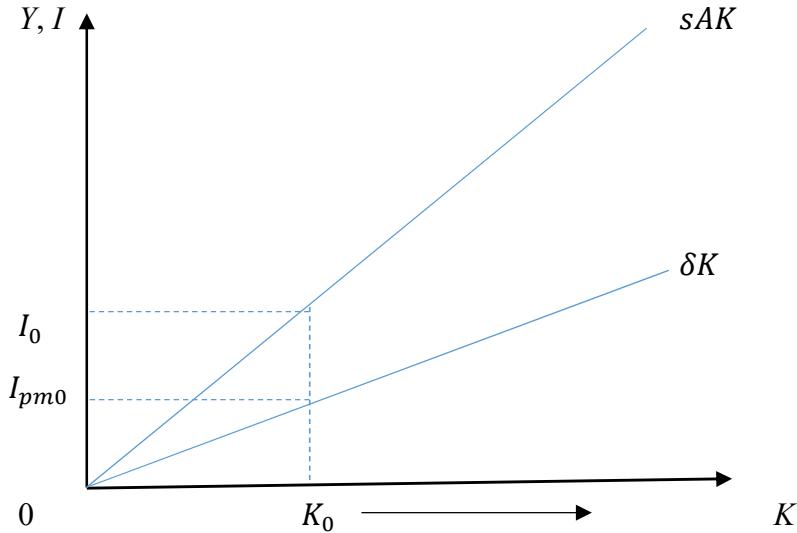
Le taux de croissance du revenu agrégé est constant et positif si le taux de dépréciation est assez petit. Il dépend du taux d'épargne à l'opposé des implications du modèle de Solow. Mais il ne dépend plus de la taille de la population et ne croît plus avec elle.

## 6. Analyse graphique du cas où $Y = AK$

A nouveau, l'équation dynamique du capital fait dépendre l'évolution de  $K$  de l'écart entre l'investissement  $sAK = sY$  et l'investissement de point mort  $\delta K$  mais l'effet d'échelle a disparu :

$$\frac{\dot{K}}{K} = sA - \delta \Rightarrow \dot{K} = sAK - \delta K$$

On peut représenter cette dynamique sur un schéma de Solow.



## 7. Effet de la population active sur la production

Dans le cas de la question 3, le nombre de travailleur n'affecte pas la production. L'effet positif du nombre de travailleur sur la production (travail) est exactement compensé par l'externalité négative qui affecte B ou la perte d'efficacité du travail liée au nombre de travailleur. Le nombre de travailleur peut donc doubler, cela ne changera pas la production.

Avec cet exercice, nous découvrons ainsi les implications problématiques des modèles de type AK développés d'abord dans les années 1960 et repris dans les années 1980. Si le nombre de travailleurs affecte la production dans cette modélisation, ce qui semble le plus plausible, alors le taux de croissance du PIB s'élève avec la population. Or, ceci est contrefactuel. Mais faire disparaître cette implication revient à éliminer l'effet de la quantité de travail sur la production, ce qui n'est pas plausible. Ceci explique pourquoi les économistes ont fini par adopter des modèles plus sophistiqués.

### Exercice 2 Croissance et part des chercheurs dans la population

#### A. Accroissement ponctuel de $\theta$

On obtient le taux de croissance du stock d'idées  $A$  à partir de la fonction de production d'idée en supposant comme indiqué dans la question que  $\lambda=1$  et  $\phi=0$ . Soit :

$$\dot{A} = \theta L_A \Rightarrow \frac{\dot{A}}{A} = \theta \frac{L_A}{A}$$

On obtient le taux de croissance d'état régulier ou de long terme de  $A$  en considérant que ce taux doit être constant sur le sentier de croissance équilibrée. Ainsi, le numérateur et le dénominateur du taux de croissance de court terme ou en transition doivent croître au même taux. On peut donc écrire :

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{L}_A}{L_A} = n$$

On représente ces deux taux de croissance du stock d'idée à « court terme » et à long terme sur le graphique ci-dessous :

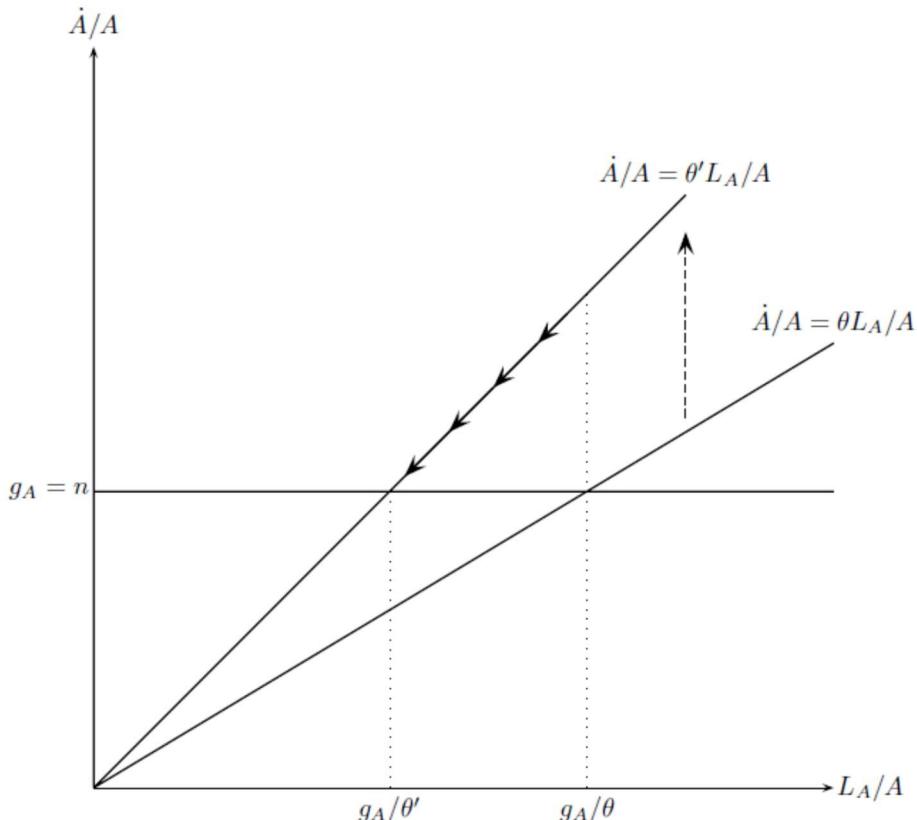


Figure 11: An Increase in  $\theta$

La relation en transition entre le taux de croissance de  $A$  et  $L_A/A$  est une droite croissante qui part de l'origine du repère. L'intersection avec la droite  $g_A = n$  nous intéresse car elle définit un état régulier du modèle. Pour  $\theta$ , si  $\frac{L_A}{A} > \frac{g_A}{\theta}$  alors  $A$  croît plus vite que la population ( $\dot{A}/A > n$ ). Dans ces conditions,  $L_A/A$  diminue jusqu'à arriver à sa valeur d'équilibre avec  $\frac{A}{A} = n$ . En effet, la part de chercheurs dans la population étant constante, le nombre de chercheurs augmente au même rythme que l'ensemble de la population.  $n$  est donc le taux de croissance de  $L_A$ .

$\theta$  est la productivité des chercheurs ou la production instantanée d'idées de chaque chercheur. Si ce paramètre augmente pour devenir  $\theta'$ , la droite correspondant au taux de croissance du stock d'idées pivote vers la gauche. A court terme, le taux de croissance du stock d'idées dépasse alors le taux de croissance de la population. Le ratio  $L_A/A$  diminue alors jusqu'à atteindre sa nouvelle valeur d'état régulier, plus petite.

On voit ainsi que l'augmentation de la productivité des chercheurs ne produit qu'une accélération temporaire du rythme du progrès technique. A long terme, ce dernier revient à  $n$ . Ceci est dû au fait que le taux de croissance de  $A$  rapporte la production d'idées à son stock déjà existant. Les deux graphiques suivants précisent le profil temporel des variables clés.

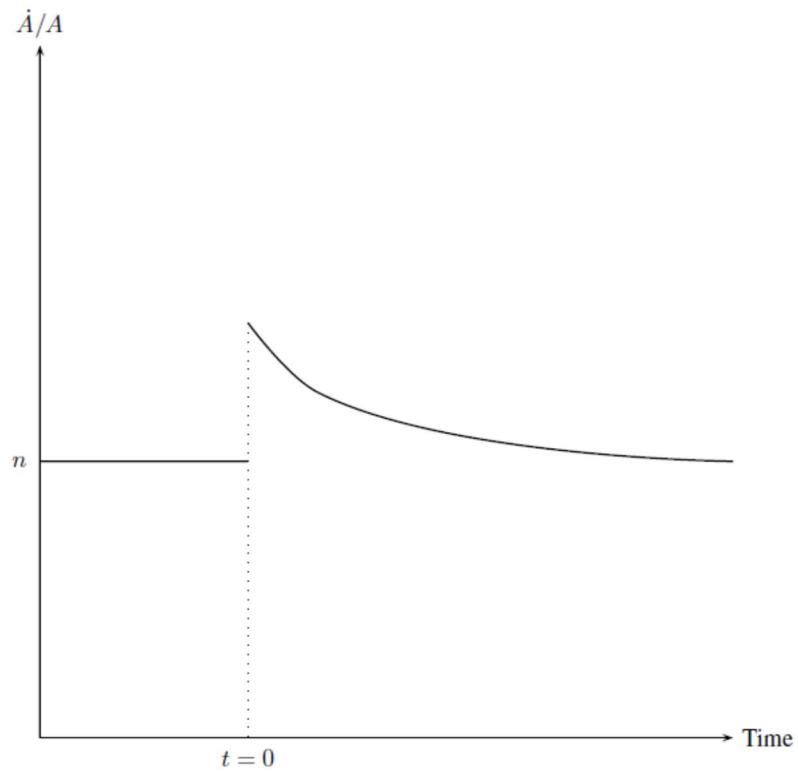


Figure 12: The Growth Rate of Technology

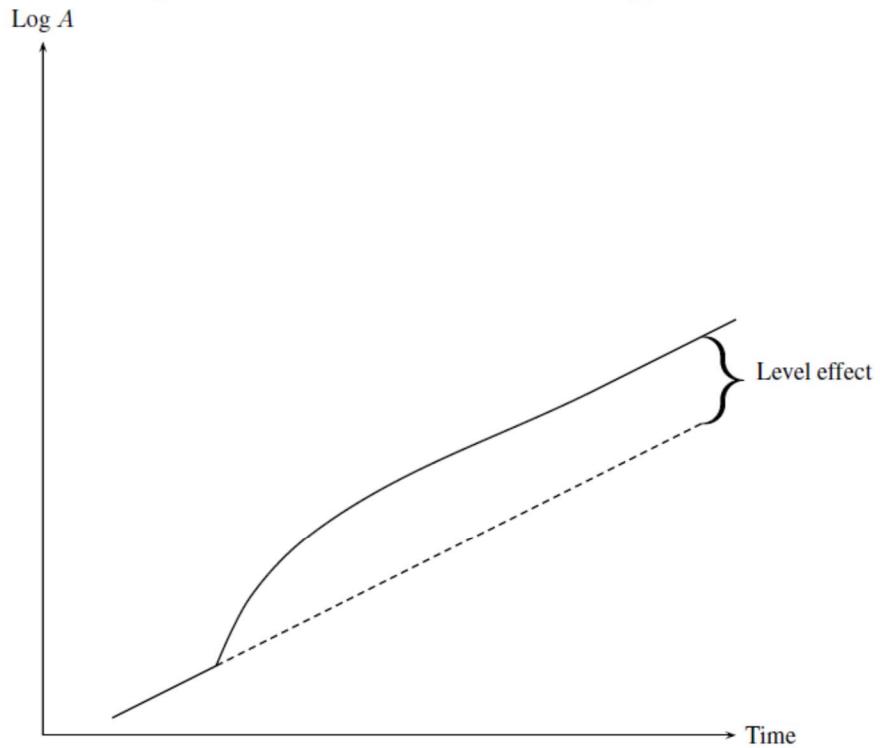


Figure 13: The Level of Technology

### B. Part optimale de chercheurs dans la population ( $S_R$ )

Le revenu par travailleur d'état régulier nous est donné :

$$y_t^* = \left( \frac{s_k}{\delta + n + g_A} \right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} (1 - S_R) \frac{\theta S_R}{g_A} L_t$$

On cherche la valeur de  $S_R$  qui maximise la valeur de  $y_t^*$  (le long du sentier régulier par conséquent). Pour cela on annule la dérivée de  $y_t^*$  par rapport à  $S_R$ . On applique ici la formule de dérivation d'un produit de fonction :  $(u \cdot v)' = u'v + uv'$  avec  $u = (1 - S_R)$  et  $v = \frac{\theta S_R}{g_A}$ . On a ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{dy_t^*}{dS_R} &= \left( \frac{s_k}{\delta + n + g_A} \right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} L_t \left[ -\frac{\theta S_R}{g_A} + (1 - S_R) \frac{\theta}{g_A} \right] \\ \Rightarrow \frac{dy_t^*}{dS_R} &= \left( \frac{s_k}{\delta + n + g_A} \right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} L_t \frac{\theta}{g_A} (1 - 2S_R) \end{aligned}$$

Il est clair que cette expression sera nulle si :

$$1 - 2S_R = 0 \Rightarrow S_R = 1/2$$

Le revenu par travailleur dans ce modèle sera à son maximum le long du sentier régulier si la moitié de la population active est engagée dans la recherche.

La possibilité d'un trop grand nombre de chercheurs (ou de R&D) est liée au fait qu'un accroissement de la part des chercheurs dans la population a deux effets contraires sur la production par tête. L'augmentation du nombre de chercheurs accroît le stock d'idées et l'efficacité du travail des travailleurs produisant le bien final. Mais cette augmentation est aussi une réduction du nombre de travailleurs engagés dans la production du bien final, ce qui tend à faire baisser la production. Tant que  $S_R$  est inférieur à 0,5, le premier effet l'emporte. Mais au-delà de 0,5, le second effet domine et la production chute.

### C. Le modèle et les faits

i. Cette partie de l'exercice s'appuie sur le chapitre 5 du manuel de Jones. Au cours de sa présentation du modèle de Romer (1990), Jones définit le taux de croissance du progrès technique comme nous l'avons fait dans la question A en divisant la fonction de production d'idées (sous sa forme générale) par  $A$  :

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\theta L_A^\lambda}{A^{1-\phi}}$$

On note alors qu'à l'état régulier,  $\frac{\dot{A}}{A}$  doit être constant. Ceci veut dire que les termes au numérateur et au dénominateur du membre de droite de l'équation doivent croître au même rythme. On obtient ces taux de croissance en recourant à une transformation logarithmique et en notant que  $\theta$  est constant. On peut ainsi écrire :

$$\lambda \frac{\dot{L}_A}{L_A} = (1 - \phi) \frac{\dot{A}}{A} \Rightarrow 0 = \lambda \frac{\dot{L}_A}{L_A} - (1 - \phi) \frac{\dot{A}}{A}$$

A partir de cette équation on peut écrire :

$$\frac{\lambda}{1-\phi} = \frac{\frac{\dot{A}}{A}}{\frac{\dot{L}_A}{L_A}}$$

A partir des chiffres donnés dans l'énoncé concernant le rythme du progrès technique et la croissance de la population de chercheurs, l'estimation demandée est donc :

$$\frac{\lambda}{1-\phi} = \frac{0,02}{0,03} = 2/3$$

**ii.**  $g_A = \frac{\lambda n}{1-\phi}$  est le taux de croissance à long terme du stock d'idée ou rythme de long terme du progrès technique dans la mesure où la croissance du nombre de chercheurs doit nécessairement finir par s'aligner sur la croissance de la population sur le sentier régulier.

On suppose que la valeur de  $\frac{\lambda}{1-\phi}$  pour l'économie mondiale est la même que pour les pays avancés et on calcule :

$$g_A = \frac{2}{3} \times 0,01 = 0,0067$$

On dira que la valeur d'état régulier de la croissance du revenu par tête dans l'économie mondiale est égale à cette valeur de 0,67%.

### **iii. Pourquoi cette valeur diffère-t-elle par rapport aux 2% observés historiquement ?**

L'écart entre le taux de croissance de 2% et le taux de croissance que le modèle prédit peut s'interpréter comme la conséquence d'une dynamique de transition. Les pays avancés ne sont pas encore à leur équilibre de long terme, du point de vue de ce modèle, puisque la croissance du nombre de chercheurs dépasse la croissance de la population.  $L_A/L$  augmente dans les pays développés. Le modèle prédit que la croissance dans ces pays pourrait donc baisser à long terme.

### **iv. Le fait que des pays en voie de développement s'engagent dans la R&D pourrait-il modifier le résultat des calculs qui précédent ?**

Le fait que de nombreux pays ont encore une part de chercheurs dans la population très faible et une participation très limitée et parfois nulle à la recherche au niveau international signifie que le potentiel d'accroissement du nombre de chercheurs est encore très important au niveau mondial. En conséquence, le ralentissement de la croissance du nombre de chercheurs et son alignement sur le taux de croissance de la population attendra sans doute encore très longtemps. Le ralentissement de la croissance évoqué dans la question (iii) n'est donc pas pour demain.

## **D. Ratio du profit du monopoleur au surplus du consommateur pour un prix du bien fixé au coût marginal**

Dans le modèle de Romer, chaque nouvelle idée est brevetée et permet à l'inventeur de vendre un bien intermédiaire nouveau en situation de monopole. Il s'agit ici de définir le problème que doit résoudre ce monopoleur pour trouver le montant de ses profits à partir de la connaissance de sa courbe de demande  $Q = a - bP$ , son coût marginal  $c$  et sachant que  $a - bc > 0$ .

On note  $\Pi$  le profit capturé par le monopoleur. Il doit fixer  $P$  qui maximise  $\Pi$  avec :

$$\Pi = (P - MC)Q(P) = (P - c)(a - bP)$$

On annule la dérivée des profits par rapport au prix du bien intermédiaire pour obtenir la condition de premier ordre :

$$\frac{d\Pi}{dP} = 0 \Leftrightarrow a - bP - b(P - c) = 0$$

Ceci nous donne le prix choisi par le monopoleur :

$$P^* = \frac{a + bc}{2b}$$

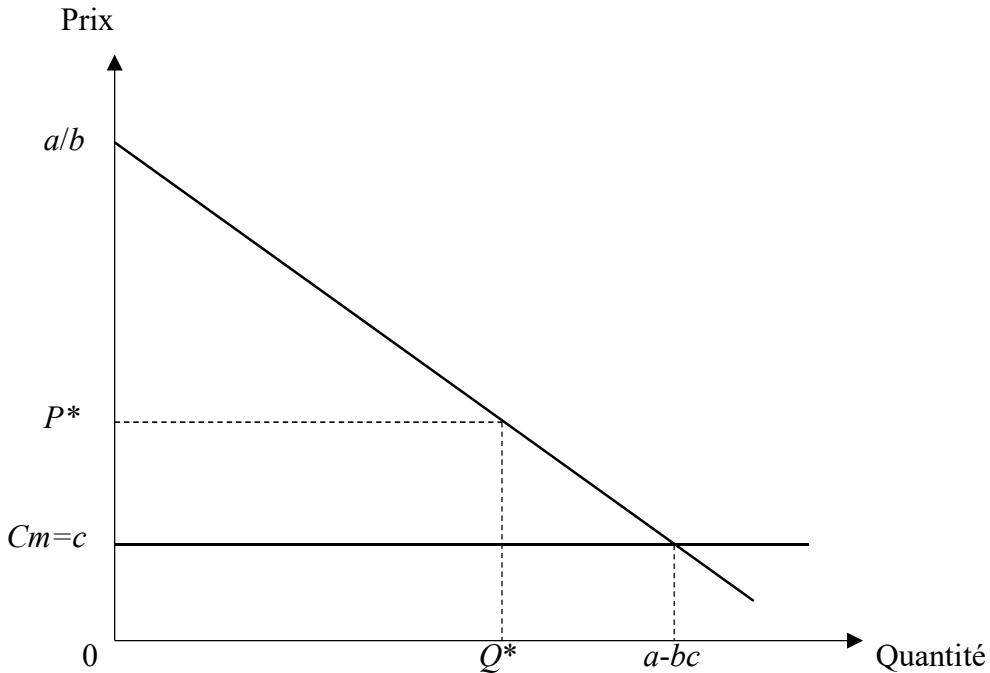
On peut alors calculer le montant des profits en fonction des paramètres a, b et c :

$$\Pi^* = \left(\frac{a + bc}{2b} - c\right)\left(a - \frac{a + bc}{2}\right)$$

$$\Pi^* = \left(\frac{a - bc}{2b}\right)\left(\frac{a - bc}{2}\right)$$

$$\Pi^* = \frac{(a - bc)^2}{4b}$$

Le surplus potentiel du consommateur (correspondant à un régime de concurrence parfaite) ou bénéfice social associé à la production du bien intermédiaire peut être défini en s'appuyant sur le graphique suivant :



Le surplus potentiel du consommateur correspond à la surface du triangle au-dessus du coût marginal et en dessous de la courbe de demande. L'aire de ce triangle est :

$$SC = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} - c \right) (a - bc) = \frac{1}{2b} (a - bc)^2$$

On en déduit que le ratio du profit par rapport au surplus du consommateur est 1/2.

$$\frac{\Pi^*}{SC} = 1/2$$

Le monopoleur吸orbe la moitié du surplus potentiel du consommateur. On assimile le SPC au bénéfice social de l'innovation et le profit à son bénéfice privé. On voit ainsi que le bénéfice privé est inférieur au bénéfice social. Il s'agit d'une situation d'externalité positive. L'incitation à innover n'est pas suffisamment importante.

## CORRIGÉ DU DOSSIER DE TD 4

### Corrigé exercice « Les générations imbriquées »

Nous nous situons dans une économie peuplée à chaque période de deux générations d'agents (qui vivent donc deux périodes). Les agents jeunes travaillent et consomment alors que les agents âgés se contentent de consommer. La population croît au taux  $n$ . Le taux de dépréciation est de 100% (capital entièrement détruit au cours de son utilisation). Les marchés sont concurrentiels. La fonction de production est du type Cobb-Douglas. La fonction d'utilité intertemporelle des individus jeunes est :  $U(c_t, c_{t+1}) = c_t c_{t+1}^\beta$ .

#### 1. Sentier de consommation des agents de la période 1 à la période 2.

Il s'agit de déterminer la relation entre consommation présente et consommation future pour chaque agent jeune de façon à maximiser son utilité.

Nous commençons par définir les contraintes budgétaires de l'agent à chaque période.

La consommation présente correspond au seul revenu de l'agent, son salaire (car il n'a pas de patrimoine au départ), moins son épargne.

$$c_t = w_t - s_t$$

En seconde période, l'agent devenu vieux ne peut que consommer son épargne augmentée des intérêts que rapporte le prêt de son capital aux agents jeunes de cette nouvelle période :

$$c_{t+1} = (1 + r_{t+1})s_t$$

Par substitution, nous obtenons la contrainte budgétaire intertemporelle à partir des deux contraintes budgétaires de l'agent jeune. A partir de la contrainte de l'agent âgé nous avons :

$$\frac{c_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = s_t$$

Ainsi on peut écrire la CBI :

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = w_t$$

L'agent jeune cherche à maximiser sa fonction d'utilité intertemporelle tout en respectant cette CBI. Son problème est formellement identique au problème d'un agent qui doit arbitrer entre deux biens de consommation pour un revenu donné. Mais ici, il s'agit du même bien sur deux périodes et le prix relatif est donné par le taux d'actualisation  $\frac{1}{1+r_{t+1}}$ . Formellement, on peut résoudre le problème de l'agent jeune en écrivant le Lagrangien suivant :

$$L(c_t, c_{t+1}, \lambda) = U(c_t, c_{t+1}) + \lambda \left( w_t - c_t - \frac{c_{t+1}}{1+r_{t+1}} \right)$$

Pour déterminer les conditions d'optimisation de l'utilité de l'agent, on annule les dérivées du Lagrangien par rapport aux variations de choix de l'agent  $c_t, c_{t+1}$  et  $\lambda$  (multiplicateur de Lagrange). On obtient ainsi les deux conditions du premier ordre suivantes (auxquelles s'ajoute la CBI) :

$$\begin{aligned} c_{t+1}^\beta &= \lambda \\ \beta c_t c_{t+1}^{\beta-1} &= \frac{\lambda}{1+r_{t+1}} \end{aligned}$$

En combinant ces deux conditions, on obtient la condition de Keynes-Ramsey aussi appelée équation d'Euler :

$$\begin{aligned} c_t c_{t+1}^{\beta-1} &= \frac{c_{t+1}^\beta}{\beta(1+r_{t+1})} \\ \frac{c_t}{c_{t+1}} &= \frac{1}{\beta(1+r_{t+1})} \end{aligned}$$

On peut aussi l'écrire ainsi :

$$c_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})c_t$$

Dans les deux cas, on peut constater qu'une augmentation du taux d'intérêt augmente la consommation future relativement à la consommation présente (effet de substitution intertemporel). De la même façon, un accroissement de  $\beta$  déforme le sentier de consommation au profit de la consommation future. Ce paramètre est l'indicateur de préférence pour le présent de l'agent. Plus il est élevé, moins l'agent valorise la consommation présente.

En combinant la condition Keynes-Ramsey et la contrainte budgétaire intertemporelle, on obtient :

$$c_t + \beta c_t = w_t$$

Ou encore :

$$c_t = \frac{1}{1+\beta} w_t$$

A partir de la contrainte budgétaire de première période (ou simplement de la définition de l'épargne) on peut écrire :

$$s_t = w_t - c_t$$

Ainsi :

$$s_t = w_t - \frac{1}{1+\beta}w_t$$

$$s_t = \frac{\beta}{1+\beta}w_t$$

On remarque que l'épargne de l'agent ne dépend pas du taux d'intérêt dans le cas étudié. Il s'agit d'un cas particulier dans lequel l'effet de substitution intertemporel et l'effet revenu associé à une variation de  $r$  se compensent exactement. (C'est l'hypothèse de Keynes dans la *Théorie générale*.)

## 2. Equation dynamique du modèle

A la différence du modèle de Solow, le modèle à générations imbriquées est un modèle en temps discret. Dans ce cadre, l'équation dynamique va prendre la forme d'une relation entre  $k_{t+1}$  et  $k_t$  autrement appelée équation de récurrence.

Dans ce modèle, où le taux de dépréciation est de 100%, le capital disponible à la période  $t+1$  correspond à l'épargne totale de la période précédente. Ainsi, par définition :

$$K_{t+1} = N_t s_t$$

Où  $N_t$  est le nombre d'agents jeunes à la période  $t$ . On peut aussi considérer cette équation comme une condition d'équilibre sur le marché des biens stipulant que l'investissement agrégé est égal à l'épargne agrégée.

Comme on suppose que  $N_{t+1} = (1+n)N_t$ , on peut écrire :

$$\frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} = \frac{N_t s_t}{(1+n)N_t}$$

Ou encore :

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{1+n}$$

A nouveau, nous cherchons une relation entre  $k_{t+1}$  et  $k_t$ . Mais l'épargne dépend du revenu des ménages  $w$  qui dépend de la production de la période courante et ainsi du capital de la période courante. Voyons cela. L'épargne a été déterminée à la fin de la question précédente en fonction de  $\beta$  et  $w$ . On a donc :

$$k_{t+1} = \frac{\beta}{(1+n)(1+\beta)}w_t$$

Dans ce modèle, comme dans le modèle de Solow, la concurrence parfaite implique une rémunération des facteurs à la productivité marginale. En d'autres termes, la dérivée de la fonction de production par rapport à  $L$  est égale au salaire  $w$  :

$$w_t = (1-\alpha)K^\alpha L^{1-\alpha-1}$$

$$w_t = (1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha}$$

$$w_t = (1-\alpha)k_t^\alpha$$

Nous pouvons donc obtenir facilement l'équation dynamique qui est :

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)} k_t^\alpha$$

### 3. Valeur d'état stationnaire du capital par travailleur

A l'état stationnaire, le capital par travailleur ne change plus et  $k_{t+1} = k_t = k^*$ . Il s'agit donc de résoudre l'équation suivante :

$$k^* = \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)} (k^*)^\alpha$$

On trouve :

$$k^* = \left[ \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

### 4. Règle d'or

Dans cette économie comme dans un modèle de Solow, la production disponible pour la consommation à la date  $t$  est déterminée par la fonction de production, ici  $y = k^\alpha$ , et par l'investissement de point mort, ici  $(1+n)k$ , puisque le taux de dépréciation  $\delta$  est égal à 1 :

$$c_t = k_t^\alpha - (1+n)k_t$$

On dérive cette expression par rapport à  $k$  et on annule la dérivée pour obtenir le capital par tête qui maximise la consommation de la période. On retrouve ainsi la règle d'or :

$$\alpha k_t^{\alpha-1} = 1 + n$$

La productivité marginale du capital net de la dépréciation du capital est égale au taux de croissance de la population.

On en déduit le capital part tête de règle d'or :

$$k^{or} = \left( \frac{\alpha}{1+n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

### 4. Inefficience dynamique

Dans ce modèle à générations imbriquées, le capital par tête d'état stationnaire, résultant des choix maximisateurs des individus, peut-être supérieur au capital par tête qui maximise la consommation de l'ensemble de la population. On peut déterminer le critère de réalisation d'une telle « inefficience dynamique » en posant :

$$\begin{aligned} k^* &> k^{or} \\ \left[ \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} &> \left( \frac{\alpha}{1+n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)} &> \frac{\alpha}{1+n} \end{aligned}$$

$$\frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta} > \alpha$$

$$\frac{\beta}{1+\beta} > \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Si cette condition est vérifiée, par exemple pour  $\alpha = 1/4$  et  $\beta = 4/5$ , alors le capital par tête est trop élevé. Il est possible d'augmenter la consommation de tous les individus à toutes les périodes en trouvant un arrangement qui réduise l'épargne des jeunes et l'accumulation de capital. L'Etat pourrait, par exemple, décider de prélever une unité de bien à chaque jeune pour en donner  $1+n$  à chaque vieux en répétant cela à toutes périodes suivantes. Cette propriété du modèle à générations imbriquées est liée à sa structure particulière et à l'incomplétude du système de marché qu'elle implique. Certaines transactions (entre générations) qui seraient profitables à l'ensemble des individus ne peuvent avoir lieu.

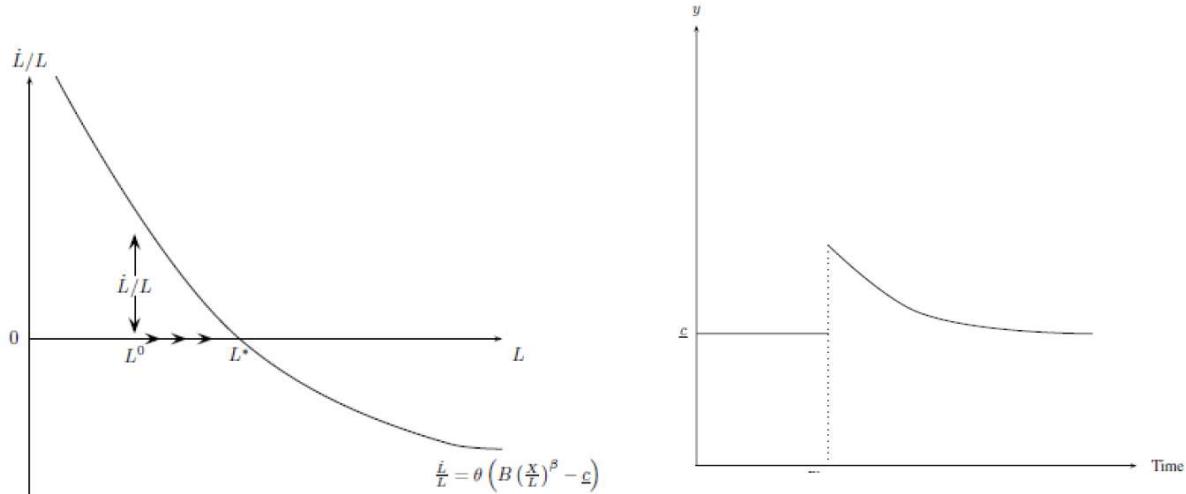
## Dossier 5 Economie Malthusienne et origine de la croissance

1) Avant le choc, l'économie est à l'état stationnaire, où  $\frac{\dot{L}}{L} = 0$ , donc le niveau de revenu par habitant à l'état d'équilibre est  $y^* = \underline{c}$  et la taille de la population à l'état d'équilibre est  $y = B(\frac{X}{L})^\beta \rightarrow \underline{c} = B(\frac{X}{L})^\beta \rightarrow L^* = X(\frac{B}{\underline{c}})^{1/\beta}$ .

À l'impact, lorsque  $L$  chute soudainement, les taux de croissance de la population et du revenu sautent à des niveaux plus élevés. En effet, étant donné  $y = B(\frac{X}{L})^\beta$ ,  $y \uparrow$  si  $L \downarrow$ ; et, étant donné  $\frac{\dot{L}}{L} = \theta \left( B \left( \frac{X}{L} \right)^\beta - \underline{c} \right)$ ,  $\frac{\dot{L}}{L} \uparrow$  si  $L \downarrow$ .

Pendant la transition, en raison d'une croissance démographique plus élevée,  $L$  augmente et le revenu par habitant diminue.

À long terme, nous sommes à nouveau à l'état d'équilibre initial, où le revenu par habitant est à nouveau égal au niveau de consommation de subsistance et le taux de croissance de la population est à nouveau égal à zéro.

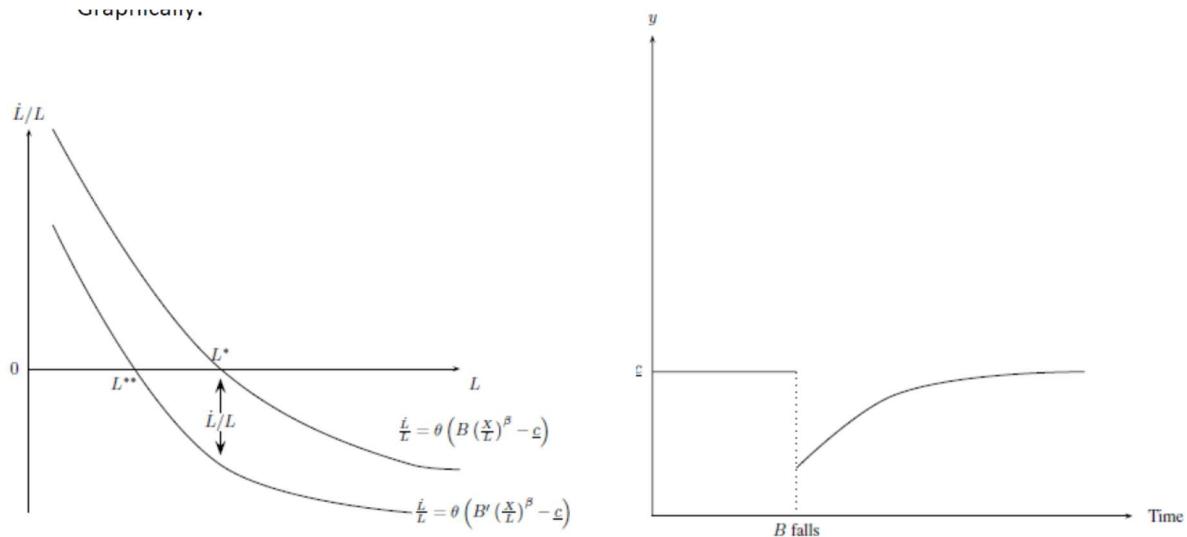


2) Avant le choc, l'économie est à l'état stationnaire :  $\frac{\dot{L}}{L} = 0$ ,  $y = \underline{c}$  et  $L^* = X(\frac{B}{\underline{c}})^{\frac{1}{\beta}}$ .

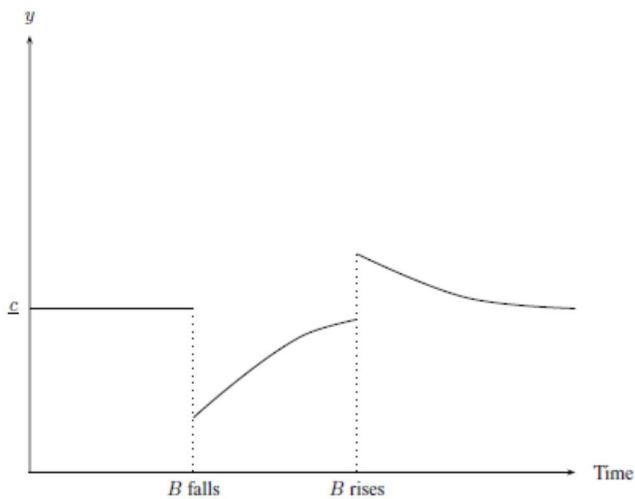
À l'impact, lorsque  $B$  chute soudainement, le taux de croissance de la population saute à une valeur inférieure (inférieure à zéro) et également le revenu par habitant saute à une valeur inférieure (inférieure à  $\underline{c}$ ). En effet, étant donné  $y = B(\frac{X}{L})^\beta$ ,  $y \downarrow$  si  $B \downarrow$  (rappelons que  $y = \frac{1}{\theta} \frac{\dot{L}}{L} + \underline{c}$ ); et, étant donné  $\frac{\dot{L}}{L} = \theta \left( B \left( \frac{X}{L} \right)^\beta - \underline{c} \right)$ ,  $\frac{\dot{L}}{L} \downarrow$  si  $B \downarrow$ .

Au cours de la transition, en raison des taux de croissance négatifs de la population, la taille de la population,  $L$  diminue progressivement vers le nouvel état stationnaire  $L^{**} = X(\frac{B'}{\underline{c}})^{1/\beta}$ , les taux de croissance démographique négatifs tendent progressivement vers zéro, tandis que le revenu par habitant tend progressivement vers  $\underline{c}$ .

À long terme, nous sommes au nouveau même état stationnaire, avec un niveau de population plus faible, le revenu par habitant est égal au niveau de consommation de subsistance et le taux de croissance de la population est égal à zéro.



3) La dynamique de  $y$  à court et moyen terme est la même que celle décrite dans l'exercice précédent. Cependant, dans ce cas, pendant la transition, avant d'atteindre le nouvel état stationnaire, il intervient une augmentation de la productivité : de  $B'$  à sa valeur d'origine plus élevée  $B$ . Cela provoque un bond du taux de croissance de la population et du revenu par habitant, qui est désormais supérieur au niveau de consommation de subsistance. Maintenant, l'état stationnaire pertinent est l'état stationnaire d'origine  $L^* = X(\frac{B}{\underline{c}})^{1/\beta}$ . Le taux de croissance de la population et le revenu par habitant diminuent progressivement dans leur transition vers leurs valeurs d'état stationnaire.



## Exercices bonus

### Corrigé exercice

#### La population dans le modèle de Solow sans progrès technique

Nous reprenons dans cet exercice les données de l'exercice précédent. Le modèle est donc inchangé. Il s'agit désormais d'explorer les effets de modifications du taux de croissance démographique ou de la population.

1. La réponse à cette première question passe par le calcul des valeurs d'état réguliers de  $k$ ,  $y$  et  $c$  dans le modèle de Solow sans progrès technique. L'état régulier est aussi ce qu'on appelle l'état stationnaire ou le sentier de croissance équilibré. Il s'obtient lorsque l'investissement des ménages coïncide avec l'investissement de point mort. Il nous faut partir de l'équation dynamique fondamentale (obtenue dans la question 2 de l'exercice 2) en supposant que  $\dot{k} = 0$ . Ou :

$$\dot{k} = sk^\alpha - (\delta + n)k \text{ avec } \dot{k} = 0$$

Pour déterminer  $k^*$  on résout donc :

$$sk^\alpha = (\delta + n)k$$

En divisant des deux côtés par  $s$  et par  $k$  on obtient :

$$\frac{k^\alpha}{k} = \frac{\delta + n}{s}$$

D'où (en appliquant  $\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$  et  $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ ) :

$$\frac{1}{k^{1-\alpha}} = \frac{\delta + n}{s}$$

Si on inverse les deux membres de l'équation on obtient :

$$k^{1-\alpha} = \frac{s}{\delta + n}$$

Enfin en élevant les deux membres de l'équation à la puissance  $1/(1 - \alpha)$  on a :

$$k^* = \left( \frac{s}{\delta + n} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

L'astérisque désigne le fait que le capital par tête est à sa valeur d'état régulier.

On sait que la fonction de production sous forme intensive est  $y = k^\alpha$ . La production par travailleur à l'état régulier est donc :

$$y^* = \left( \frac{s}{\delta + n} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

La consommation par travailleur correspond au revenu par travailleur moins l'épargne :

$$c^* = y^* - sy^* = (1 - s)y^*$$

$$c^* = (1 - s) \left( \frac{s}{\delta + n} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

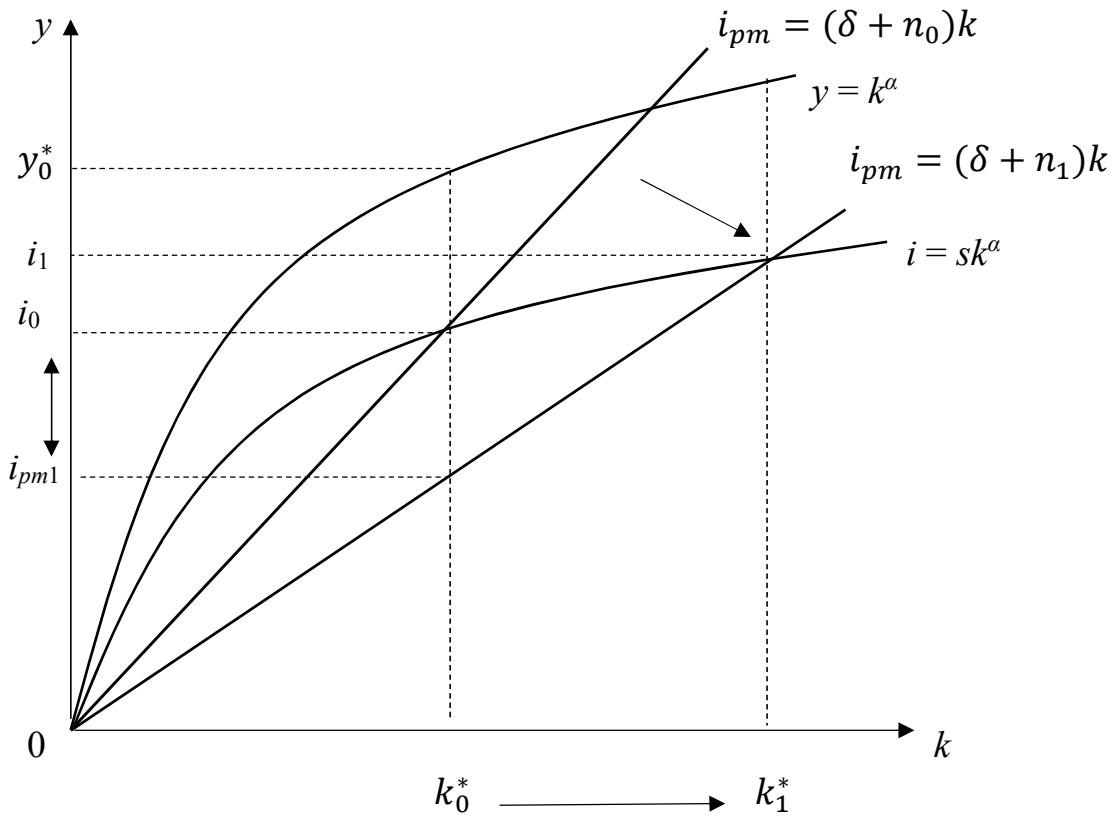
Il est maintenant possible de répondre à la première question. Comme le taux de croissance de la population  $n$  apparaît au dénominateur des expressions de  $k^*$ ,  $y^*$  et  $c^*$ . Il est évident qu'une chute de la valeur de cette variable accroît ces valeurs d'état régulier. Si la population croît moins rapidement, cela permet d'atteindre à long terme un niveau de capital par habitant plus élevé, un revenu plus élevé et un niveau de consommation plus élevé.

On peut calculer la dérivée de  $k^*$  par rapport à  $n$  pour avoir une expression plus précise de ce résultat :

$$\frac{dk^*}{dn} = \left( \frac{1}{1 - \alpha} \right) \left( \frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left[ \frac{-s}{(\delta + n)^2} \right] < 0$$

## 2. Représentation de la trajectoire des variables considérées après la chute de $n$

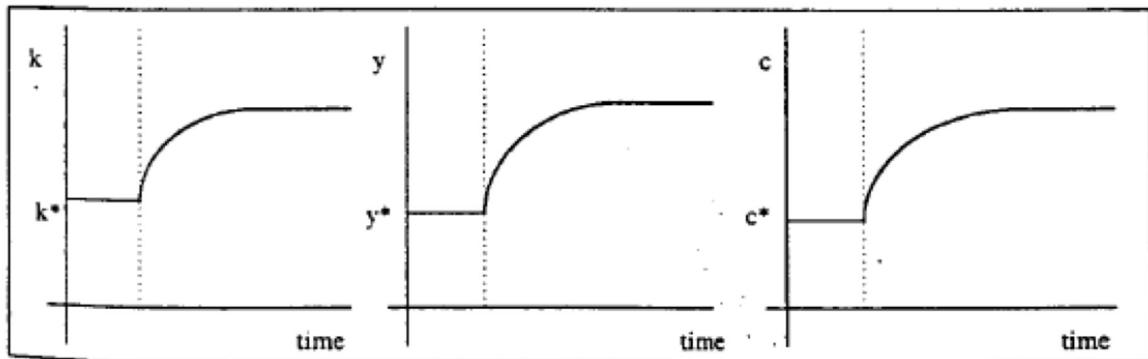
On peut commencer par tracer le diagramme de Solow pour étudier les conséquences de court et de long terme de la baisse de  $n$ . Voici le résultat :



Le mécanisme à l'œuvre est le suivant. La chute du taux de croissance démographique réduit la pente de la fonction d'investissement de point mort. En d'autres termes, puisque la population augmente moins vite, l'effet de dilution du capital est moins important. Un investissement par tête plus petit suffit à maintenir en l'état le capital par travailleur. L'investissement initial lorsque  $n$  chute, notons le  $i_0$ , est alors trop important par rapport au nouvel investissement de

point mort  $i_{pm1}$ . Ceci signifie que le capital par travailleur augmente, entraînant avec lui la hausse du revenu par travailleur et de la consommation par travailleur. Cependant, la productivité marginale décroissante du capital par travailleur entraîne une réduction progressive de l'écart entre investissement et investissement de point mort. Capital par travailleur, revenu par travailleur et consommation par travailleur augmentent de moins en moins vite jusqu'à rejoindre leurs nouvelles valeurs d'état régulier à l'intersection de la courbe d'investissement et de la nouvelle courbe d'investissement de point mort.

On peut représenter ainsi la trajectoire de ces variables :



### 3. Modification du taux de croissance de la production globale $Y$

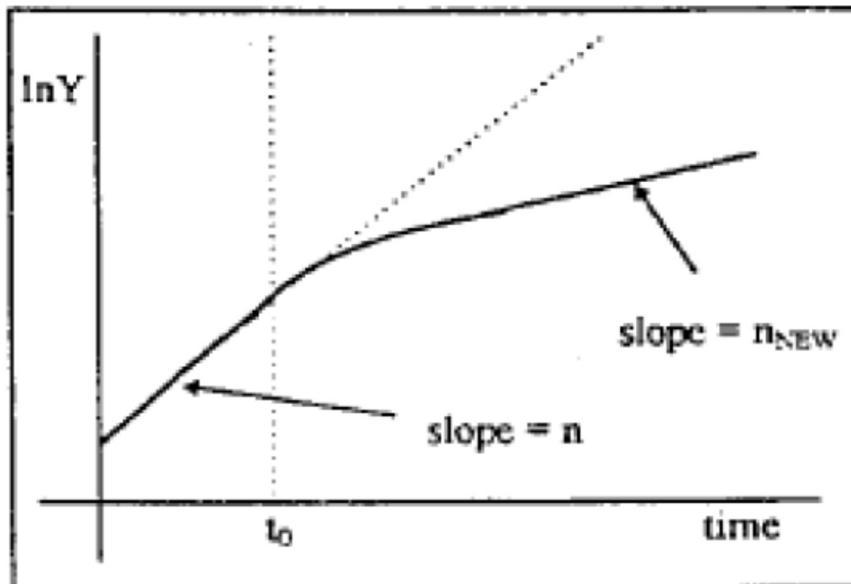
A l'état régulier, nous savons que le taux de croissance de la production globale est égal au taux de croissance démographique (en l'absence de progrès technique). En effet, par définition du revenu par travailleur :

$$g_Y = n + g_y$$

(cf. question 5 de l'exercice 2)

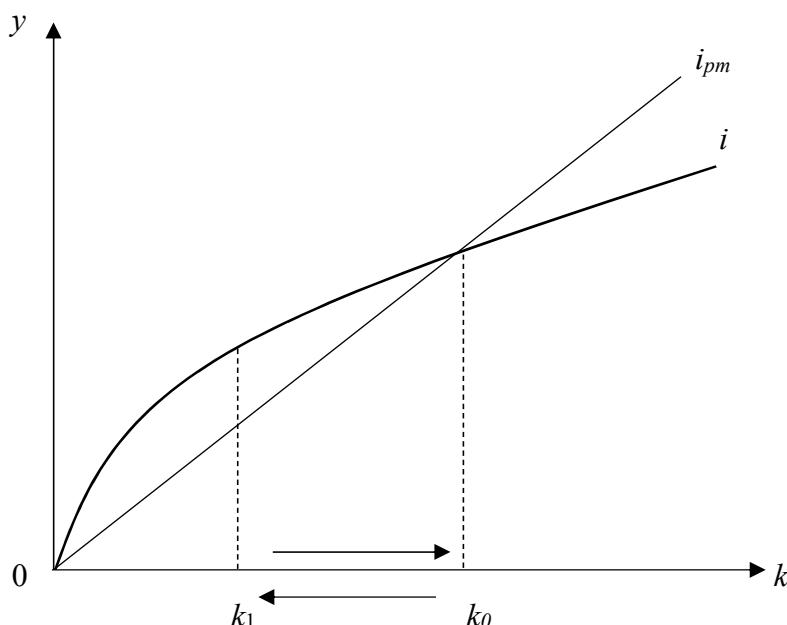
Or, par définition, à l'état régulier le revenu par travailleur est constant. Si le taux de croissance démographique chute, ceci veut dire que la croissance du PIB chute à long terme dans cette économie de Solow. A court terme (ou durant la transition vers le nouvel état régulier), nous avons vu dans la question précédente que le revenu par habitant augmente, quoi que de moins en moins vite. Ainsi le taux de croissance du revenu global rejoint progressivement le nouveau taux de croissance de la population de travailleurs.

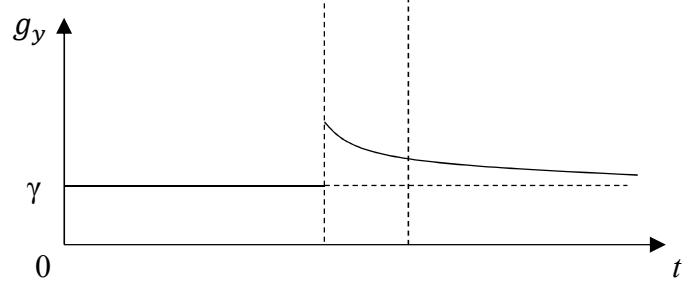
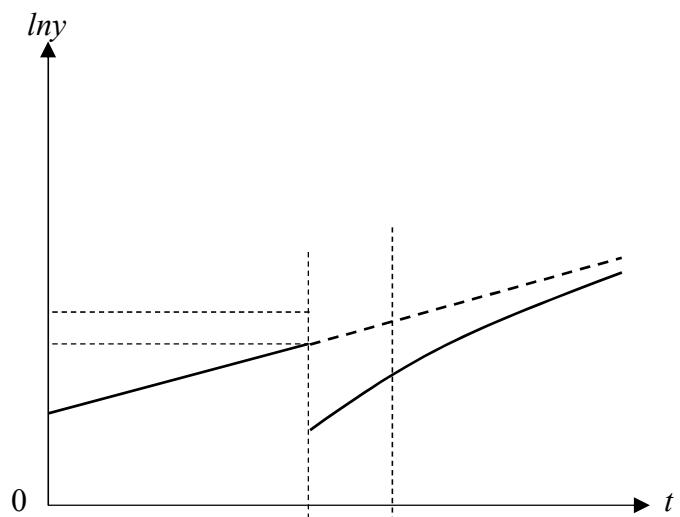
On peut représenter la trajectoire de  $Y$  sur un graphique qui fait apparaître le logarithme de  $Y$  en ordonnée et le temps en abscisse. Raisonner sur le logarithme de  $Y$  est avantageux car la pente du logarithme de  $Y$  est son taux de croissance. La trajectoire initiale est une droite de pente  $n_0$ . La nouvelle trajectoire est une droite de pente inférieure  $n_1$ . Le PIB rejoint progressivement la nouvelle trajectoire avec un taux de croissance qui chute progressivement de  $n_0$  à  $n_1$ . Voir le graphique ci-dessous :



#### 4. Un afflux ponctuel de travailleurs migrants

Un afflux ponctuel de travailleurs migrants identiques aux travailleurs natifs ne modifie pas les paramètres structurels de l'économie (taux d'épargne, taux de dépréciation et taux de croissance démographique). La position des courbes d'investissement et d'investissement de point mort ne change pas sur le graphique de Solow. L'état régulier de l'économie n'est pas affecté. On peut aussi le vérifier à partir des résultats de la première question. Cependant à court terme, l'arrivée de ces nouveaux travailleurs change la quantité de capital (imaginez les outils) disponible pour chacun.  $K/L$  chute puisque  $L$  augmente au temps  $t_0$ . L'économie souffre d'une pénurie de capital relativement au nombre accru de travailleurs et la production par travailleur chute. Mais comme l'investissement de point mort est alors inférieur à l'investissement, le capital par travailleur se met à croître. Il augmentera jusqu'à revenir à sa valeur d'état régulier. A ce stade, l'économie aura retrouvé son revenu par travailleur initial. Le choc initial doit ainsi finir par être absorbé. D'après le modèle de Solow, à long terme, un afflux de travailleurs migrants n'a aucun effet sur l'économie. Le SCE n'est pas modifié par le choc. On peut le vérifier en considérant  $y^*$ . Le revenu chute d'abord mais va ensuite revenir sur le SCE initial.





## Corrigé de l'exercice

### Comment ces économies vont-elles évoluer ?

#### 1. Revenu relatif d'état régulier

Il s'agit de déterminer la formule qui permet de prédire le revenu relatif d'un pays  $i$  par rapport à un pays de référence à l'état régulier c'est-à-dire à partir du modèle de Solow avec progrès technique et capital humain.

Le revenu d'état régulier nous est donné dans l'énoncé :

$$y^*(t) = \left( \frac{s}{n + \gamma + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h A(t)$$

On peut ainsi écrire :

$$\tilde{y}_{ij}^* = \frac{y_i^*(t)/y_j^*(t)}{\left( \frac{s_i}{n_i + \gamma + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h_i A_i(t)} = \frac{\left( \frac{s_i}{n_i + \gamma + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h_i A_i(t)}{\left( \frac{s_j}{n_j + \gamma + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h_j A_j(t)}$$

#### 2. Revenus d'état réguliers des pays considérés dans le tableau

Sans convergence des niveaux d'efficacité du travail on applique la formule suivante :

$$\tilde{y}_{iUS}^* = \frac{y_i^*(t)}{y_{US}^*(t)} = \frac{\left( \frac{s_i}{n_i + 0,75} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{u_i}{10}}}{\left( \frac{0,210}{0,759} \right)^{\frac{1}{2}} e^{1,18}} \frac{A_i}{A_{US}} = \frac{\left( \frac{s_i}{n_i + 0,75} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{u_i}{10}}}{1,71} \frac{A_i}{A_{US}}$$

Dans le cas où les niveaux de technologie convergent on utilise la formule :

$$\tilde{y}_{iUS}^* = \frac{y_i^*(t)}{y_{US}^*(t)} = \frac{\left( \frac{s_i}{n_i + 0,75} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{u_i}{10}}}{1,71}$$

Les calculs nous donnent les résultats suivants :

Pays	$\tilde{y}_{90}$	$\tilde{y}^*$	$\tilde{y}^* \left( \frac{A_i}{A_j} = 1 \right)$
Etats-Unis	1	1	1
Canada	0,93	1,002	0,954
Brésil	0,30	0,305	0,396
Chine	0,06	0,074	0,674
Kenya	0,05	0,059	0,367

#### 3. Résultats de l'analyse

D'après le modèle de Solow, la rapidité de la croissance dépend de la distance à l'égard du sentier régulier. Sur ce sentier, d'après les hypothèses de l'exercice, tous les pays doivent croître au taux gamma. L'analyse des résultats dépend ensuite de la prise en compte, ou non, de la convergence des niveaux technologiques.

En l'absence de convergence technologiques, les pays sont tous relativement proches de leur revenu d'état régulier. Le Brésil est à 98,4% et sa croissance serait donc la plus lente. Vient ensuite le Canada, le Kenya et la Chine. La Chine aurait la croissance la plus rapide. Chine et Kenya sont voués à rester très loin des Etats-Unis du fait de niveaux technologiques très inférieurs. Le Kenya est particulièrement handicapé par un taux d'épargne faible, une durée d'étude courte et un taux de croissance démographique plus élevé que les autres pays. Le Brésil est moins handicapé sur le plan technologique mais il connaît la durée d'étude la plus courte et un taux d'épargne trop bas.

Le tableau est différent si la convergence des niveaux de technologie A est prise en compte. Sous cette hypothèse, le revenu relatif du Kenya représente 13,6% de son revenu relatif d'état régulier. Ce chiffre est de 8,9% dans le cas de la Chine, de 75,7% pour le Brésil, de 97,5% pour le Canada. Le modèle de Solow prédit ainsi la croissance la plus rapide pour la Chine, puis pour le Kenya. La Chine avait le plus grand retard technologique en 1990. Il est donc logique qu'elle croisse très vite si elle rattrape ce retard. Le modèle prédit une croissance plus lente pour le Brésil et le Canada dans la mesure où le premier a moins de retard technologique et le second est en avance et voit cette avance disparaître. Si le Kenya connaît, comme la Chine, dans ce scénario, un rattrapage technologique important, il reste structurellement handicapé pour les raisons indiquées dans le paragraphe précédent et restera loin derrière les Etats-Unis. C'est aussi le cas du Brésil.

#### **4. Limites de l'exercices**

Les limites de cet exercice sont nombreuses. Il permet de voir comment le modèle de Solow propose un premier diagnostic de la situation des pays considérés en identifiant des points forts et des points faibles. Mais les prédictions de croissance liées au calcul des revenus d'état régulier reposent sur l'hypothèse de paramètres constants : taux d'épargne, taux de croissance démographique, durée d'étude. Ces paramètres peuvent tous changer au cours du temps et invalider les prédictions. Un pays qui se développe peut développer son système éducatif et allonger la durée d'étude par exemple. Inversement, un choc politique ou climatique peut modifier ces variables en sens inverse. Ensuite, les hypothèses sur le rattrapage technologique ou non sont extrêmes. En réalité, ce rattrapage est imparfait et, surtout, il ne se fait pas de la même façon selon les pays. L'évolution de la Chine valide assez bien la prédition du fait d'un rattrapage technologique rapide. C'est moins évident pour le Kenya qui est approximativement à 6% du PIB des Etats-Unis en 2019 et n'a donc pratiquement pas convergé. Comprendre la situation d'un pays et son potentiel de croissance suppose donc une analyse plus fine de sa situation et de ses institutions.

### **Exercice La fonction de production d'idées**

Soit une fonction de production d'idée de la forme :  $\dot{A} = \theta L_A A^\varphi$

Il est possible de la justifier ainsi.

1. Pour commencer, le travail des chercheurs  $L_A$  et les idées déjà accumulées  $A$  contribuent à la production de nouvelles idées.

2.  $L_A$  entre de façon linéaire dans la fonction de production d'idée. Ceci traduit l'idée de rendement d'échelle constants pour les ressources rivales. Il faut doubler le nombre de chercheurs pour doubler la production d'idées. L'inconvénient de cette modélisation est qu'elle néglige la possibilité de découvertes simultanées ou l'effet de duplication.

3.  $\varphi > 0$  revient à faire l'hypothèse d'une externalité de connaissance positive. Les idées existantes sont une ressource non-rivale qui facilite la production de nouvelles idées.

Cette externalité de connaissance peut conduire à des rendements d'échelle croissant. En effet, si  $\varphi > 0$ , le doublement du nombre de chercheur augmente non seulement la production d'idées de façon directe mais aussi de façon indirecte car la croissance du stock d'idées accroît l'efficacité des chercheurs par l'intermédiaire de  $A$ .