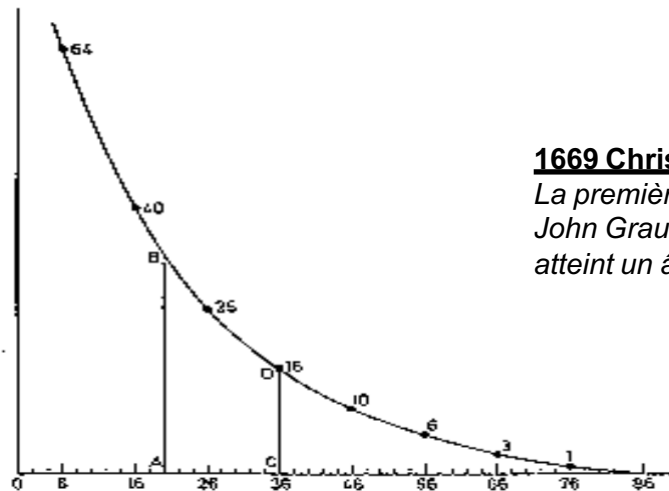


Chapitre 5 : Tables de mortalité

1. Historique
2. Définitions des événements et états démographiques
3. Éléments clés des tables démographiques
4. Durée de vie, durée d'un état
5. Comparaison des tables : décomposition des changements de l'espérance de vie



1669 Christiaan Huygens (1629-1695). Netherlands

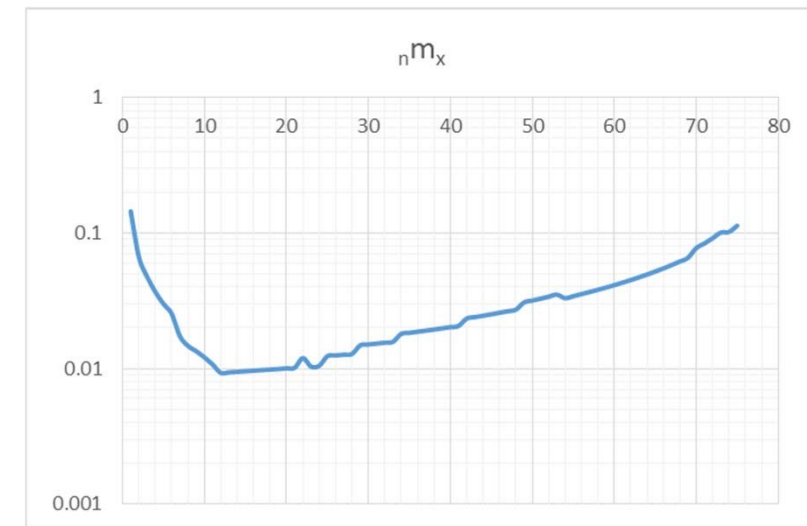
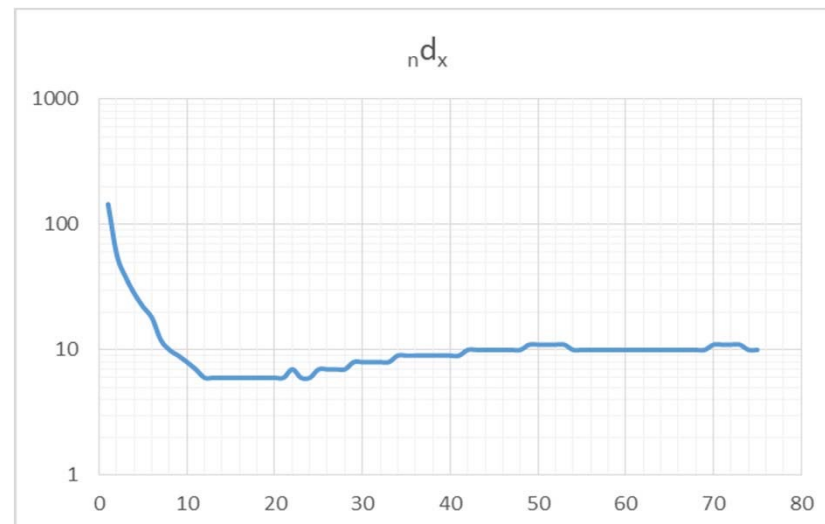
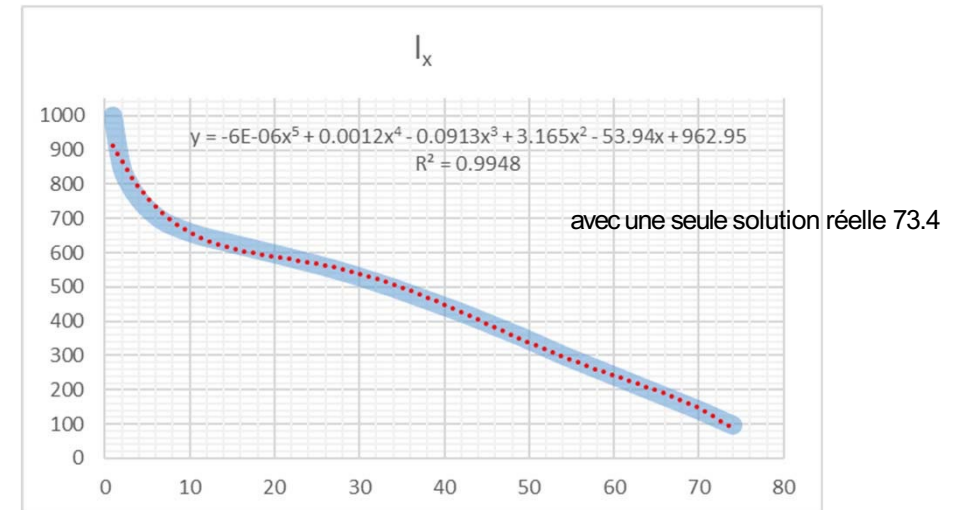
La première représentation graphique de la fonction de distribution continue: la table de mortalité de John Graunt avec la démonstration comment peut-on trouver la durée médiane de vie après avoir atteint un âge donné

Invention de la table de mortalité, Edmond Halley - 1693 (théorie de mesure et de la probabilité)

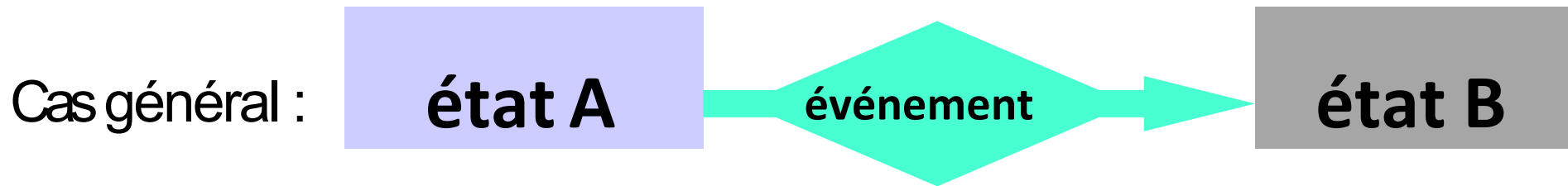
1693 – Edmond Halley publie

“An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Drawn from Curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; With an Attempt to Ascertain the Price of Annuities upon Lives”. By Mr. E. Halley, R.S.S., *Philosophical Transactions*, v. XVII, January 1, №196, 1693, p. 596 - 610. + “Some further Considerations on the Breslow bills of Mortality, by the same hand with the former”, *Ibid.*, № 198, p. 654-656.¹

Age.	Per-	Age.	Per-	Age.	Per-	Age.	Per-	Age.	Per-	Age.	Per-	Age.	Per-
Curt.	sons.	Curt.	sons.	Curt.	sons.	Curt.	sons.	Curt.	sons.	Curt.	sons.	Curt.	sons.
1	1000	8	680	15	628	22	586	29	539	36	481	7	5547
2	855	9	670	16	622	23	579	30	531	37	472	14	4584
3	798	10	651	17	616	24	573	31	523	38	463	21	4270
4	760	11	633	18	610	25	567	32	515	39	454	28	3964
5	732	12	646	19	604	26	560	33	507	40	445	35	3564
6	710	13	640	20	598	27	553	34	499	41	436	42	3178
7	692	14	634	21	592	28	546	35	490	42	427	49	2709
Age	Per-	Age.	Per-	Age.	Per-	Age.	Per-	Age.	Per-	Age.	Per-	Age.	Per-
Curt	sons.	Curt.	sons.	Curt.	sons.	Curt.	sons.	Curt.	sons.	Curt.	sons.	Curt.	sons.
43	417	50	346	57	272	64	202	71	131	78	58	63	1694
44	407	51	335	58	262	65	192	72	120	79	49	70	1204
45	397	52	324	59	252	66	182	73	109	80	41	77	692
46	387	53	313	60	242	67	172	74	98	81	34	84	253
47	377	54	302	61	232	68	162	75	88	82	28	100	107
48	367	55	292	62	222	69	152	76	78	83	23		
49	357	56	282	63	212	70	142	77	68	84	20		
												34000	
												Sum Total.	



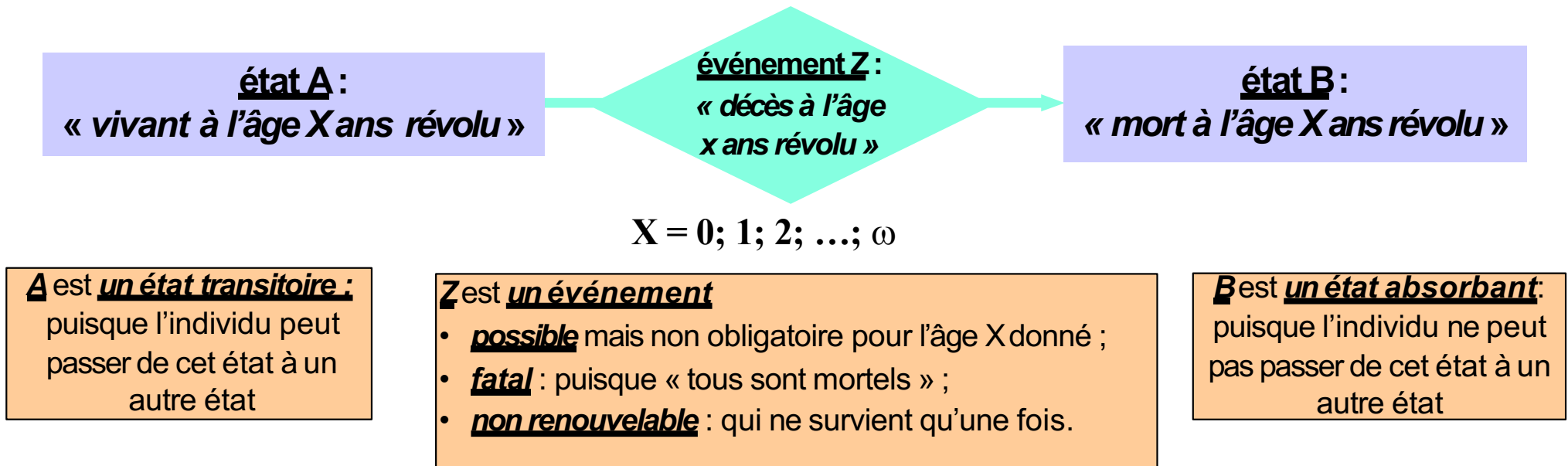
Événements et états en démographie : notion de transition



Transition de l'état A vers l'état B
conditionnée par un événement Z

Tables démographiques présentent la probabilité de passer d'un état à l'autre sous la condition d'un événement

Analyse de la mortalité à l'âge x comme une transition



On peut donc s'intéresser à obtenir la série des probabilités de passer d'un état à l'autre associées à chaque âge $x = 0; 1; 2; \dots, \omega - 1; \omega \rightarrow$

de mourir « d_x », telle que $\sum_{x=0}^{\omega} d_x = 1$ de survivre « S_x », telle que $S_x = 1 - d_x$

« d_x » et « S_x » - sont les fonctions clés de la table de mortalité, ou d'un modèle de survie (décès de table et la survie).

Modèle d'analyse de survie d'une génération

Soit

x – un âge exact (à l'anniversaire cf. diagramme de Lexis)

n – une amplitude d'intervalle d'âge (entre x et $x+n$)

P_x - l'effectif de la population à l'âge x
à la date d'un événement (naissance, anniversaire)

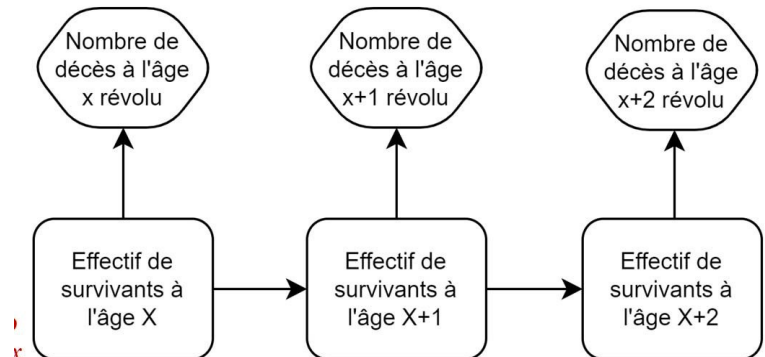
M_x - le nombre de décès à l'âge x révolu
sur l'intervalle de temps donnée (une année civile)

S_x - la probabilité de survie à l'âge x étant

la proportion de survivants à cet âge parmi l'effectif
initiale de cette génération

$$S_x = \frac{P_x}{P_0}$$

Séquence des transitions (modèle)



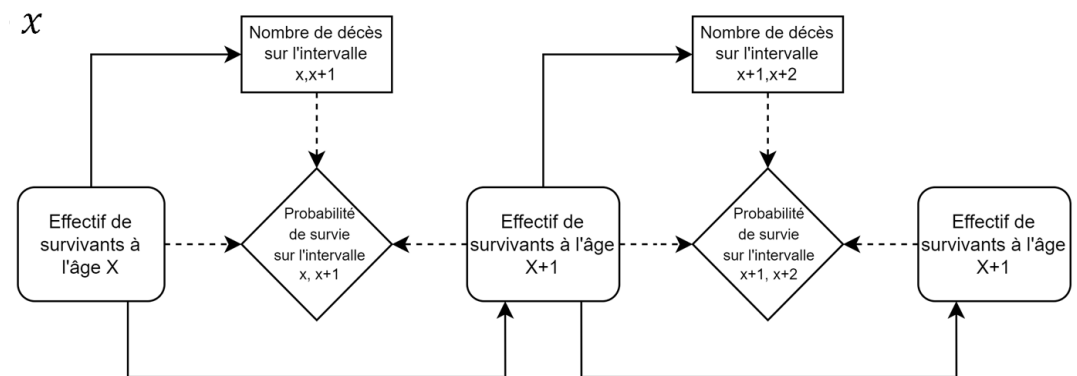
On peut calculer (estimer) les autres paramètres :

$$D_x = \frac{M_x}{S_0} \text{ - la probabilité de décéder à l'âge } x$$

$${}_n p_x = \frac{S_{x+n}}{S_x} \text{ - la probabilité de survivre entre deux anniversaires}$$

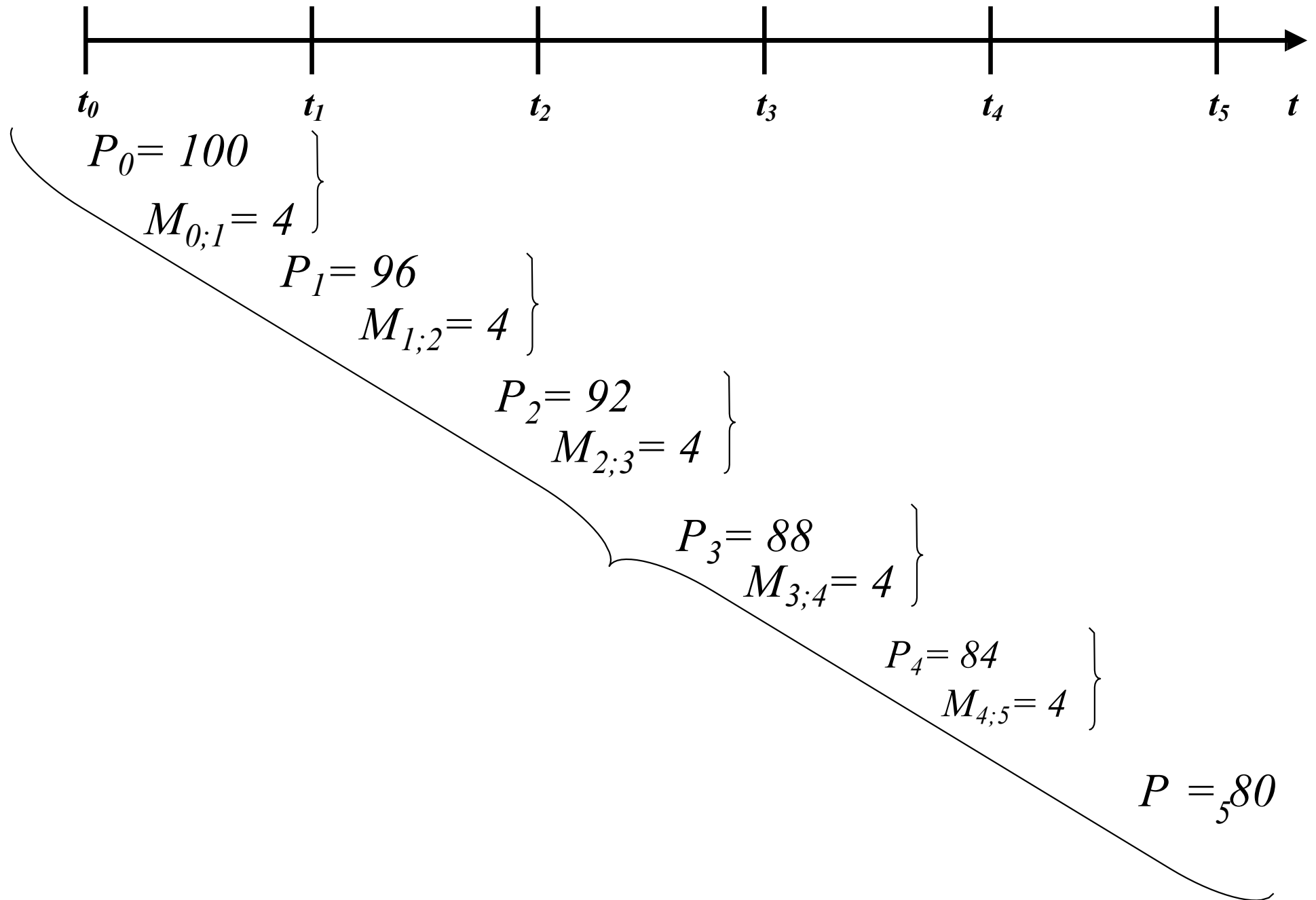
$${}_n q_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{S_x} \text{ - la probabilité de décéder entre deux anniversaires}$$

Probabilisation du processus des transitions



NB : Tous les paramètres sauf S_0 sont interdépendants

Mesures de transitions (survie) dans des intervalles de temps



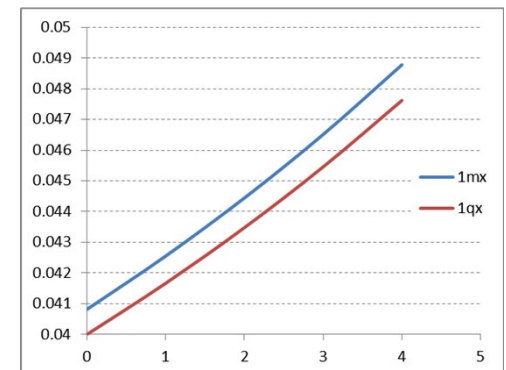
Résumé des transitions sous forme d'un tableau :

Age au début de l'intervalle (le temps individuel)	Amplitude de l'intervalle	Survivants à l'âge exact x	Décès dans l'intervalle d'âge [x;x+n)	Population exposée (Nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge) [x;x+n)	Taux de mortalité dans l'intervalle d'âge [x;x+n)	Probabilité de mourir dans l'intervalle d'âge [x;x+n)	Probabilité de survivre dans l'intervalle d'âge [x;x+1)
x	n	S_x ou (l_x)	${}_n d_x$	${}_n L_x$	${}_n m_x$	${}_n q_x$	${}_n p_x$
0	1	100	4	98	0,0408	0,0400	0,9600
1	1	96	4	94	0,0426	0,0417	0,9583
2	1	92	4	90	0,0444	0,0435	0,9565
3	1	88	4	86	0,0465	0,0455	0,9545
4	1	84	4	82	0,0488	0,0476	0,9524
5	1	80	4				

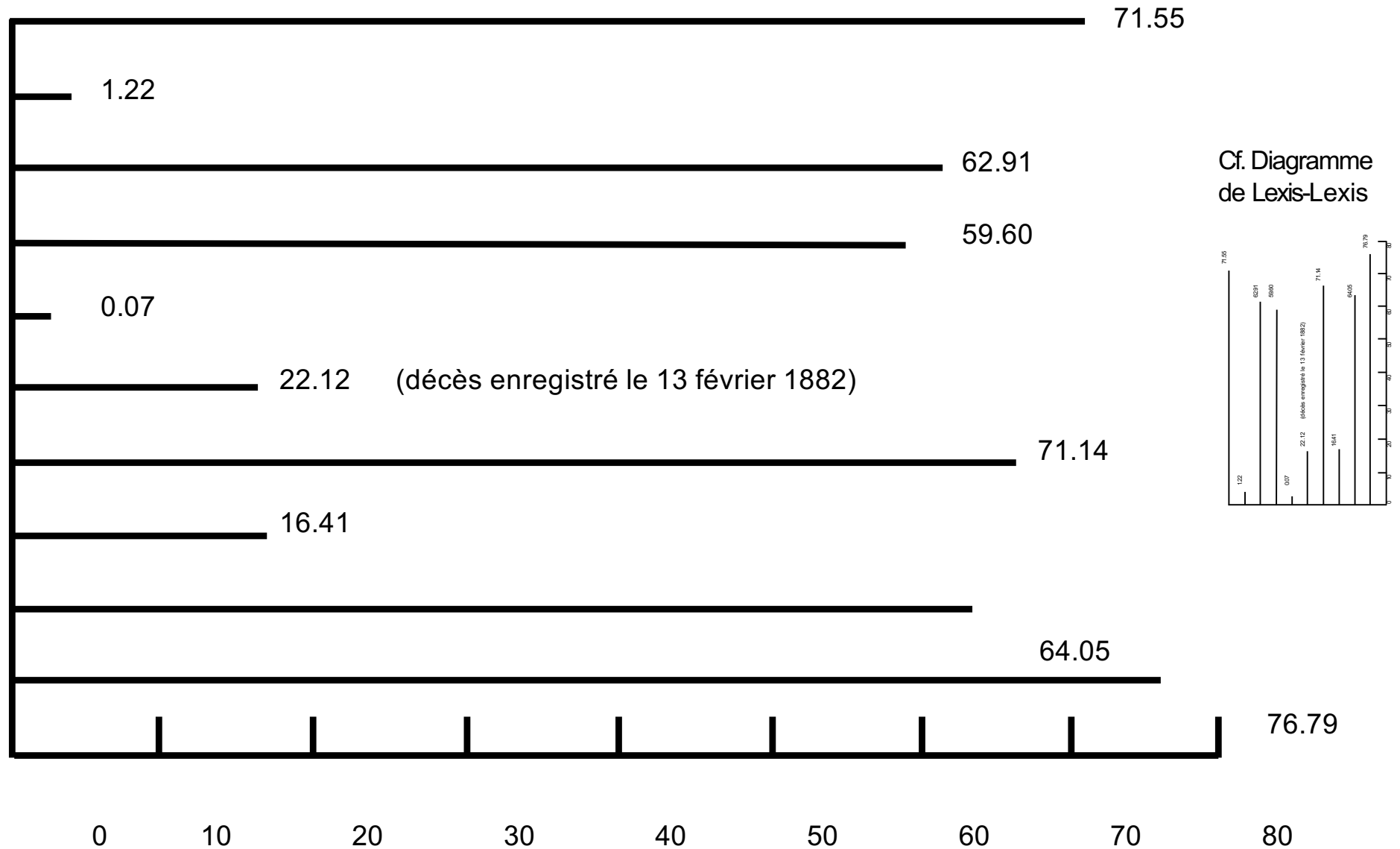
Question : quelle est la durée de l'état « vivant » (durée de vie) moyenne entre la naissance (âge exact 0) et le 5e anniversaire (âge exact de 5 ans)?

Réponse : ${}_5 e_0 = \frac{\sum_{t=0}^4 l_t}{l_0}$ une espérance mathématique de la durée de vie (espérance de vie moyenne)

Question : quelle est la durée moyenne de l'état « vivant » (durée moyenne de vie à la naissance) avec le taux mortalité = 4,44% ? (voir diapositive précédente)



Logique de construction de l'indicateur de l'Espérance de vie



Présentation de l'analyse de survie à partir des données sur l'âge exact au décès et les lignes de vie d'une cohorte de 10 personnes nées le 1 janvier 1800

Présentation des données individuelles sous la forme d'une table de mortalité

Age exact	Nombre de survivants à l'âge x	Nombre de décès entre x et x+n	Probabilité de mourir entre x et x+n	Probabilité de survivre de l'âge x à x+n	Durée moyenne de vie dans le dernier intervalle d'âge (entre x et x+n)	Nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge Par l'ensemble de la cohorte	Taux de mortalité dans l'intervalle d'âge entre x et x+n
x	S_x	${}_n d_x$	${}_n q_x$	${}_n p_x$	${}_n a_x$	${}_n S_x =$ $= n \cdot s_{x+n} + {}_n d_x \cdot {}_n a_x$	${}_n m_x =$ $= {}_n d_x / {}_n L_x$
0	10	— 1	— $\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	0,07	$1 \times 9 + 1 \times 0,07 =$ $= 9,07$	$\frac{1}{9,07}$
1	9	— 1	— $\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	0,22	$4 \times 8 + 1 \times 0,22 =$ $= 32,22$	$\frac{1}{32,22}$
5	8	0	0	1	----	$8 \times 5 = 40$	0
10	8	— 1	— $\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	6,41	$10 \times 7 + 1 \times 6,41 =$ $= 76,41$	$\frac{1}{76,41}$
20	7	1	...				
30							
40							
50							

Présentation des données individuelles sous la forme d'une table de mortalité

Age exact	Nombre de survivants à l'âge x	Nombre de décès entre x et x+n	Probabilité de mourir entre x et x+n	Probabilité de survivre de l'âge x à x+n	Durée moyenne de vie dans le dernier intervalle d'âge (entre x et x+n)	Nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge Par l'ensemble de la cohorte	Taux de mortalité dans l'intervalle d'âge entre x et x+n	Nombre d'années vécues après l'âge x par l'ensemble de la cohorte	Espérance de vie à l'âge x
x	S_x	${}_n d_x$	${}_n q_x$	${}_n p_x$	${}_n a_x$	${}_n S_x =$ $= n \cdot S_{x+n} + {}_n d_x \cdot {}_n a_x$	${}_n m_x =$ $= {}_n d_x / {}_n L_x$	$T_x = \sum {}_n S_x$	$e_x = T_x / S_x$
0	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	0,07	$1 \times 9 + 1 \times 0,07 =$ $= 9,07$	$\frac{1}{9,07}$	$436,79 + 9,07 =$ $= 445,86$	$\frac{445,86}{10} =$ $= 44,586$
1	9	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$	0,22	$4 \times 8 + 1 \times 0,22 =$ $= 32,22$	$\frac{1}{32,22}$	$404,57 + 32,22 =$ $= 436,79$	$\frac{436,79}{9} =$ $= 48,532$
5	8	0	0	1	----	$8 \times 5 = 40$	0	$364,57 + 40 =$ $= 404,57$	$\frac{404,57}{8} =$ $= 50,571$
10	8	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	6,41	$10 \times 7 + 1 \times 6,41 =$ $= 76,41$	$\frac{1}{76,41}$	$288,16 + 76,41 =$ $= 364,57$	$\frac{364,57}{8} =$ $= 45,571$
20	7	1	...					288,16	
30									
40									
50									

Eléments d'une table démographique à extinction simple (sans phénomène perturbateur)

x – l'âge exact (au moment du $x^{\text{ème}}$ anniversaire);

n – l'amplitude des intervalles d'âge (x) pour lesquels on calcule les indicateurs (« un pas » de table), elle peut être unique ou spécifique à l'âge (p.ex. si $n=1,4,5,5, \dots$) alors on peut indiquer l'amplitude spécifique à l'âge comme n_{age}
 $n = 1; n_{\text{age}} = 4; n_{\text{age}} = 5; n_{\text{age}} = 5; \text{etc } \dots$;

S_x – ($\equiv l(x)$ ou l_x) le nombre de survivants jusqu'à l'âge exact x ($x^{\text{ème}}$ anniversaire) ou « les survivants »;

${}_nq_x$ – le quotient de mortalité, ou la probabilité de mourir dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$ pour un survivant à l'âge x ;
d'autres écritures possibles : $q[x, x + n)$ ou $q_{x,x+n}$;

${}_np_x$ – la probabilité de survivre (ne pas mourir) de l'âge x à l'âge $x+n$; d'autres écritures possibles : $p[x, x + n)$ ou $p_{x,x+n}$;

${}_nL_x$ – « la population de table » ou le nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$; d'autres écritures possibles : $L[x, x + n)$ ou $L_{x,x+n}$ = la population exposée au risque de décès ;

${}_nd_x$ – nombre de décès dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$ (« décès de table ») ou la probabilité pour un nouveau-né de décéder dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$; d'autres écritures possibles : $d[x, x + n)$ ou $d_{x,x+n}$

${}_nm_x$ – taux de mortalité dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$ ou le taux de mortalité de table; d'autres écritures possibles $m[x, x + n)$ ou $m_{x,x+n}$;

T_x – nombre d'années vécues après l'âge exact x ($x^{\text{ème}}$ anniversaire) = la population de table âgée de plus de x ans ;

e_x – espérance de vie (durée moyenne de vie) après l'âge exact x ($x^{\text{ème}}$ anniversaire); si $x=0$ on dit e_0 - espérance de vie à la naissance ;

${}_na_x$ – durée de vie moyenne dans le dernier intervalle d'âge $[x, x+n)$: i.e. l'intervalle d'âge de décès ; une fraction de durée de vie du dernier intervalle d'âge, la durée de vie après le dernier anniversaire d'un décédé.

Structure d'une table démographique : 1) probabilité de survie

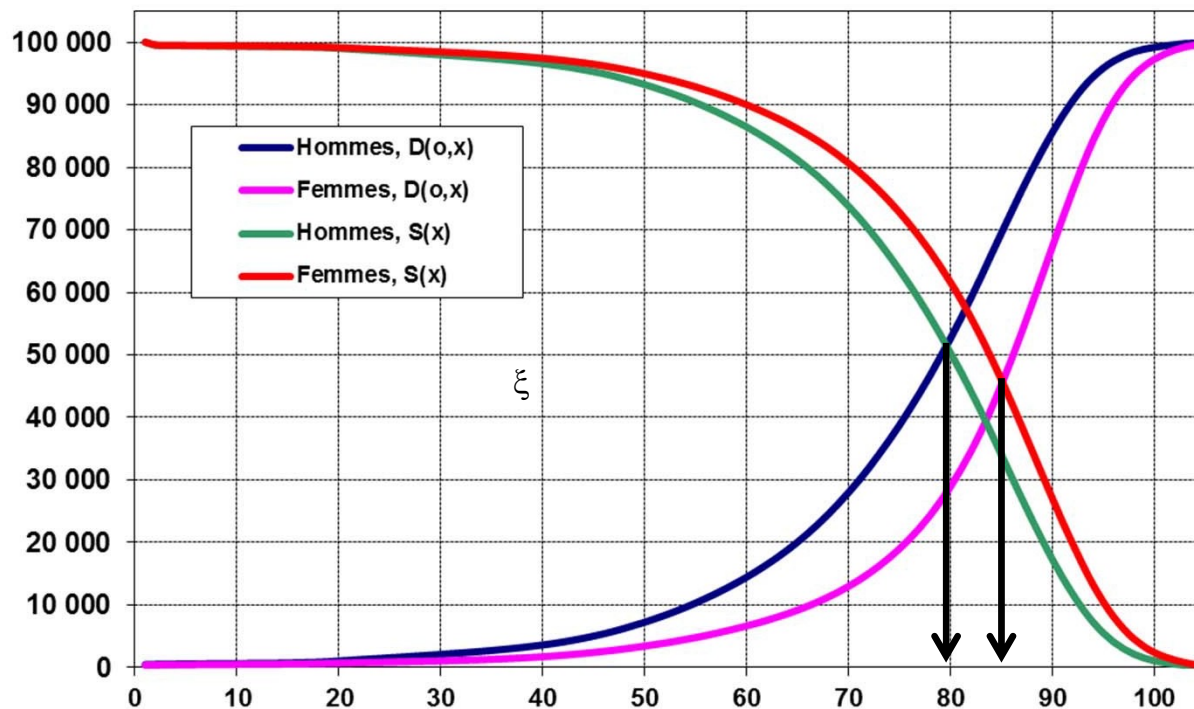
La racine de table: $S_0 = 10^{\mathbb{N}}$, avec $\mathbb{N} = 0, 1, 2, \dots, n$ – un nombre naturel)

Pour la meilleure visibilité on prend pour la racine 1 000, 10 000 ou 100 000

n – amplitude des classes d'âge peut varier de 1 à 5, 10, 15 etc.

Soit ${}_n p_x$ probabilité de survie sur l'intervalle d'âge $[x, x+n)$, alors $S_{x+n} = S_x \cdot {}_n p_x$ et en générale $S_x = S_0 \cdot \prod_{a=0}^{x-n} {}_n p_a$

**Probabilité de survivre et mourir par sexe dans la table de mortalité
(France, 2001-2002)**



$S_x \rightarrow$
le nombre de survivants jusqu'à l'âge exact x :

$D_x = 1 - S_x \rightarrow$
le nombre de décès survenu avant l'âge exact X :

On voit que $D_x + S_x = 1$ pour tout x
sinon $D_x + S_x = S_0$

Soit ${}_n d_x = S_{x+n} - S_x$: décès de table
 $\equiv$ le nombre de décès survenus
sur l'intervalle d'âge $x, x+n$

$$D_x := {}_x D_0 = \sum_{a=0}^x {}_n d_a$$

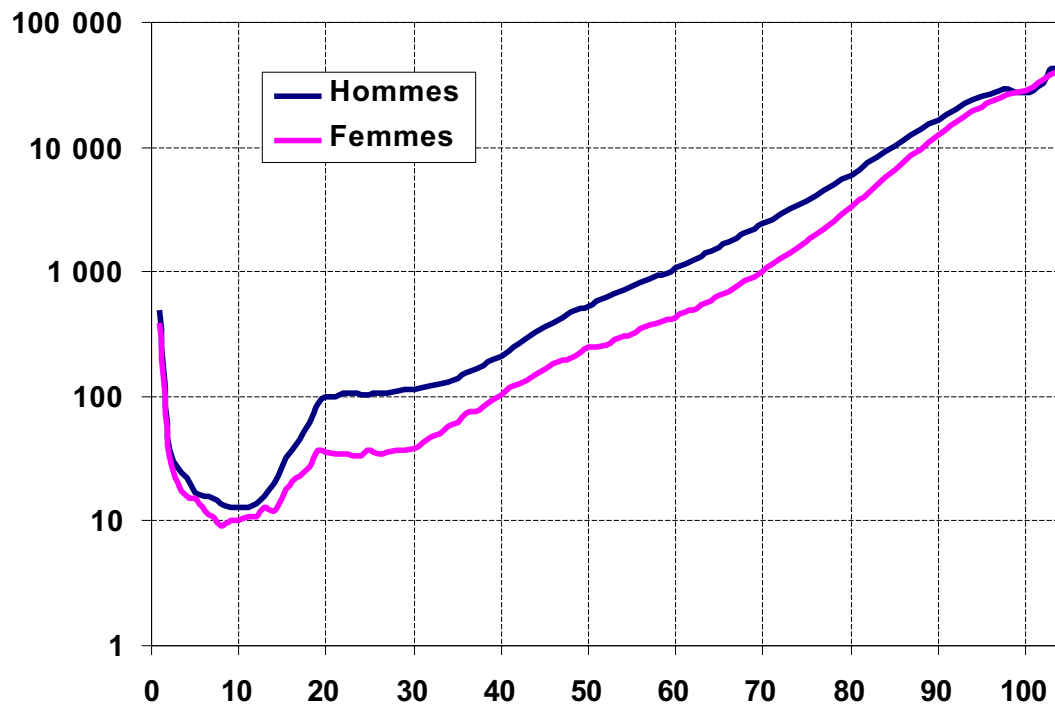
Structure d'une table démographique: 2) probabilité ou quotient de mortalité

Soit ${}_n p_x$ – la probabilité de survivre (de ne pas mourir) entre les âges exacts x et $x+n$ est complémentaire à la probabilité de mourir (quotient de mortalité ${}_n q_x$) sur cet intervalle :

$${}_n p_x = 1 - {}_n q_x \Rightarrow {}_n q_x = 1 - {}_n p_x \quad (1)$$

Probabilité de mourir par âge et par sexe dans la table de mortalité (France, 2001-2002)

sur papier semi logarithmique



Nota: un très grand facteur (x 1000) de la variation des indicateurs de la table de mortalité impose l'utilisation du papier semi-logarithmique pour la visualisation correcte

Soit $S_0 = 100\ 000$ (racine de table)

et $S_{x+n} = S_x \cdot {}_n p_x$ en y appliquant (1)

$$S_{x+n} = S_x (1 - {}_n q_x) \quad (2)$$



$${}_n q_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{S_x} = 1 - \frac{S_{x+n}}{S_x} \quad (3)$$

$${}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{S_x} \quad (4)$$

$${}_n p_x = \frac{S_{x+n}}{S_x} \quad (5)$$

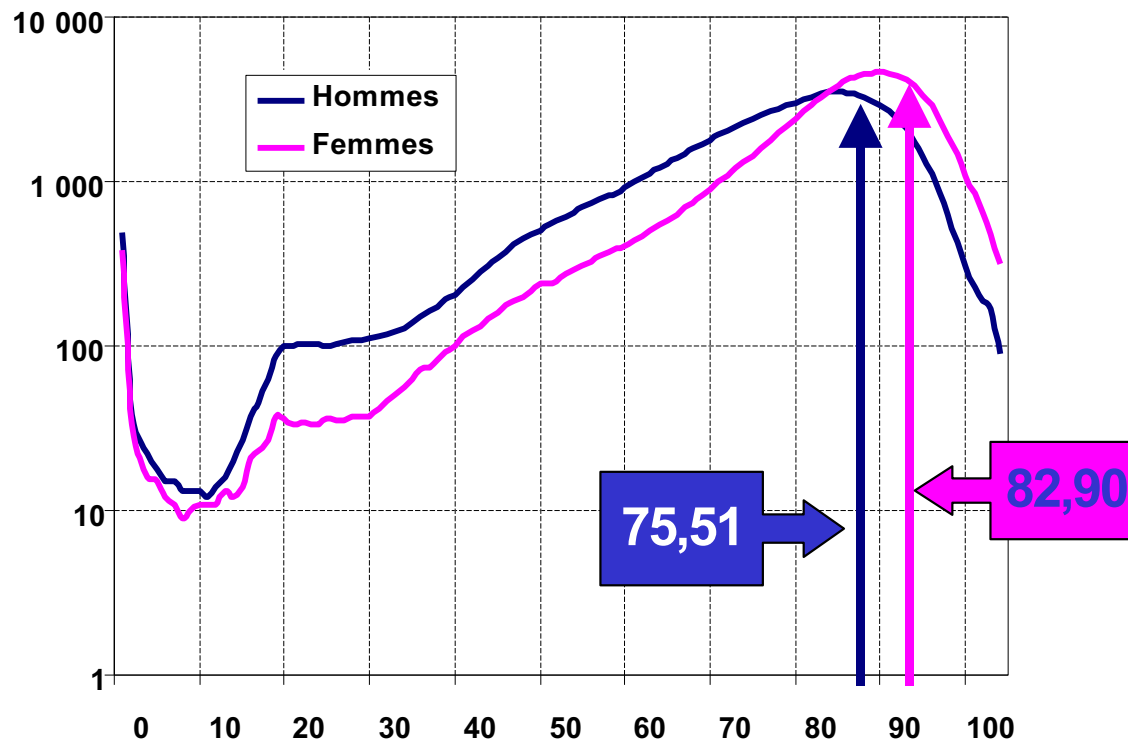
Structure d'une table démographique: 3) décès de table ou la fréquence de sorties

Décès de la table: le nombre de décès dans l'intervalle de l'âge entre x et $x+n$

$${}_n d_x = S_x - S_{x+n}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} {}_n d_x = (S_0 - \cancel{S_1}) + (\cancel{S_1} - \cancel{S_5}) + (\cancel{S_5} - S_{10}) + \dots + (S_{\omega-n} - \cancel{S_{\omega}}) = S_0$$

Décès par âge et par sexe dans la table de mortalité
(France, 2001-2002)
distribution tri-modale



Si on prend comme racine de la table $S_0 = 1$ alors on peut considérer qu'il existe une fonction d telle que
 ${}_n d_x$ = la probabilité pour un nouveau-né de décéder dans l'intervalle x et $x+n$

Eléments d'une table démographique à extinction simple (sans phénomène perturbateur)

x – l'âge exact (au moment du $x^{\text{ème}}$ anniversaire);

n – l'amplitude des intervalles d'âge (x) pour lesquels on calcule les indicateurs (« un pas » de table), elle peut être unique ou spécifique à l'âge (p.ex. si $n=1,4,5,5, \dots$) alors on peut indiquer l'amplitude spécifique à l'âge comme n_{age}
 $n = 1; n_{\text{age}} = 4; n_{\text{age}} = 5; n_{\text{age}} = 5; \text{etc} \dots$;

S_x – ($\equiv l(x)$ ou l_x) le nombre de survivants jusqu'à l'âge exact x ($x^{\text{ème}}$ anniversaire) ou « les survivants »;

${}_nq_x$ – le quotient de mortalité, ou la probabilité de mourir dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$ pour un survivant à l'âge x ;
 d'autres écritures possibles : $q[x, x + n)$ ou $q_{x,x+n}$;

${}_np_x$ – la probabilité de survivre (ne pas mourir) de l'âge x à l'âge $x+n$; d'autres écritures possibles : $p[x, x + n)$ ou $p_{x,x+n}$;

${}_nL_x$ – « la population de table » ou le nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$; d'autres écritures possibles : $L[x, x + n)$ ou $L_{x,x+n}$ = *la population exposée au risque de décès* ;

${}_nd_x$ – nombre de décès dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$ (« décès de table ») ou la probabilité pour un nouveau-né de décéder dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$; d'autres écritures possibles : $d[x, x + n)$ ou $d_{x,x+n}$

${}_nm_x$ – taux de mortalité dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$ ou le taux de mortalité de table; d'autres écritures possibles $m[x, x + n)$ ou $m_{x,x+n}$;

T_x – nombre d'années vécues après l'âge exact x ($x^{\text{ème}}$ anniversaire) = la population de table âgée de plus de x ans ;

e_x – espérance de vie (durée moyenne de vie) après l'âge exact x ($x^{\text{ème}}$ anniversaire); si $x=0$ on dit e_0 - espérance de vie à la naissance ;

${}_na_x$ – durée de vie moyenne dans le dernier intervalle d'âge $[x, x+n)$: i.e. l'intervalle d'âge de décès ; une fraction de durée de vie du dernier intervalle d'âge, la durée de vie après le dernier anniversaire d'un décédé.

Génération fictive et hypothèse de la stationnarité

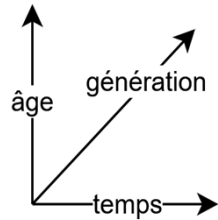
		2000	2001	2002	2003	2004	2005
5	91 300 200 400 200 91 700	91 300 200 400 200 91 700	91 300 200 400 200 91 700	91 300 200 400 200 91 700	91 300 200 400 200 91 700	91 300 200 400 200 91 700	91 300 200 400 200 91 700
4	91 900 200 400 200 92 100	91 900 200 400 200 92 100	91 900 200 400 200 92 100	91 900 200 400 200 92 100	91 900 200 400 200 92 100	91 900 200 400 200 92 100	91 900 200 400 200 92 100
3	92 300 200 400 200 92 500	92 300 200 400 200 92 500	92 300 200 400 200 92 500	92 300 200 400 200 92 500	92 300 200 400 200 92 500	92 300 200 400 200 92 500	92 300 200 400 200 92 500
2	92 750 250 750 500 93 250	92 750 250 750 500 93 250	92 750 250 750 500 93 250	92 750 250 750 500 93 250	92 750 250 750 500 93 250	92 750 250 750 500 93 250	92 750 250 750 500 93 250
1	94 000 750 1 750 1 000 95 000	94 000 750 1 750 1 000 95 000	94 000 750 1 750 1 000 95 000	94 000 750 1 750 1 000 95 000	94 000 750 1 750 1 000 95 000	94 000 750 1 750 1 000 95 000	94 000 750 1 750 1 000 95 000
0	97 000 2 000 5 000 3 000 100 000	97 000 2 000 5 000 3 000 100 000	97 000 2 000 5 000 3 000 100 000	97 000 2 000 5 000 3 000 100 000	97 000 2 000 5 000 3 000 100 000	97 000 2 000 5 000 3 000 100 000	97 000 2 000 5 000 3 000 100 000

Génération fictive et la notion/hypothèse de la stationnarité dans la table de mortalité (généralisation)

5	$d''(5)$ $d(5) \quad d'(5)$ $S5$	$d''(5)$ $d(5) \quad d'(5)$ $S5$	$d''(5)$ $d(5) \quad d'(5)$ $S5$	$d''(5)$ $d(5) \quad d'(5)$ $S5$	$d''(5)$ $d(5) \quad d'(5)$ $S5$	$d''(5)$ $d(5) \quad d'(5)$ $S5$
4	$d''(4)$ $d(4) \quad d'(4)$ $S4$	$d''(4)$ $d(4) \quad d'(4)$ $S4$	$d''(4)$ $d(4) \quad d'(4)$ $S4$	$d''(4)$ $d(4) \quad d'(4)$ $S4$	$d''(4)$ $d(4) \quad d'(4)$ $S4$	$d''(4)$ $d(4) \quad d'(4)$ $S4$
3	$d''(3)$ $d(3) \quad d'(3)$ $S3$	$d''(3)$ $d(3) \quad d'(3)$ $S3$	$d''(3)$ $d(3) \quad d'(3)$ $S3$	$d''(3)$ $d(3) \quad d'(3)$ $S3$	$d''(3)$ $d(3) \quad d'(3)$ $S3$	$d''(3)$ $d(3) \quad d'(3)$ $S3$
2	$d''(2)$ $d(2) \quad d'(2)$ $S2$	$d''(2)$ $d(2) \quad d'(2)$ $S2$	$d''(2)$ $d(2) \quad d'(2)$ $S2$	$d''(2)$ $d(2) \quad d'(2)$ $S2$	$d''(2)$ $d(2) \quad d'(2)$ $S2$	$d''(2)$ $d(2) \quad d'(2)$ $S2$
1	$d''(1)$ $d(1) \quad d'(1)$ $S1$	$d''(1)$ $d(1) \quad d'(1)$ $S1$	$d''(1)$ $d(1) \quad d'(1)$ $S1$	$d''(1)$ $d(1) \quad d'(1)$ $S1$	$d''(1)$ $d(1) \quad d'(1)$ $S1$	$d''(1)$ $d(1) \quad d'(1)$ $S1$
0	$d''(0)$ $d(0) \quad d'(0)$ $S0$	$d''(0)$ $d(0) \quad d'(0)$ $S0$	$d''(0)$ $d(0) \quad d'(0)$ $S0$	$d''(0)$ $d(0) \quad d'(0)$ $S0$	$d''(0)$ $d(0) \quad d'(0)$ $S0$	$d''(0)$ $d(0) \quad d'(0)$ $S0$

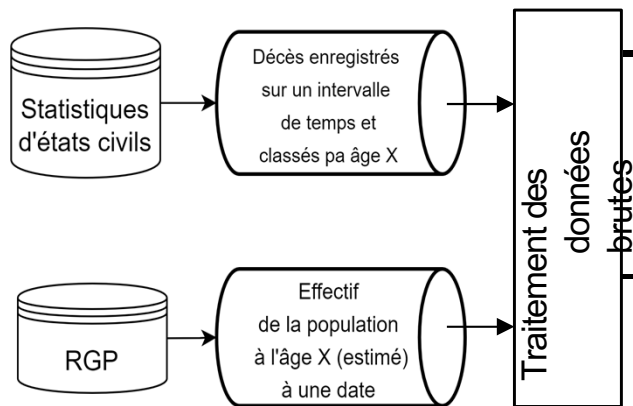
Table de mortalité pour une période (génération fictive)

Les approches et les hypothèses :

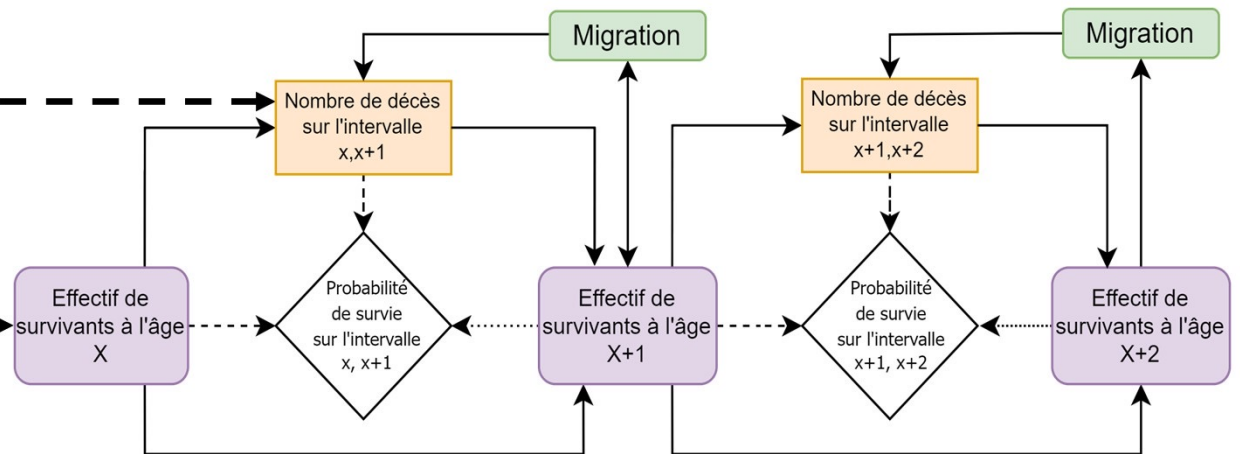


- sur les intervalles de temps courts, la variation des paramètres de la mortalité associés à la période est moins importante (voire négligeable) que la variation associée à l'âge et à l'année de naissance des générations ;
- la densité de la probabilité (risque) de décès sur un intervalle d'âge assez court peut être considérée comme étant linéaire (tendance centrale = taux de mortalité) ;
- la distribution des décès sur l'intervalle d'âge assez court peut être considérée comme étant uniforme

Sources de l'information



Événements perturbateurs (migration)



Entamer la construction d'une table de mortalité (trouver indicateur d'entrée)

Soit P_x – effectif de la population, et D_x – le nombre de décès à l'âge x **révolu** dans une population (supposée stationnaire) ; alors on estime la probabilité de mourir ${}_nq_x$, ou probabilité de survivre ${}_np_x$ sur l'intervalle d'âge $[x, x+n)$ dans une population fermée (sans migration)

D'après l'hypothèse de la stationnarité les configurations **ABCD** et **ABDE** sont équivalentes.

$${}_nq_x = 1 - {}_np_x = 1 - \left(1 - \frac{D_x}{S_{x,t}} \right) \left(1 - \frac{D'_x}{P_{x,t}} \right)$$

$${}_np_x = \left(1 - \frac{D'_{x,t}}{P_{x,t+1} + D_{x,t}} \right) \left(1 - \frac{D''_{x,t}}{P_{x,t}} \right)$$

Puisque selon l'hypothèse de stationnarité les probabilités dans les triangles BDC et ADE sont identiques :

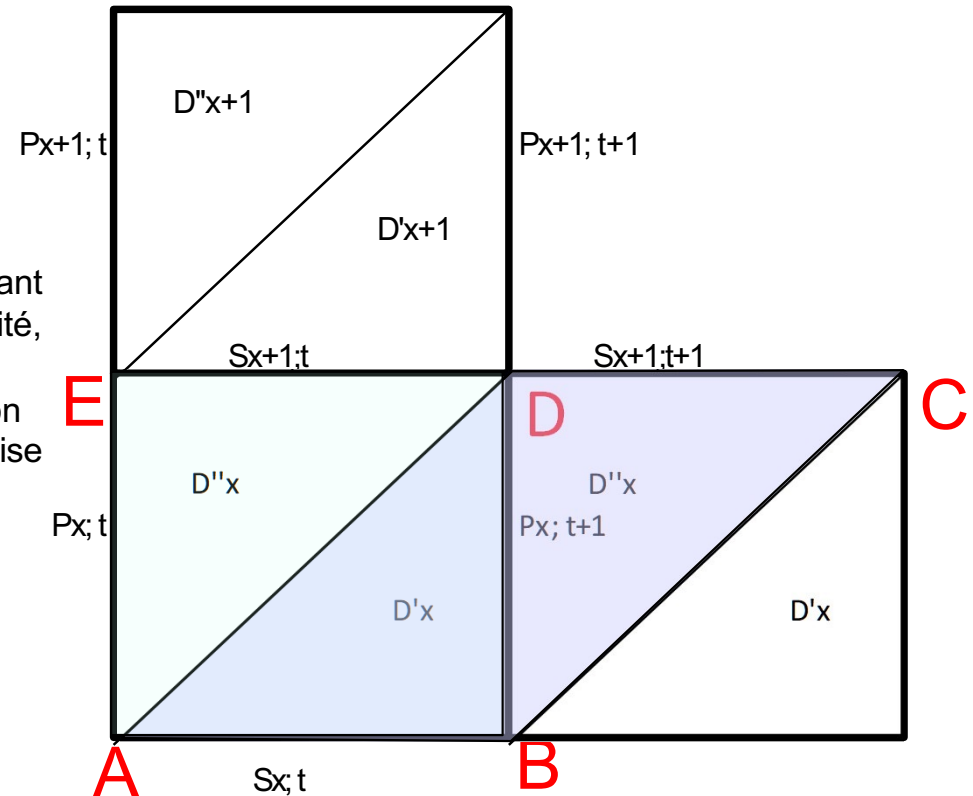
$${}_np_x = \left(\frac{P_{x,t+1}}{P_{x,t+1} + D_{x,t}} \right) \left(\frac{P_{x,t} - D_{x,t}}{P_{x,t}} \right)$$

(cf. l'hypothèse de la stationnarité, permettant de calculer la probabilité, qui n'est pas la même chose que la proportion de survivants; on n'utilise pas P_{x+1} dans ces calculs)

$$\text{Soit } D'_x = D''_x = 0.5 \cdot {}_nD_x$$

→ hypothèse pour les âges adultes, si la répartition des décès entre les triangles est inconnue

$${}_np_x = \frac{P_{x,t+1}}{P_{x,t+1} + 0,5 \cdot D_{x,t}} \cdot \frac{P_{x,t} - 0,5 \cdot D_{x,t}}{P_{x,t}}$$



Pour préciser la distribution des décès entre les triangles il faut appliquer un facteur de séparation (voir la mortalité infantile)

Données de mortalité (INSEE)

Pyramide des âges au 1er janvier 2014, France métropolitaine

Mis à jour : janvier 2016

Champ : France métropolitaine

Source : Insee, estimations de population (résultats provisoires à fin 2015)

Année de naissance	Âge révolu	Nombre d'hommes	Nombre de femmes	Ensemble
2013	0	385 670	367 577	753 247
2012	1	390 569	370 608	761 177
2011	2	392 386	376 860	769 246

Pyramide des âges au 1er janvier 2015, France métropolitaine

Mis à jour : janvier 2016

Champ : France métropolitaine

Source : Insee, estimations de population (résultats provisoires à fin 2015)

Année de naissance	Âge révolu	Nombre d'hommes	Nombre de femmes	Ensemble
2014	0	384 840	368 054	752 894
2013	1	387 297	368 557	755 854
2012	2	391 851	372 349	764 200
2011	3	395 768	379 472	775 240
2010	4	408 248	388 768	797 016

T73 : Décès selon le sexe, l'âge en années révolues et la survenance du décès avant ou après l'anniversaire de naissance. Année 2014

CHAMP : France métropolitaine

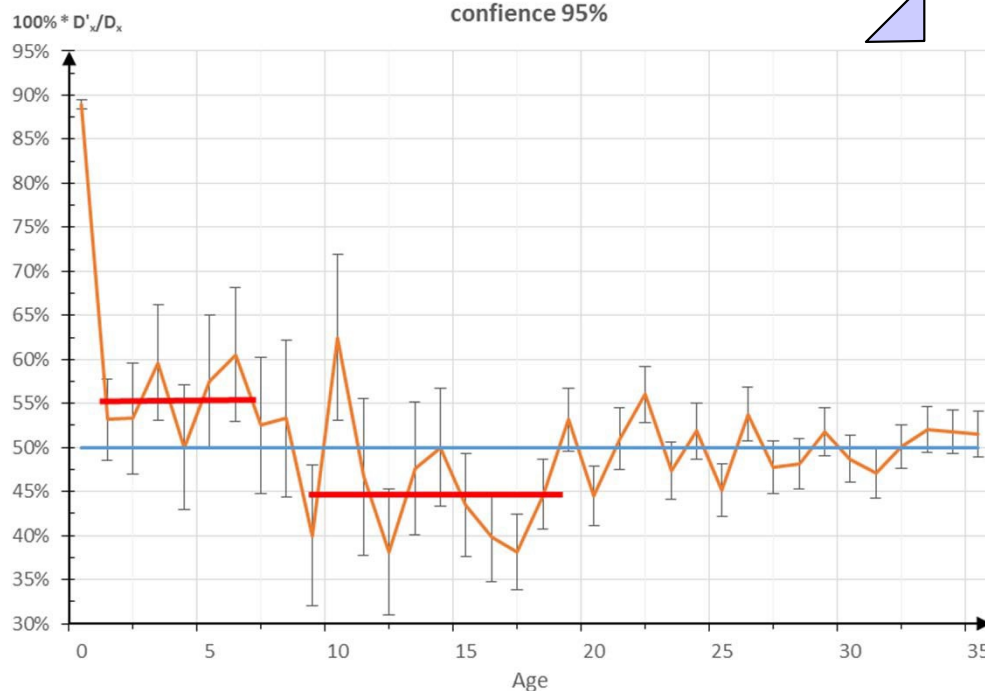
SEXE	Ensemble			Hommes			Femmes		
Décès avant ou après anniversaire	Ensemble	Décès avant anniversaire	Décès le jour ou après anniversaire	Ensemble	Décès avant anniversaire	Décès le jour ou après anniversaire	Ensemble	Décès avant anniversaire	Décès le jour ou après anniversaire
Âge en années révolues									
0 an	2 598	315	2 283	1 446	159	1 287	1 152	156	996
1 an	209	99	110	111	52	59	98	47	51
2 ans	123	57	66	60	28	32	63	29	34
3 ans	86	35	51	52	21	31	34	14	20
4 ans	73	36	37	48	24	24	25	12	13

Calculs de la durée de vie des enfants décédés avant le 1^{er} anniversaire

Source : INSEE (T77 : Décès d'enfants de moins d'un an selon le sexe et la

	Filles	Garçons	Total	durée de vie
Ensemble des moins d'un an	1152	1446	2598 (jours)	
Nés l'année précédente	156	159	315	
Nés la même année	996	1287	2283	
0 jour	317	361	678	0.5
1 jour	73	84	157	1.5
2 jours	49	64	113	2.5
3 jours	42	55	97	3.5
4 jours	30	42	72	4.5
5 jours	24	49	73	5.5
6 jours	28	45	73	6.5
7 à 13 jours	115	163	278	10
14 à 20 jours	58	94	152	17
21 à 27 jours	42	63	105	24
28 à 60 jours	110	147	257	44
61 à 90 jours	60	52	112	75
91 à 120 jours	46	59	105	105
121 à 150 jours	30	43	73	135
151 à 180 jours	18	41	59	165
181 à 210 jours	34	21	55	195
211 à 240 jours	23	17	40	225
241 à 270 jours	19	16	35	255
271 à 301 jours	13	13	26	285
302 à 332 jours	16	11	27	315
333 à 365 jours	5	6	11	345
D'	86%	89%	88%	
D''	14%	11%	12%	
1a0 (jours)	35.376	29.718	32.227	

Proportion de décès entre l'anniversaire et le 1 janvier (D'x) et l'intervalle de confiance 95%



Espérance de vie : durée de vie moyenne

<https://www.ined.fr/fr/tout-savoir-population/jeux/l-esperance-de-vie/>

Logique de calcul de l'Espérance de vie

Tableau 1 : *Table de mortalité des années 2009-2011 en France métropolitaine (extraits)*

Âge x	Sexe masculin			Sexe féminin			Ensemble		
	S_x (*)	Q_x (**)	E_x (***)	S_x (*)	Q_x (**)	E_x (***)	S_x (*)	Q_x (**)	E_x (***)
0	100 000	384	78,09	100 000	319	84,71	100 000	352	81,32
1	99 616	30	77,39	99 681	28	83,98	99 648	29	80,61
2	99 586	19	76,41	99 653	16	83,01	99 619	18	79,63
3	99 566	15	75,42	99 637	11	82,02	99 601	13	78,64
4	99 552	11	74,44	99 626	8	81,03	99 588	10	77,65
5	99 541	11	73,44	99 618	8	80,03	99 578	10	76,66
6	99 530	12	72,45	99 610	8	79,04	99 569	10	75,67
7	99 518	9	71,46	99 601	7	78,05	99 559	8	74,68
8	99 509	9	70,47	99 594	8	77,05	99 551	8	73,68
....									
60	87 947	1 035	22,44	94 179	442	27,15	90 988	735	24,82
61	87 037	1 094	21,67	93 763	462	26,27	90 319	774	24,00
62	86 085	1 141	20,90	93 330	501	25,39	89 620	816	23,18
63	85 103	1 224	20,14	92 862	539	24,51	88 890	874	22,37
64	84 061	1 313	19,38	92 362	575	23,64	88 112	935	21,56
65	82 958	1 432	18,63	91 831	621	22,78	87 288	1 016	20,76
....									

Source : Insee

- (*) S_x : survivants à l'âge x ,
- (**) Q_x : quotients de mortalité pour 100 000 survivants à l'âge x ,
- (***) E_x : espérance de vie à l'âge x .

Exemple simplifié : Combien d'années reste-t-il à vivre à chaque âge ?

Tableau 2 : Table de mortalité du moment d'une population imaginaire

Age x	Q_x quotient de mortalité à l'âge x	S_x nombre de survivants à l'âge x	D_x nombre de décès à l'âge x	E_x espérance de vie à l'âge x
0	0,100	100	10	6,91
1	0,011	90	1	6,62
2	0,022	89	2	5,69
3	0,034	87	3	4,81
4	0,036	84	3	3,96
5	0,062	81	5	3,09
6	0,145	76	11	2,26
7	0,277	65	18	1,56
8	0,574	47	27	0,97
9	0,900	20	18	0,60
10	1,000	2	2	0,50
11		0		
			$\Sigma = 100$	

En faisant l'hypothèse d'uniformité de la distribution des décès entre l'âge x et l'âge $x + 1$, un individu mourant à 0 an vit en moyenne 0,5 an, un individu mourant à 7 ans vit en moyenne 7,5 ans. La durée moyenne de vie probable des individus de cette génération fictive, i.e. l'espérance de vie à la naissance de cette génération, notée E_0 , est donc:

$$E_0 = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} D_x (x+0,5)}{\sum_{x=0}^{x=\omega} D_x} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} D_x x}{\sum_{x=0}^{x=\omega} D_x} + 0,5 = 6,91 \text{ ans}$$

Calcul de l'Espérance de vie à partir de la table de mortalité

1. Calcul la population par âge dérivée de la table : effectif moyen vivant dans l'intervalle (« population de la table »)

${}_nL_x$ = la population de table ou *le nombre d'années-personnes vécues à l'âge x* (entre l'âge x et $x + n$) par les survivants S_x (jusqu'à X^e anniversaire)

${}_nL_x$ est donc composé de :

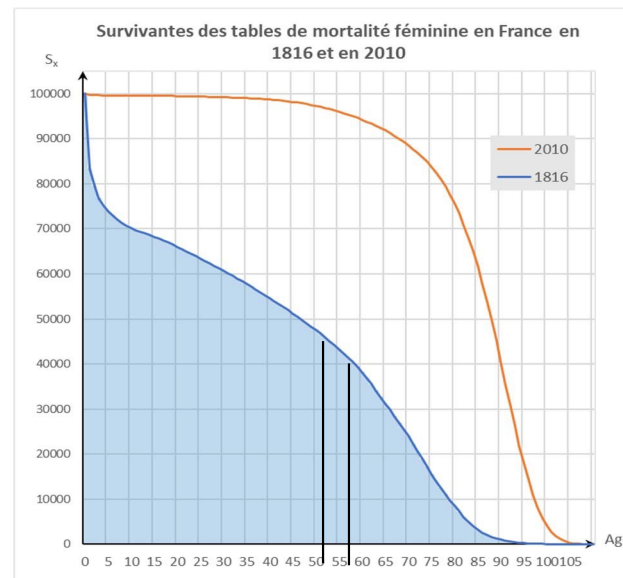
- $(S_{x+n} \cdot n)$ années vécues par survivants à l'âge suivant $x + n$
- $({}_nd_x \cdot {}_na_x)$ années vécues par les décédés sur cet intervalle d'âge : ${}_na_x$ étant la durée moyenne de vie dans le dernier intervalle d'âge

$${}_nL_x = n \cdot S_{x+n} + {}_nd_x \cdot {}_na_x$$

Méthode de trapèze (historique): en mettant ${}_na_x = \frac{n}{2}$

on obtient :
$${}_nL_x = n \cdot \frac{S_x + S_{x+n}}{2}$$

Surface correspondant au nombre d'années vécues



Calcul de l'Espérance de Vie = durée de vie moyenne restant à vivre

Première étape :

Calcul du total des années personnes restant à vivre à partir de l'âge x

(On le calcule en remontant la table, à partir de la dernière classe d'âge)

On calcule la série T_x : le nombre d'années vécues après l'âge x :

$$T_x = \sum_n L_x$$

Deuxième étape :

Calcul de la durée de vie moyenne à chaque âge

La durée moyenne de vie pour S_x - les survivants à l'âge x :

$$e_x = \frac{T_x}{S_x}$$

Par conséquent la durée moyenne de vie sur l'intervalle d'âge 0, +∞

l'espérance de vie à la naissance e_0 se calcule :
$$e_0 = \frac{\sum_{x=0}^{\infty} L_x}{S_0} = \frac{T_0}{S_0}$$

L'espérance de vie à chaque âge dans la table démographique

- e_0 est l'espérance de vie à l'âge **0** (ou au moment initial t_0)
- e_λ est l'espérance de vie à l'âge « λ » $\omega - n$

$$e_\lambda = \frac{T_\omega + \sum_{x=\lambda} L_x}{S_\lambda}$$

- $e_{x/\lambda}$ est l'espérance de vie à la naissance sous condition de survie à l'âge « λ »:

$$e_{\lambda|0} = \frac{\sum_{x=\lambda}^{\omega} (x + {}_n a_x) {}_n d_x}{\sum_{x=\lambda}^{\omega} {}_n d_x} + \lambda$$

- $e_{\alpha,\beta}$ la durée moyenne de vie dans un intervalle d'âge (α, β) : $e_{\alpha,\beta} = \frac{\sum_{x=\alpha}^{\beta-n} {}_n L_x}{S_\alpha}$

Rappel : Eléments d'une table démographique à extinction simple

- x – l'âge exact (au moment du $x^{\text{ème}}$ anniversaire);
- n – l'amplitude des intervalles d'âge (x) pour lesquels on calcule les indicateurs (« un pas » de table), elle peut être unique ou spécifique à l'âge (p.ex. si $n=1,4,5,5, \dots$) alors on peut indiquer l'amplitude spécifique à l'âge comme n_x
 $n_x = 1; n_{4x} = 4; n_{5x} = 5; n_{5x} = 5; \text{ etc } \dots$;
- S_x – ($\equiv l(x)$ ou l_x) le nombre de survivants jusqu'à l'âge exact x ($x^{\text{ème}}$ anniversaire) ou « les survivants »;
- ${}_nq_x$ – le quotient de mortalité, ou la probabilité de mourir dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$ pour un survivant à l'âge x ;
d'autres écritures possibles : $q[x, x + n)$ ou $q_{x,x+n}$;
- ${}_np_x$ – la probabilité de survivre (ne pas mourir) de l'âge x à l'âge $x+n$; d'autres écritures possibles : $p[x, x + n)$ ou $p_{x,x+n}$;
- ${}_nL_x$ – « la population de table » ou le nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$; d'autres écritures possibles : $L[x, x + n)$ ou $L_{x,x+n}$ = *la population exposée au risque de décès* ;
- ${}_nd_x$ – nombre de décès dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$ (« décès de table ») ou la probabilité pour un nouveau-né de décéder dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$; d'autres écritures possibles : $d[x, x + n)$ ou $d_{x,x+n}$
- ${}_nm_x$ – taux de mortalité dans l'intervalle d'âge entre x et $x+n$ ou le taux de mortalité de table; d'autres écritures possibles $m[x, x + n)$ ou $m_{x,x+n}$;
- T_x – nombre d'années vécues après l'âge exact x ($x^{\text{ème}}$ anniversaire) = la population de table âgée de plus de x ans ;
- e_x – espérance de vie (durée moyenne de vie) après l'âge exact x ($x^{\text{ème}}$ anniversaire); si $x=0$ on dit e_0 - espérance de vie à la naissance ;
- ${}_na_x$ – durée de vie moyenne dans le dernier intervalle d'âge $[x, x+n)$: i.e. l'intervalle d'âge de décès ; une fraction de durée de vie du dernier intervalle d'âge, la durée de vie après le dernier anniversaire d'un décédé.

Méthodes et hypothèses d'estimation ${}_nq_x$ pour construire une table abrégée de la mortalité

1. Observation directe : si les données individuelles sur l'âge exacte au décès sont disponibles (une situation rare), on peut en facilement déduire ${}_na_x$ à partir des dates exactes de naissance et de décès de chaque individu (s'il s'agit d'observation des décès et de survie, on estime directement S_x)

2. Tables empiriques (ou presque) et formule de **Reed et Merrell** établies à partir des tables de mortalité complètes des États-Unis pour 1910, 1920 et 1930 : ${}_nq_x = 1 - \exp(-n \cdot {}_nm_x - 0,008 \cdot n^3 \cdot {}_nm_x)$ en y ajoutant un « dispositif de freinage » (cf. L. J. Reed et M. Merrell : « A short method for constructing an abridged life table » // *The American Journal of Hygiene*, vol. 30, n° 2, sept. 1939, p.33-62; reprinted p.43-51, dans D.Smith and N.Keifitz, eds., *Mathematical Demography*, NY, Springer Verlag, 1977).

3. A partir de l'hypothèse de **Greville** sur le **rapport log-linéaire** entre ${}_nm_x$ et l'âge (x) conformément à la loi de Gompertz pour les âges de plus de 30 ans (cf. Greville, 1943, voir Thème "Tables multiples" diapositive n°27)

$$\rightarrow {}_nq_x = \frac{{}_nm_x}{1 - {}_nm_x \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{n}{12} ({}_nm_x - \ln c) \right]}$$

4. A partir de l'hypothèse de **Keyfitz** que la distribution de décès de table sur l'intervalle d'âge entre $x - n$ et $x + n$ suit **la loi polynomiale de 2^d degré**

$d(x) = A + Bx + Cx^2$ d'où peut-on déduire une formule suivant pour ${}_na_x$

(cf N.Keyfitz « A Life Table that Agrees with Data », // *Journal of American Statistical Association*, 1966, vol. 61, n° 314, p.305-312

En fait c'est une modification d'une méthode proposée par W. Bortkiewicz en 1890 pour ajustement de ${}_nL_x$)

$$\rightarrow {}_nq_x = \frac{-\frac{n}{24} \cdot {}_nd_{x-5} + \frac{n}{2} \cdot {}_nd_x + \frac{n}{24} \cdot {}_nd_{x+5}}{{}_nd_x}$$

5. A partir de l'hypothèse de **Keyfitz et Frauenthal** sur la linéarité de la distribution de ${}_nm_x$ entre les âges $x - n$ et $x + 2n$:

$${}_np_x = \exp \left[-n \cdot M_x - \frac{n}{48 \cdot N_x} \left({}_nN_{x-n} - {}_nN_{x+n} \right) \left(M_{x-n} - M_{x+n} \right) \right]$$

${}_nM_x$ – taux observés
 ${}_nN_x$ – population âgée de x à $x + n$

(Keifitz N., J.Frauenthal, «An Improved Life Table Method», // *Biometrics*, 1975, vol.31, no 4, p.889-899.

6. Sinon on peut toujours imaginer que ${}_na_x = 0,5 \cdot n$ ou se passer de ${}_na_x$ en faisant le recours à l'hypothèse exponentielle ${}_nq_x = 1 - {}_np_x = 1 - e^{-n \cdot {}_nm_x}$, bien que cette approche comporte implicitement une estimation pour ${}_na_x$ qui est systématiquement inférieure à $n/2$:

$${}_na_x = n + \frac{1}{{}_nm_x} - \frac{n}{{}_nq_x} = n + \frac{1}{{}_nm_x} - \frac{n}{1 - e^{-n \cdot {}_nm_x}} < \frac{n}{2}$$

Calcul de la mortalité dans la première classe d'âge

Si à partir des données individuelles il n'est pas possible de calculer le taux de mortalité infantile et le taux mortalité des enfants à l'âge 1-4 ans, il faut trouver ⁿune solution plausible pour estimer la durée de vie des enfants décédés à ces âges.

Il est évident que sur ces intervalles l'hypothèse ${}_n a_x = {}_2$ n'est pas admissible.

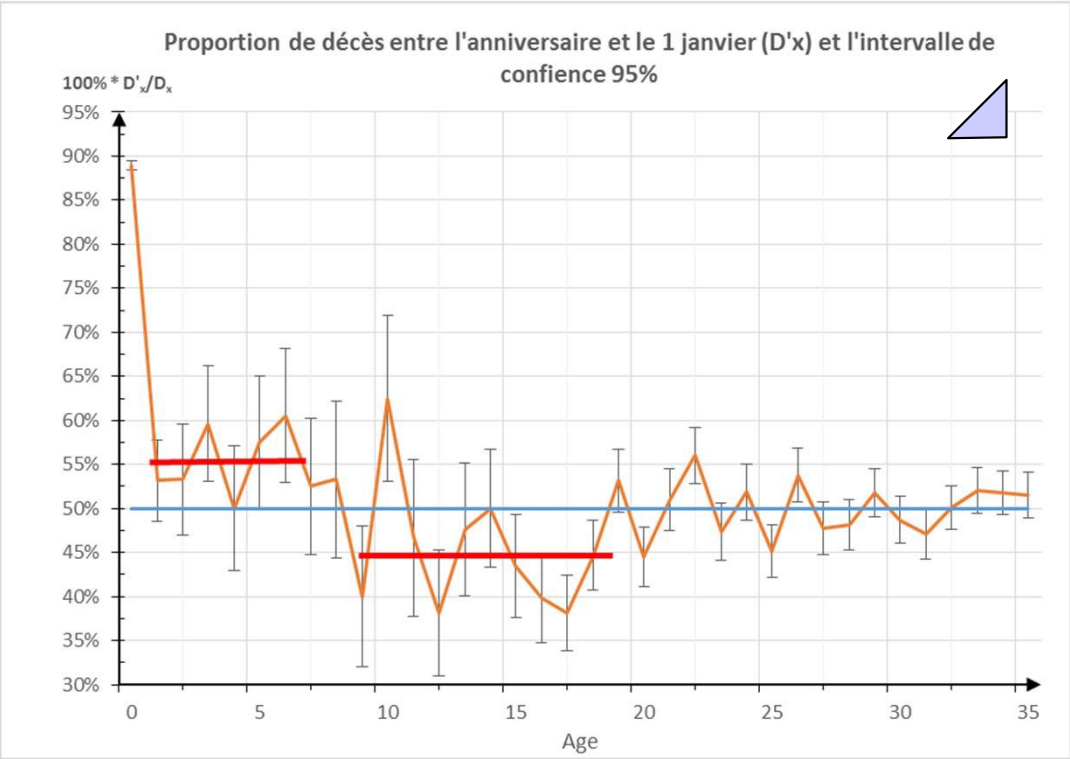
le ${}_n a_x$ dépend du niveau de la mortalité infantile (${}_1 m_0$ et ${}_4 m_1$), plus celles-ci sont faibles, plus les décès sont concentrés au début de l'intervalle d'âge

Si les données empiriques manquent pour calculer directement ${}_1 a_0$ et ${}_4 a_1$, Preston et al. (2001, p.48) proposent les estimer avec les régressions sur le niveau de la mortalité infantile

	Garçons	Filles
${}_1 m_0 \geq 0,107$	${}_1 a_0 = 0,330$	${}_1 a_0 = 0,350$
	${}_4 a_1 = 1,352$	${}_4 a_1 = 1,361$
${}_1 m_0 < 0,107$	${}_1 a_0 = 0,045 + 2,684 \cdot {}_1 m_0$	${}_1 a_0 = 0,053 + 2,800 \cdot {}_1 m_0$
	${}_4 a_1 = 1,651 - 2,861 \cdot {}_1 m_0$	${}_4 a_1 = 1,52 - 1,518 \cdot {}_1 m_0$

Données de mortalité infantile (INSEE)

Calculs de la durée de vie des enfants décédés avant le 1^{er} anniversaire



Source : INSEE (T77 : Décès d'enfants de moins d'un an selon le sexe et la

	Filles	Garçons	Total	durée de vie
ensemble des moins d'un an	1152	1446	2598	(jours)
Nés l'année précédente	156	159	315	
Nés la même année	996	1287	2283	
0 jour	317	361	678	0.5
1 jour	73	84	157	1.5
2 jours	49	64	113	2.5
3 jours	42	55	97	3.5
4 jours	30	42	72	4.5
5 jours	24	49	73	5.5
6 jours	28	45	73	6.5
7 à 13 jours	115	163	278	10
14 à 20 jours	58	94	152	17
21 à 27 jours	42	63	105	24
28 à 60 jours	110	147	257	44
61 à 90 jours	60	52	112	75
91 à 120 jours	46	59	105	105
121 à 150 jours	30	43	73	135
151 à 180 jours	18	41	59	165
181 à 210 jours	34	21	55	195
211 à 240 jours	23	17	40	225
241 à 270 jours	19	16	35	255
271 à 301 jours	13	13	26	285
302 à 332 jours	16	11	27	315
333 à 365 jours	5	6	11	345
D'	86%	89%	88%	
D''	14%	11%	12%	
1a0 (jours)	35.376	29.718	32.227	

Calcul pour la dernière classe d'âge de la table de mortalité

L'approche général ne convient non plus pour l'intervalle terminal ($x = \omega$) de la TM dans laquelle ${}_{\infty}p_{\omega} = 0 \Rightarrow {}_{\infty}q_{\omega} = 1$;

Pour résoudre ce problème on suppose que ${}_{\infty}M_{\omega}$, le taux de mortalité observé (calculé à partir des données brutes) est égal à ${}_{\infty}m_{\omega}$, le taux de mortalité de table :

$${}_nM_x = {}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} \quad \text{si } n = \infty \text{ et } x = \omega \rightarrow {}_{\infty}m_{\omega} = \frac{{}_{\infty}d_{\omega}}{{}_{\infty}L_{\omega}} \rightarrow {}_{\infty}L_{\omega} = \frac{{}_{\infty}d_x}{{}_{\infty}M_x} = T_{\omega}$$

Le nombre de décès dans l'intervalle terminal est égal au nombre de survivants à l'âge ω (début de l'intervalle terminal), $\Rightarrow {}_{\infty}d_{\omega} = S_{\omega}$;

$${}_{\infty}L_{\omega} = \frac{S_{\omega}}{{}_{\infty}M_{\omega}}$$

où ${}_{\infty}M_{\omega}$ – le taux (centré) de mortalité observée et S_{ω} – provient de la table de mortalité

Sinon, sachant que la durée d'attente d'un événement est inverse à sa probabilité, on peut déduire que

$$e_{\omega} = \frac{1}{{}_{\infty}M_{\omega}} \rightarrow {}_{\infty}L_n = e_{\omega} \times S_{\omega}$$

Construction directe de la table (1)

- Données : 1) Population par âge et par sexe au 1 janvier de deux années consécutives
 2) Décès par âge et par sexe (répartis entre les triangles, sinon → hypothèse sur la répartition)
 3) Décès des enfants de < 1 an répartis par sexe et par durée de vie (sinon → modèle)

$${}_n p_x = \left(\frac{P_{x,t+1}}{P_{x,t+1} + D_{x,t}} \right) \left(\frac{P_{x,t} - D_{x,t}}{P_{x,t}} \right)$$

Calculs : ${}_n p_x \rightarrow S_x \rightarrow {}_n d_x$ etc... $\rightarrow e_x$

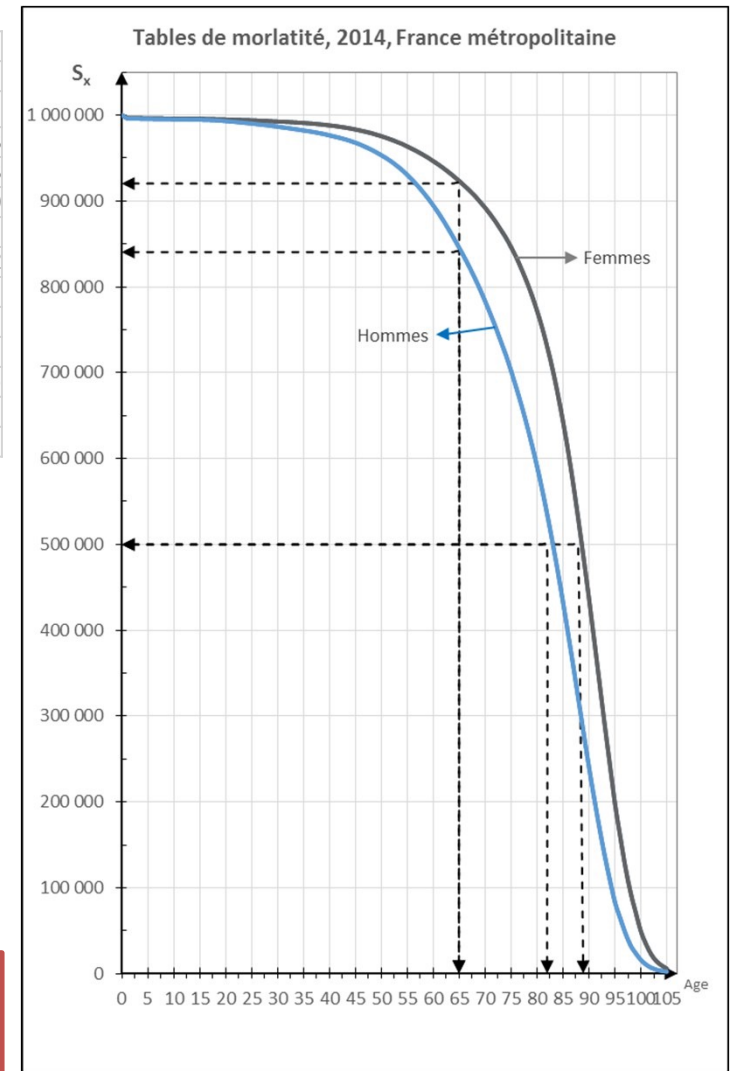
Nota: toujours la racine de table,
 $S_0 = \text{Un multiple de } 10$

France (métré) 2014													
	Hommes	Hommes	Homme	Homme	Homme	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes
Age	Pop 1.1.14	Pop 1.1.15	D'	D''	${}_1 p_x$	S_x	${}_1 q_x$	${}_1 d_x$	${}_1 a_x$	${}_1 L_x$	${}_1 m_x$	T_x	e_x
0	385670	384840	1287	159	0.9963	1 000 000	0.003744	3744	0.125	996724	0.003756	79 278 436	79.28
1	390569	387297	59	52	0.9997	996256	0.00028543	284	0.5	996114	0.000285	78 281 712	78.58
2	392386	391851	32	28	0.9998	995972	0.00015301	152	0.5	995895	0.000153	77 285 598	77.60
3	404210	395768	31	21	0.9999	995819	0.00013027	130	0.5	995754	0.000130	76 289 703	76.61
4	404007	408248	24	24	0.9999	995690	0.00011819	118	0.5	995631	0.000118	75 293 948	75.62
5	406201	407031	23	17	0.9999	995572	9.8352E-05	98	0.5	995523	0.000098	74 298 318	74.63
6	404561	409135	23	15	0.9999	995474	9.3288E-05	93	0.5	995427	0.000093	73 302 795	73.64
7	411728	406590	21	19	0.9999	995381	9.7791E-05	97	0.5	995332	0.000098	72 307 367	72.64
8	403602	414271	16	14	0.9999	995284	7.3307E-05	73	0.5	995247	0.000073	71 312 035	71.65
9	401499	405865	14	21	0.9999	995211	8.6795E-05	86	0.5	995168	0.000087	70 316 788	70.66
10	399857	403488	15	9	0.9999	995124	5.9682E-05	59	0.5	995095	0.000060	69 321 620	69.66

France (métré) 2014													
	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes
Age	Pop 1.1.14	Pop 1.1.15	D'	D''	${}_1 p_x$	S_x	${}_1 q_x$	${}_1 d_x$	${}_1 a_x$	${}_1 L_x$	${}_1 m_x$	T_x	e_x
0	367577	368054	996	156	0.9969	1 000 000	0.00312208	3122	0.110	997221	0.003131	85 413 459	85.41
1	370608	368557	51	47	0.9997	996878	0.00026516	264	0.5	996746	0.000265	84 416 237	84.68
2	376860	372349	34	29	0.9998	996614	0.00016825	168	0.5	996530	0.000168	83 419 492	83.70
3	385558	379472	20	14	0.9999	996446	8.9011E-05	89	0.5	996402	0.000089	82 422 962	82.72
4	384777	388768	13	12	0.9999	996357	6.4624E-05	64	0.5	996325	0.000065	81 426 560	81.72
5	387207	387075	16	11	0.9999	996293	6.9741E-05	69	0.5	996258	0.000070	80 430 235	80.73
6	386264	389969	11	17	0.9999	996223	7.2217E-05	72	0.5	996187	0.000072	79 433 977	79.74
7	392717	388572	11	15	0.9999	996151	6.6502E-05	66	0.5	996118	0.000067	78 437 790	78.74
8	384837	394839	21	12	0.9999	996085	8.4364E-05	84	0.5	996043	0.000084	77 441 672	77.75
9	383154	386613	11	15	0.9999	996001	6.7599E-05	67	0.5	995967	0.000068	76 445 628	76.75
10	381395	385135	9	14	0.9999	995934	6.0074E-05	60	0.5	995904	0.000060	75 449 661	75.76

Défaut :

sur chaque intervalle la fonction $S(x)$ supposée être droite (linéaire), donc la fonction de décès $d(x)$ est sous-estimée ou surestimée avant et après les points d'inflexion de la fonction de survie $S(x)$



Construction « exponentielle » de la table (2)

Données :

- 1) population par âge et par sexe au 1 janvier de deux années consécutives
- 2) Décès par âge et par sexe
- 3) Décès des enfants de < 1 an répartis par sexe et par durée de vie (sinon → modèle ou rien)

Hypothèse :

- 1) Taux de mortalité observés = taux de mortalité de table ${}_nM_x = {}_n m_x$
- 2) Population est exponentielle sur chaque intervalle x, x+n (i.e. la densité du risque de décès est uniforme sur l'intervalle)

Modèle : $S_{x+n} = S_x e^{-{}_nM_x n}$

Séquence de calculs : ${}_nM_x \rightarrow S_x \rightarrow {}_nL_x \rightarrow T_x \rightarrow e_x$

$${}_nq_x = 1 - \frac{S_{x+n}}{S_x}$$

$${}_nL_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n M_x} = \frac{S_x - S_{x+n}}{{}_n M_x}$$

$${}_nL_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{\ln S_x - \ln S_{x+n}} n$$

Défaut :

sur chaque intervalle S(x) supposée être concave, dont la fonction de décès d(x) est sous-estimée entre les points d'inflexion de la fonction de survie S(x)

Age	France (métré) 2014 : Données					Tables de mortalité (modèle)					
	Hommes	Hommes	Hommes		Hommes	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes	Hommes
	Pop 1.1.14	Pop 1.1.15	D'	D"	${}_1M_x$	S_x	${}_1L_x$	T_x	e_x	${}_1q_x$	${}_1d_x$
0	385 670	384 840	1 287	159	0.0038	1 000 000	998 126	79 280 501	79.28	0.0037463	3 746
1	390 569	387 297	59	52	0.0003	996 254	996 112	78 282 375	78.58	0.0002854	284
2	392 386	391 851	32	28	0.0002	995 969	995 893	77 286 264	77.60	0.0001530	152
3	404 210	395 768	31	21	0.0001	995 817	995 752	76 290 370	76.61	0.0001300	129
4	404 007	408 248	24	24	0.0001	995 688	995 629	75 294 618	75.62	0.0001182	118
5	406 201	407 031	23	17	1E-04	995 570	995 521	74 298 989	74.63	0.0000984	98

Age	France (métré) 2014										
	Femmes	Femmes	Femmes		Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes	Femmes
	Pop 1.1.14	Pop 1.1.15	D'	D"	${}_1M_x$	S_x	${}_1L_x$	T_x	e_x	${}_1q_x$	${}_1d_x$
0	367 577	368 054	996	156	0.0031	1 000 000	998 436	85 423 614	85.42	0.0031271	3 127
1	370 608	368 557	51	47	0.0003	996 873	996 741	84 425 178	84.69	0.0002651	264
2	376 860	372 349	34	29	0.0002	996 609	996 525	83 428 437	83.71	0.0001682	168
3	385 558	379 472	20	14	9E-05	996 441	996 397	82 431 912	82.73	0.0000889	89
4	384 777	388 768	13	12	6E-05	996 352	996 320	81 435 516	81.73	0.0000646	64
5	387 207	387 075	16	11	7E-05	996 288	996 253	80 439 196	80.74	0.0000697	69

Paradoxe de la mortalité infantile

Espérance de vie à l'âge atteint et « le paradoxe » de la mortalité infantile ($e_0 < e_1$)

Par définition la durée moyenne de vie d'un nouveau-né $e_0 = \int_0^{\omega} S(x)dx = \sum_{x=0}^{\omega} {}_nL_x$ (si $S_0 = 1$).

Pour ceux qui ont survécus jusqu'à l'âge X , la durée moyenne de vie sera composée de X années déjà vécues, + e_x (espérance de vie après l'âge X): $e_x = x + e_x \rightarrow e_x = \int_x^{\omega} S(x)dx = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{{}_nL_x}{S_x} = \frac{T_x}{S_x}$

On peut donc facilement trouver un rapport récurrent entre e_x et e_{x+n}

Sachant que $T_{x+n} = T_x - {}_nL_x = e_x \cdot S_x - {}_nL_x$ on exprime $e_{x+n} = \frac{e_x \cdot S_x - {}_nL_x}{S_{x+n}} = \frac{e_x \cdot S_x - {}_nL_x}{S_x \cdot {}_n p_x} = \frac{e_x - \frac{{}_nL_x}{S_x}}{{}_n p_x}$

Avec le passage de l'âge X à $X+1$ l'espérance de vie diminue **de moins d'un an** puisque la durée de vie des individus décédés dans cet intervalle était forcément plus faible que celle de survivants. Par conséquent il se peut que e_{x+1} soit supérieure à e_x c'est ce qu'on observe souvent dans les âges de première enfance.

$$e_{x+n} - e_x = \frac{{}_n q_x e_x - \frac{{}_n L_x}{S_x}}{{}_n p_x}$$
 normalement < 0 , puisque ${}_n q_x$ est trop petite et ${}_n L_x / S_x$ est proche à 1
cependant pour $x = 0$ (entre la naissance et le premier anniversaire),

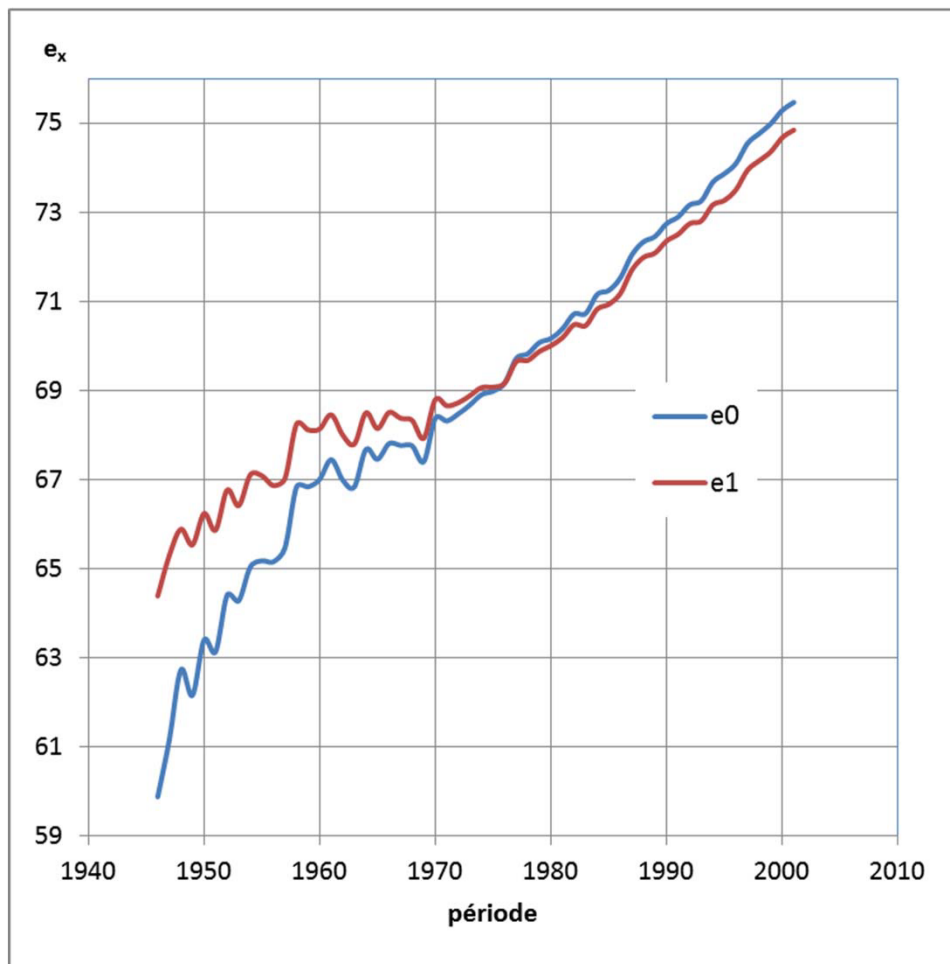
$$e_1 - e_0 = \frac{{}_1 q_0 e_0 - \frac{{}_1 L_0}{S_0}}{{}_1 p_0} > 0$$
 si ${}_1 q_0 > \frac{{}_1 L_0}{e_0}$ et surtout si ${}_1 q_0 > \frac{1}{e_0}$ où $1/e_0$ est TBM de la population stationnaire (voir Annexe avec les démonstrations)

Donc, dans les populations où la **mortalité infantile** est **supérieure** au **taux brut de mortalité de table** ($TBM_{tm} = 1/e_0$), $e_1 > e_0$.

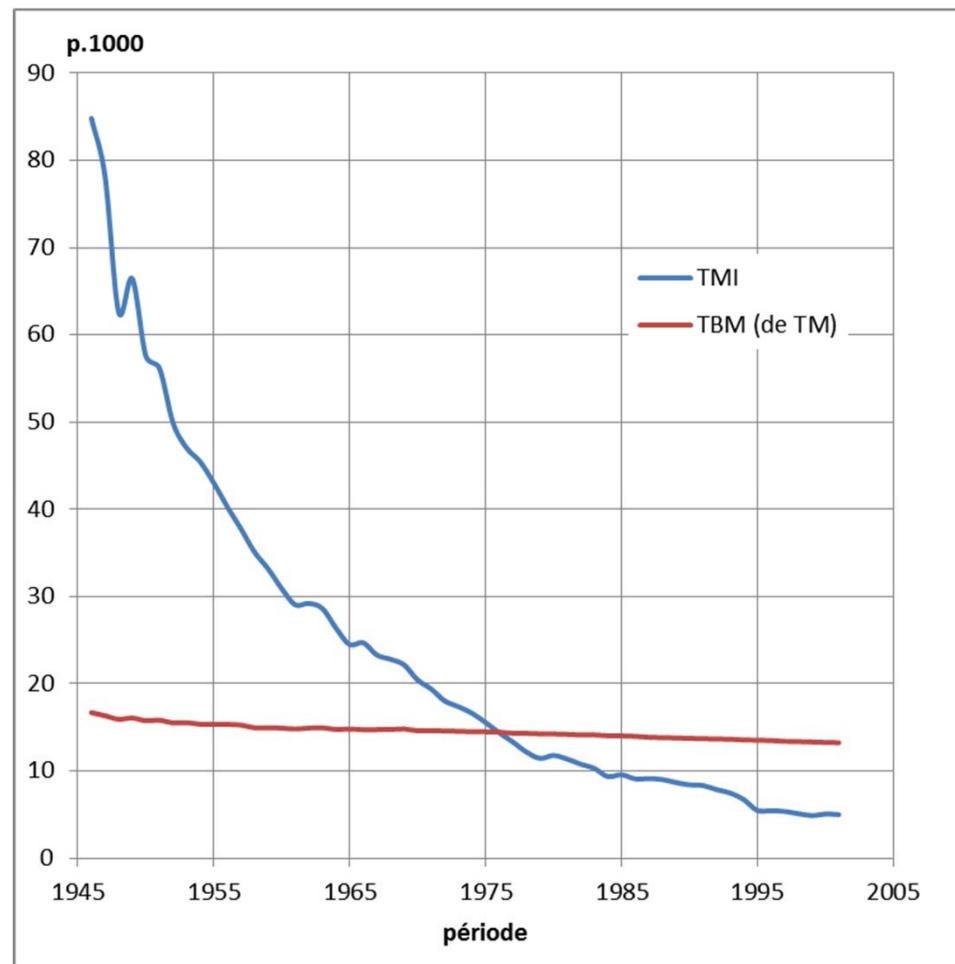
C'est un phénomène qu'on appelle parfois « le paradoxe de la mortalité infantile »

« Paradoxe de la mortalité infantile » en France

Espérance de vie à la naissance et
à l'âge exacte d'un an



Taux de mortalité infantile (TMI) et taux
brut de mortalité (TBM) de table



Depuis 1976 TMI < TBM

$$TMI = \frac{{}_1d_0}{S_0}$$

$$TBM = \frac{1}{e_0}$$

Décomposition d'une différence entre deux e_0

Les formules plus fréquemment utilisées pour la décomposition de la différence entre deux espérances de vie à la naissance

L'écart d'espérance de vie à la naissance entre deux périodes (ou deux populations) est la somme des contributions (en année) de chaque

âge à la variation de cette espérance de vie : $\Delta e_0 = e^A_0 - e^B_0 = \sum C_x$

Formule la plus fréquente:

$$C_x = \frac{0.5 \cdot (l_x^{tm1} + l_x^{tm2})}{l_0} (e_x^{tm2} - e_x^{tm1}) - \frac{0.5 \cdot (l_{x+n}^{tm1} + l_{x+n}^{tm2})}{l_0} (e_{x+n}^{tm2} - e_{x+n}^{tm1})$$

$$e_0^{tm2} - e_0^{tm1} = \sum_{x=0}^{\omega} C_x$$

Une step by step (formule d'Arriaga) :

Cette formule non symétrique est assez fréquemment utilisée dans les publications, parfois sans symétrisation :

$${}_n\Delta_x^{tm1-tm2} = \frac{l_x^{tm1}}{l_0} \cdot \left(\frac{n l_x^{tm2}}{l_x^{tm2}} - \frac{n l_x^{tm1}}{l_x^{tm1}} \right) + \frac{l_{x+n}^{tm2}}{l_0} \cdot \left(\frac{l_x^{tm1}}{l_x^{tm2}} - \frac{l_{x+n}^{tm1}}{l_{x+n}^{tm2}} \right) \quad \text{pour l'intervalle fermé-ouvert}$$

$${}_{\infty}\Delta_{\omega} = \frac{l_1^1}{l_0} \left(\frac{T_0^2}{l_0^2} - \frac{T_1^1}{l_1^1} \right)$$

Avec une moyenne 'bidirectionnelle' : $\Delta e_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{x=0}^{\omega} {}_n\Delta_x^{1-2} - \sum_{x=0}^{\omega} \Delta_x^{2-1} \right)$ on obtient le même résultat qu'avec la formule ci-dessus

Exemple de décomposition d'une différence entre deux e_0

Entre 1816 (table A) et 2010 (table B) les femmes françaises ont gagné 43,65 ans de vie.

Comment quantifier la contribution de la variation de mortalité par tranche d'âge à ce gain ? ¹⁾

Soit $l_0 = 1$ (racine de table) pour simplifier la présentation

Choisissons un intervalle d'âge entre 0 et 30 ans exact

$$e_0 = {}_{30}L_0 + T_{30} = {}_{30}L_0 + l_{30} e_{30}$$

${}_{30}L_0$ ne dépend **que** de la mortalité sur l'intervalle d'âge choisi (0-30 ans)

T_{30} dépend de la mortalité sur l'intervalle d'âge 0-30 ans (l_{30}) **et** de la mortalité après l'âge de 30 ans (i.e. e_{30})

La Contribution de la variation (baisse) de Mortalité (CVM) des âges 30+ à la différence entre les deux e_0 s'exprime donc comme suit :

$$\Delta_{30+}^{B-A} = e_{30}^B - e_{30}^A = l_{30}^B e_{30}^B - l_{30}^A e_{30}^A = l_{30}^B (e_{30}^B - e_{30}^A)$$

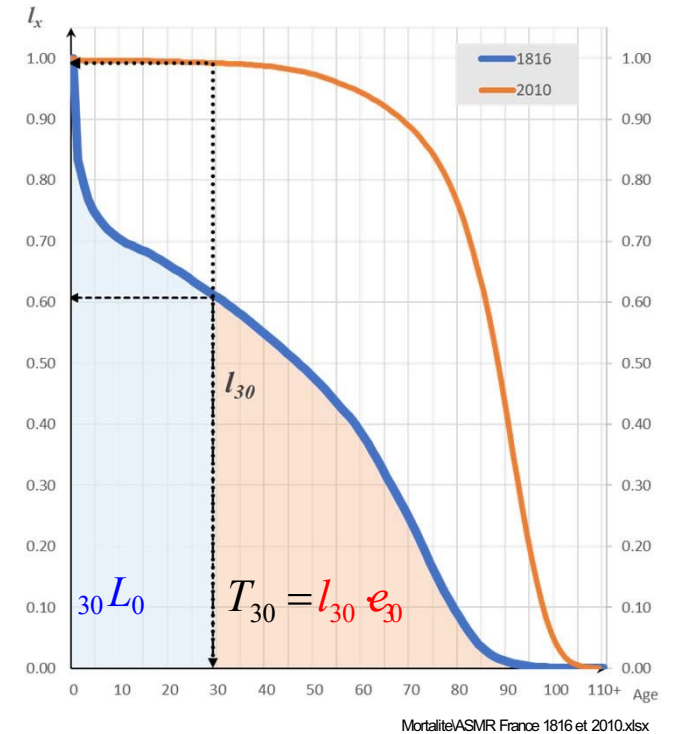
$$\text{tout court : } \Delta_{30+}^{B-A} = l_{30}^B (e_{30}^B - e_{30}^A)$$

La CVM sur un intervalle 30-35 ans est alors : ${}_5\Delta_{30}^{B-A} = l_{30}^B (e_{30}^B - e_{30}^A) - l_{35}^B (e_{35}^B - e_{35}^A)$

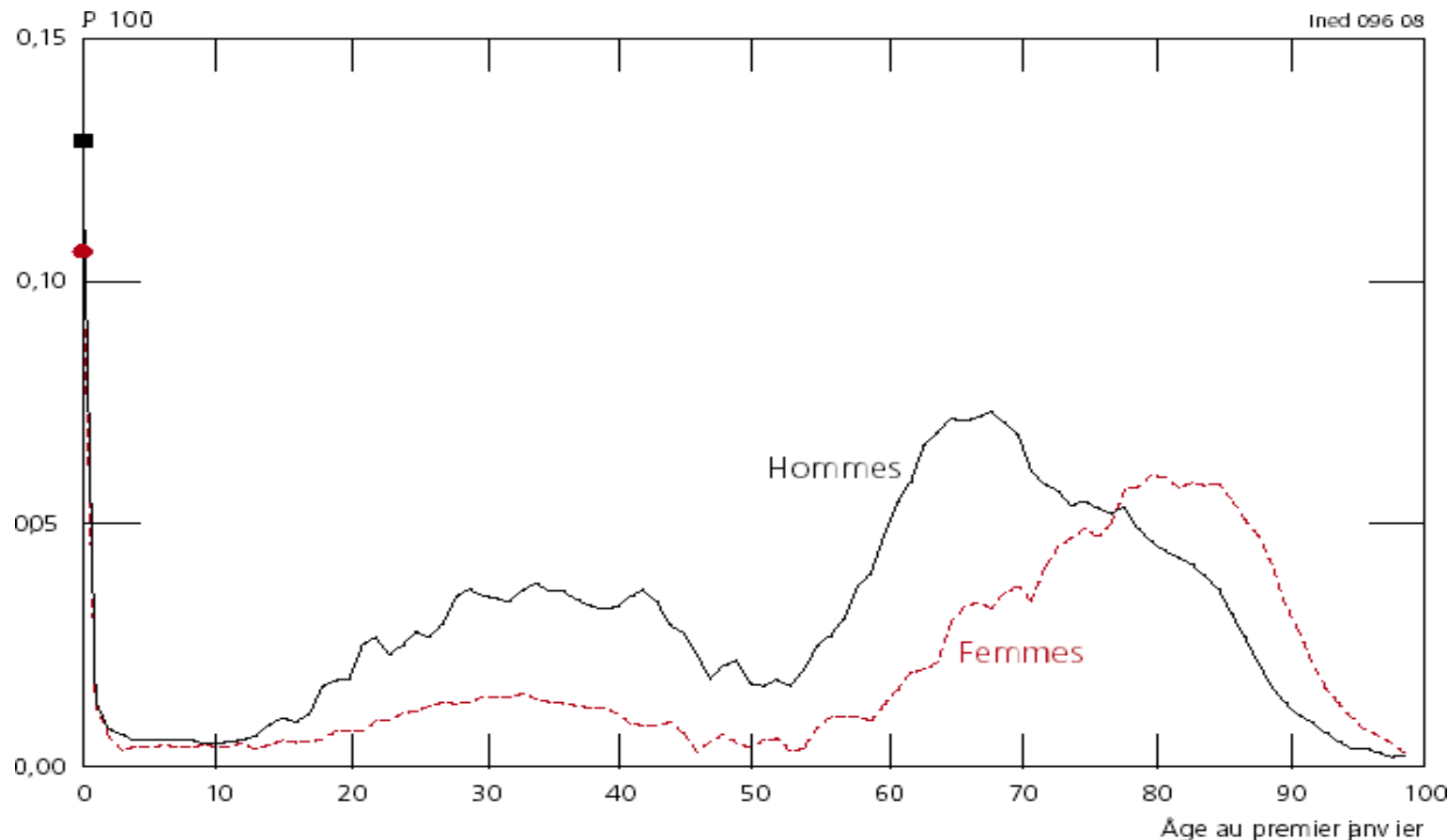
la totalité de la différence est composée des contributions partielles $e_0^B - e_0^A = \Delta e_0^{B-A} = \sum_{x=0}^{\omega-n} {}_n\Delta_x^{B-A}$

Pour la différence entre tables A et B: ${}_5\Delta_{30}^{A-B} = l_{30}^A (e_{30}^A - e_{30}^B) - l_{35}^A (e_{35}^A - e_{35}^B) \rightarrow \Delta_x^{A-B} = \sum_{x=0}^{\omega-n} {}_n\Delta_x^{A-B}$

Puisque $\Delta e_0^{A-B} \neq \Delta e_0^{B-A}$ on estime la vraie différence comme une moyenne de deux $\Delta e_0^{A \cup B} = 0,5 (\Delta e_0^{B-A} - \Delta e_0^{A-B})$



Contribution de la baisse de la mortalité à chaque âge à l'augmentation de l'espérance de vie a la naissance entre 1995 et 2005 (comparaison des tables 1994-1996 et 2004-2006)



Source: Beaumel C., Vatan M., 2008, *La situation démographique en 2006* INSEE, Résultats. Société, 2008, N°84

Lecture: Sur les 3 ans d'espérance de vie gagnés entre 1995 et 2005 par les hommes, 0,13 d'année ont été gagné grâce à la baisse de la mortalité infantile (à l'âge 0), chez les femmes la baisse de la mortalité infantile a permis de gagner 0.11 d'année sur le gain total de 2,04 d'années

Exemple numérique (Femmes, USA) entre 1935 et 1995

	1935		1935		1995		1995		1935-1995	1995-1935	moyenne	moyenne	Arriaga		
	l_x	${}_nL_x$	T_x	e_x	l_x	${}_nL_x$	T_x	e_x	a	b	(a,b)	$\bar{l}_x$	1995-1935	1935-1995	moyenne
0	1	0.96354	63.32	63.32	1.000	0.994	79.00	79.00	-3.065	2.554	-2.81	-2.809	-2.554	3.0646	2.809
1	0.95458	3.77877	62.36	65.32	0.993	3.969	78.01	78.54	-1.107	0.969	-1.04	-1.038	-0.969	1.1072	1.038
5	0.93887	4.67474	58.58	62.39	0.992	4.957	74.04	74.65	-0.460	0.406	-0.43	-0.433	-0.406	0.4598	0.433
10	0.93174	4.64534	53.90	57.85	0.991	4.953	69.08	69.71	-0.316	0.278	-0.30	-0.297	-0.278	0.3157	0.297
15	0.92613	4.60915	49.26	53.19	0.990	4.945	64.13	64.78	-0.312	0.274	-0.29	-0.293	-0.274	0.3120	0.293
20	0.91861	4.55193	44.65	48.61	0.987	4.933	59.18	59.95	-0.782	0.686	-0.73	-0.734	-0.686	0.7824	0.734
25	0.90341	4.47783	40.10	44.38	0.985	4.919	54.25	55.05	-0.678	0.598	-0.64	-0.638	-0.598	0.6779	0.638
30	0.88746	4.39466	35.62	40.14	0.982	4.900	49.33	50.23	-0.649	0.575	-0.61	-0.612	-0.575	0.6487	0.612
35	0.86997	4.29742	31.22	35.89	0.978	4.874	44.43	45.45	-0.691	0.615	-0.65	-0.653	-0.615	0.6913	0.653
40	0.84847	4.18269	26.93	31.74	0.972	4.837	39.56	40.72	-0.667	0.596	-0.63	-0.632	-0.596	0.6669	0.632
45	0.82368	4.03859	22.74	27.61	0.963	4.786	34.72	36.06	-0.775	0.697	-0.74	-0.736	-0.697	0.7752	0.736
50	0.79012	3.84356	18.71	23.67	0.950	4.707	29.93	31.49	-0.839	0.765	-0.80	-0.802	-0.765	0.8391	0.802
55	0.74539	3.58766	14.86	19.94	0.931	4.584	25.23	27.10	-0.871	0.808	-0.84	-0.840	-0.808	0.8709	0.840
60	0.68688	3.24494	11.27	16.41	0.901	4.397	20.64	22.92	-0.949	0.909	-0.93	-0.929	-0.909	0.9492	0.929
65	0.60779	2.79761	8.03	13.21	0.855	4.116	16.25	19.00	-0.935	0.940	-0.94	-0.937	-0.940	0.9348	0.937
70	0.50757	2.23797	5.23	10.31	0.788	3.722	12.13	15.40	-0.958	1.050	-1.00	-1.004	-1.050	0.9575	1.004
75	0.38276	1.55169	2.99	7.82	0.697	3.187	8.41	12.07	-0.888	1.191	-1.04	-1.039	-1.191	0.8875	1.039
80	0.2393	0.89054	1.44	6.03	0.573	2.481	5.22	9.12	-0.479	0.890	-0.68	-0.684	-0.890	0.4785	0.684
85 +	0.12281	0.552	0.55	4.49	0.414	2.741	2.74	6.62	-0.261	0.879	-0.57	-0.570	-0.879	0.2607	0.570
				-15.68				15.68	-15.68	15.68	-15.68	-15.68	-15.68	15.68	15.68

Avec la formule la plus fréquente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a)} \rightarrow {}_5\Delta_{30}^{A-B} = l_{30}^A (e_{30}^A - e_{30}^B) - l_{35}^A (e_{35}^A - e_{35}^B) \\ \text{b)} \rightarrow {}_5\Delta_{30}^{B-A} = l_{30}^B (e_{30}^B - e_{30}^A) - l_{35}^B (e_{35}^B - e_{35}^A) \\ \text{c)} \rightarrow \Delta e_0^{a \cup b} = 0,5 \cdot \sum_i (a_i - b_i) \end{array} \right.$$

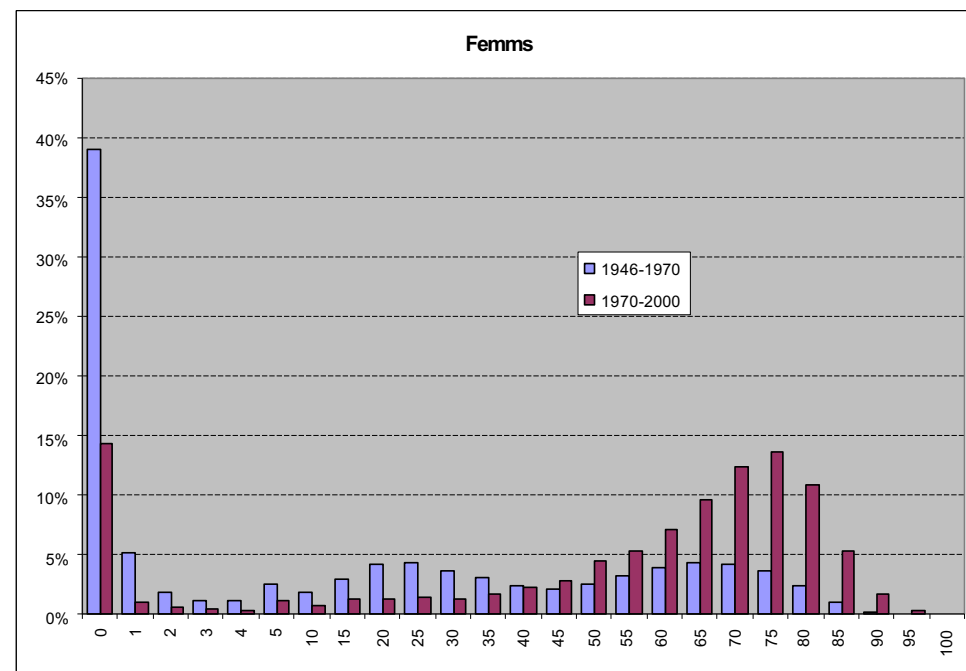
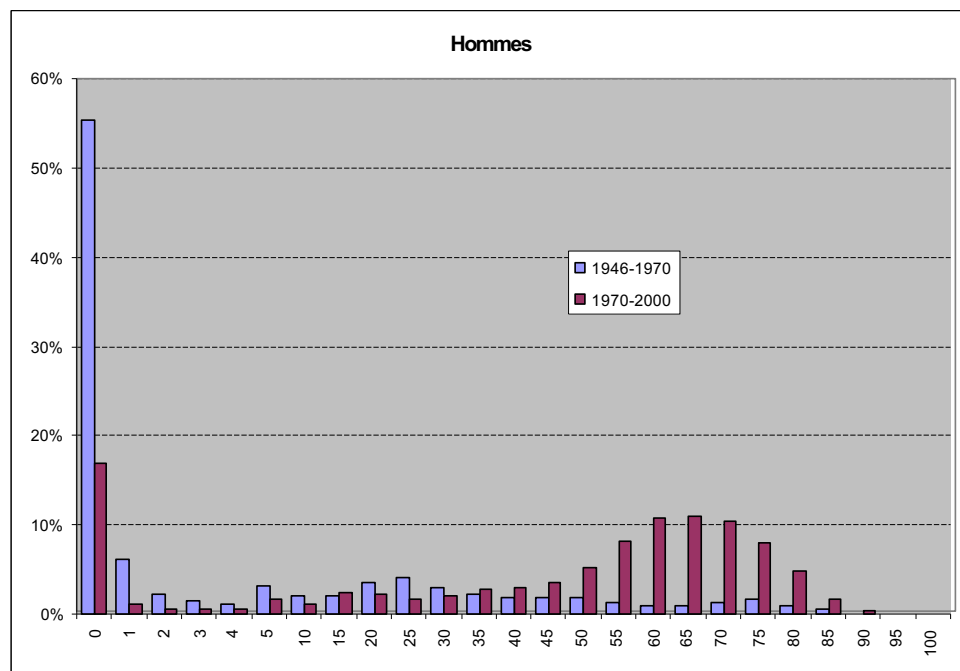
Ou bien avec un recours à $\bar{l}_x$:

$${}_n\Delta_x = \frac{0.5 \cdot \left(l_x^A + l_x^B \right)}{l_0} \cdot \left(e_x^B - e_x^A \right) - \frac{0.5 \cdot \left(l_{x+n}^A + l_{x+n}^B \right)}{l_0} \cdot \left(e_{x+n}^B - e_{x+n}^A \right)$$

Avec la formule d'Arriaga :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Arriaga 1995-1935} \rightarrow {}_n\Delta_x^{1-2} = \frac{l_x^1}{l_0} \cdot \left(\frac{{}_nL_x^2}{l_x^2} - \frac{{}_nL_x^1}{l_x^1} \right) + \frac{T_{x+n}^2}{l_0} \cdot \left(\frac{l_x^1}{l_x^2} - \frac{l_{x+n}^1}{l_{x+n}^2} \right) \\ \text{b) Arriaga 1935-1995} \rightarrow {}_n\Delta_x^{2-1} = \frac{l_x^2}{l_0} \cdot \left(\frac{{}_nL_x^1}{l_x^1} - \frac{{}_nL_x^2}{l_x^2} \right) + \frac{T_{x+n}^1}{l_0} \cdot \left(\frac{l_x^2}{l_x^1} - \frac{l_{x+n}^2}{l_{x+n}^1} \right) \\ \text{c) } \Delta e_0^{a \cup b} = \sum_n \Delta_x^{a \cup b} = 0,5 \cdot \sum (a - b) \end{array} \right.$$

Contribution de la baisse de la mortalité pour les différents groupes d'âge quinquennaux à l'augmentation de l'espérance de vie à la naissance en France entre 1946 et 2000

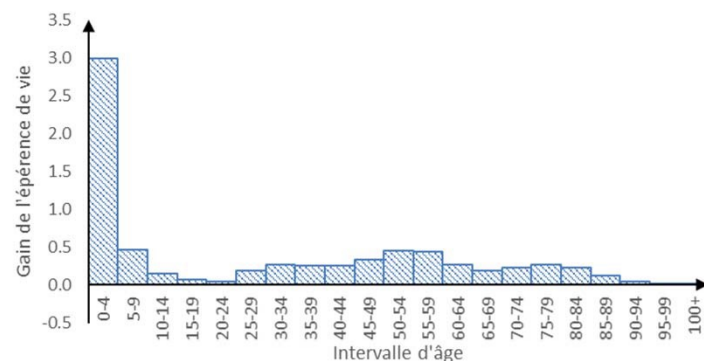


Le défaut de ces méthodes de décomposition que pour trois ou plus périodes consécutives ces résultats ne sont pas additifs, i.e.

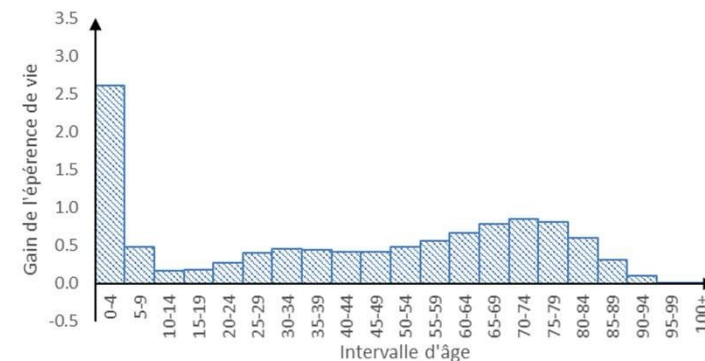
$$\Delta e_0(2000 - 1946) \neq \Delta e_0(1970 - 1946) + \Delta e_0(2000 - 1970)$$

Décomposition de la différence entre l'espérance de vie en France : comparaison des années 1950, 1970, 1990 et 2010

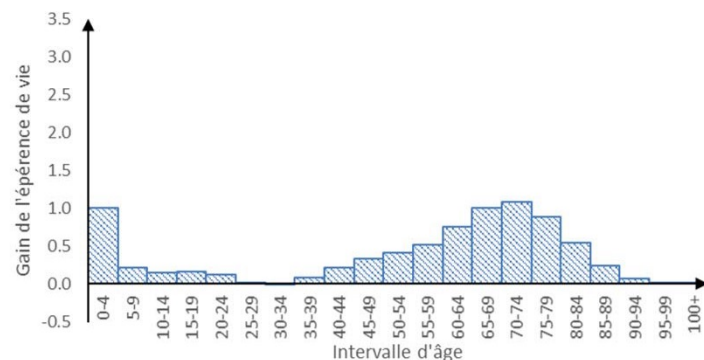
Hommes 1970-1950



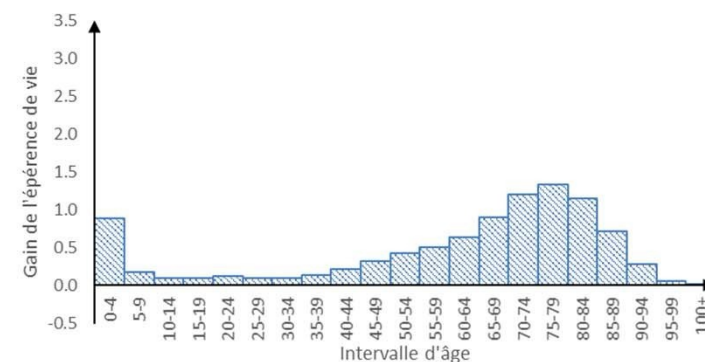
Femmes 1970-1950



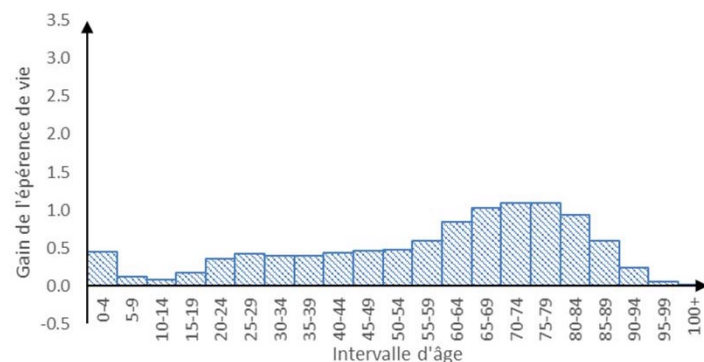
Hommes 1990-1970



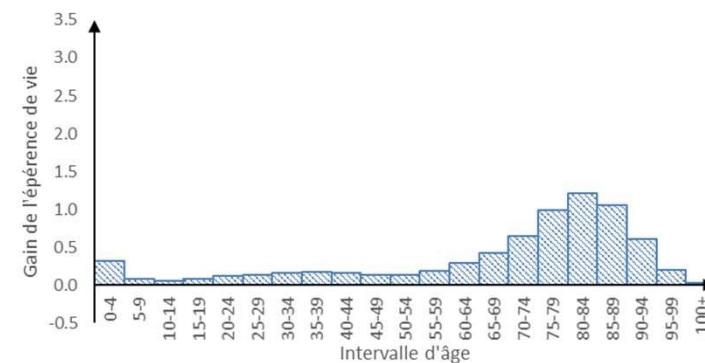
Femmes 1990-1970



Hommes 2010-1990



Femmes 2010-1990



Décomposition de la différence entre l'espérance de vie des tables types de mortalité (ONU) : un choix pour les prévisions



Population Division

Search



Home CPD GA Themes Events Publications Data SDGs About Us

Home » Data » Model Life Tables

Model Life Tables

The United Nations and the demographic research community at large commonly use two sets of standard model life table families to derive a variety of mortality indicators and underlying mortality patterns for estimation and projection (Coale-Demeny, 1966 and 1989; United Nations, 1982). These two sets of model life tables, designed primarily for use in developing countries or for estimating historic populations, are limited to mortality patterns for a life span from age 20 to 75. A revised set of model life tables, extending the initials sets from life expectancy at birth ($e(0)$) from age 75.0 up to 92.5, uses both a limited life table as an asymptotic pattern and the classic Lee-Carter approach to derive intermediate age patterns (Buettner, 2002).

With the extension of the projection horizon for all countries up to 2100 as part of the 2012 revision of World Population Prospects, life expectancy at birth was extended beyond 92.5 years. In-depth analysis of an initial extension of the model life tables, carried out in 1998, revealed substantial deviation for out-of-sample predictions compared to results from the Human Mortality Database (HMD) at very low mortality levels (Wilmoth and others, 2012) and the need for a smoother transition between the existing set of model life tables up to age 75 and above.

A new set of extended model-life tables (Gerland and Li (2011) imposed constraints to ensure greater convergence with the HMD at high levels of life expectancy at birth. The nine sets of regional model life tables (four Coale-Demeny model life-table regional patterns (East, North, South and West) and five United Nations model life-table regional patterns (Latin American, Chilean, South Asian, Far Eastern, General), extended up to 100 years of life expectancy at birth, were blended with the existing ones to ensure smooth mortality surfaces by age and sex and levels of life expectancy at birth.

The new model life tables are available by abridged age groups (0-1,1-4,5-9, etc.) and by single year of age (0,1,2,3, etc.) (United Nations, 2011). In both cases the life tables have been extended up to age 130. Each dataset is available for life expectancy at birth from age 20 up to 100 by 1 year or 2.5-year increment.

References

Related links

World Population Prospects

MortPak - The United Nations Software Package for Mortality Measurement

Data

- Abridged life tables (2.5 years increment)
- Abridged life tables (1 year increment)
- Complete life tables (2.5 years increment)
- Complete life tables (1 year increment)

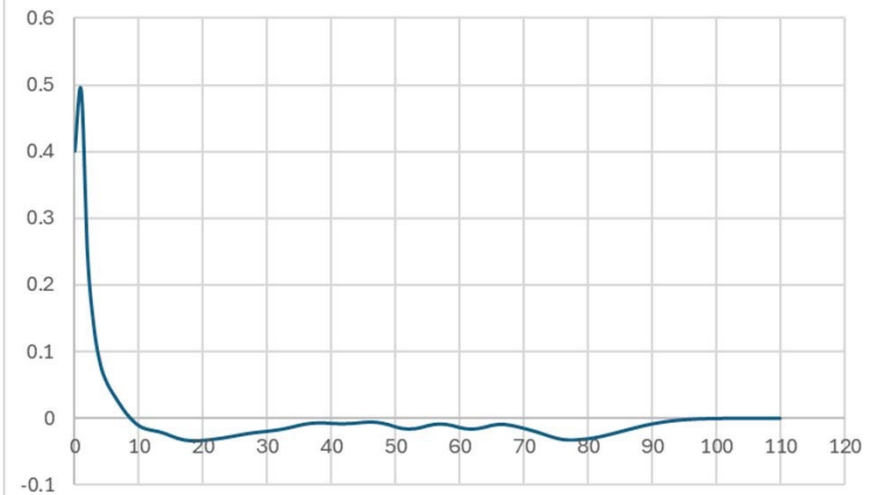
Documentation

- Notes
- Paper (2011)
- Lexis plots (ratios of death rates)
- Scatter plots (relations between different quantities)
- Plots (age-specific mortality patterns (mx))

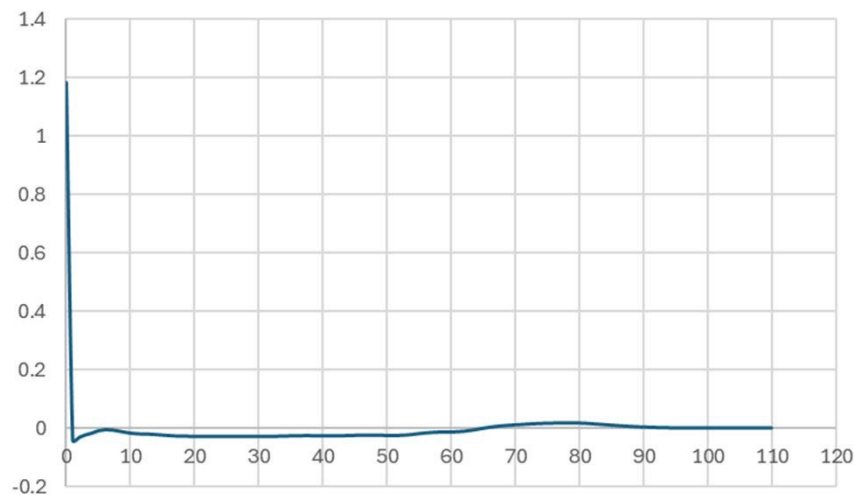
Previous revisions

- Model life tables for developing countries 1982
- Model life tables for under-developed countries (1955)

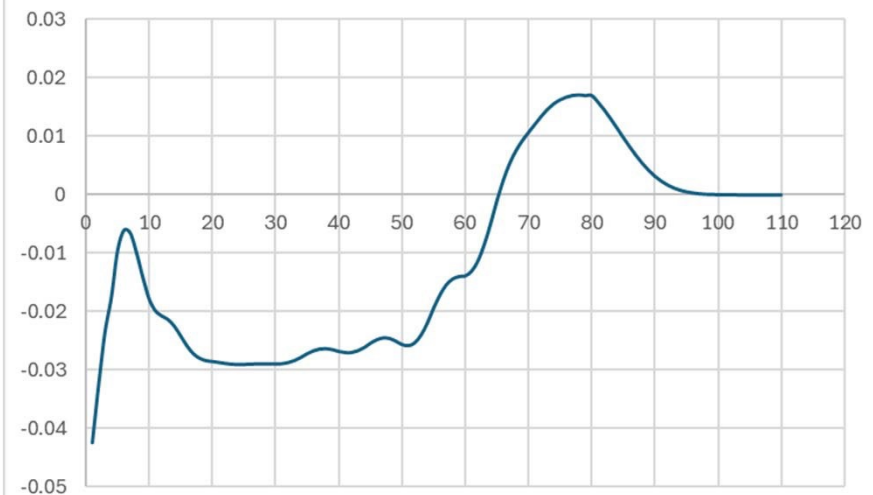
Décomposition de la différence de l'espérance de vie entre TM CD W60 et UN L E60 (à parir de l'âge=0)



Décomposition de la différence de l'espérance de vie entre TM CD W60 et TM CD E60 (à parir de l'âge=0)



Décomposition de la différence de l'espérance de vie entre TM CD W60 et TM CD E60 (à parir de l'âge=1)

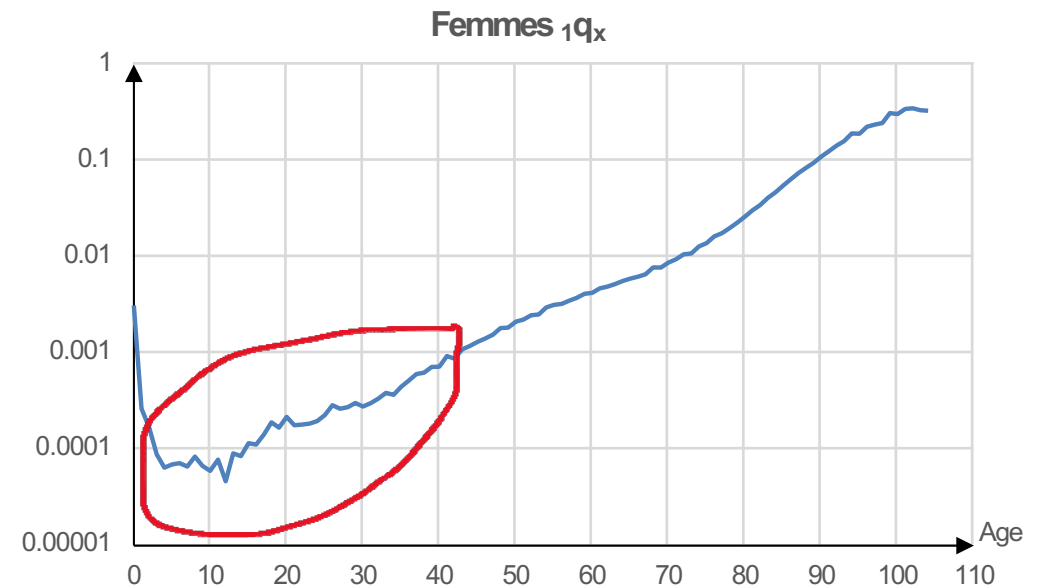
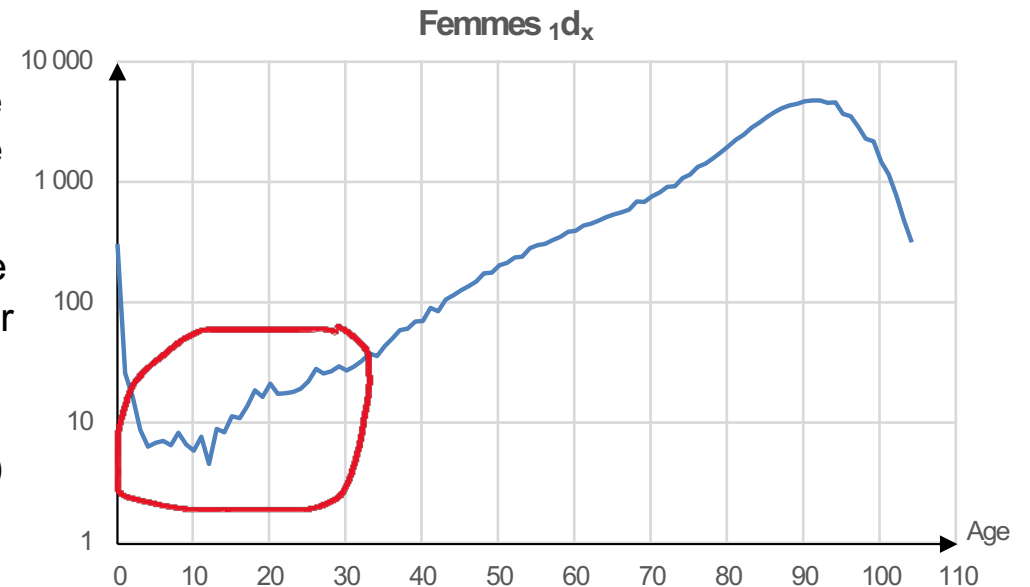
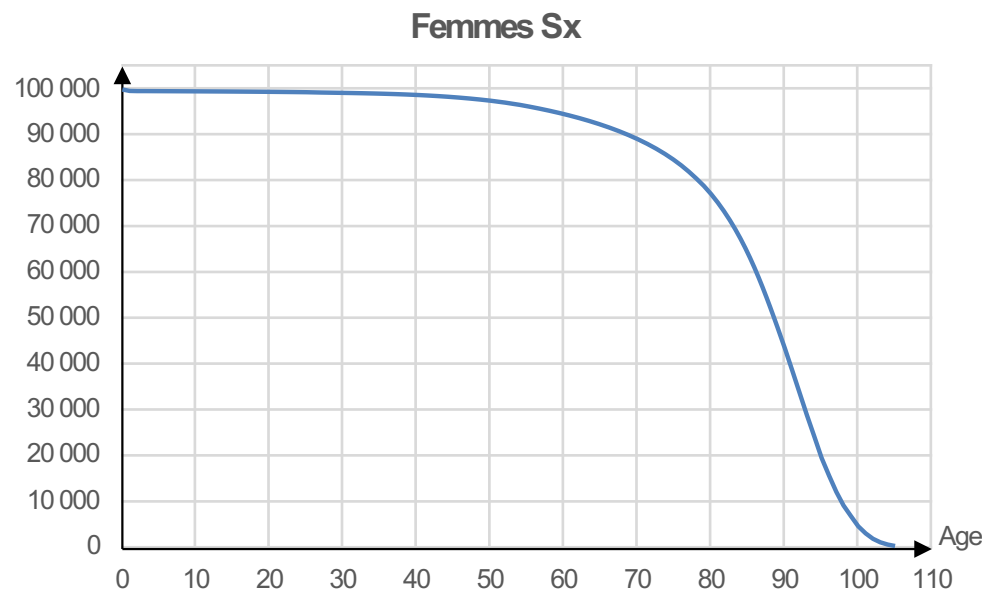


(Variance dans la table de mortalité)

Développement de l'idée sur la variance : problème des fluctuations aléatoire dans les tables de mortalité

Bien que la courbe de survie se voit parfaitement lisse, on remarque que les comportements des indicateurs sur une échelle plus petite ne correspondent pas à l'idée générale de la régularité des paramètres de la mortalité.

Ces irrégularités peuvent être éliminées à l'aide de lissage basé sur les fonctions mathématiques (**splines**) ou bien par l'extension de la période d'observation (**table triennale ex.g**), sinon on peut y introduire une nuance probabiliste supplémentaire (**estimation de l'intervalle de confiance**)



Estimation de la variance dans une table de mortalité

La survie est un processus stochastique discret de type Bernoulli avec une variable aléatoire qui ne prend que deux valeurs (vivant vs décès) avec :

p_i – la probabilité que l'individu reste en vie sur l'intervalle entre x_i et x_{i+1}

q_i – la probabilité que l'individu décède sur l'intervalle entre x_i et x_{i+1}

les espérances mathématiques d'une survie et d'un décès qui sont les événements complémentaires et disjoints distribués selon la loi binominale : $p_i + q_i = 1$

avec la variance sur l'échantillon pour la proportion de survivants $S_{p_i}^2$ et celle de la proportion de décédés $S_{q_i}^2$ qui sont égales $S_{p_i}^2 = S_{q_i}^2$

Nota: l'inconvenance d'utiliser « S_x » pour désigner la survie dans les TM

Soit D_i – le nombre de décès sur l'intervalle (x_i, x_{i+1}) et

N_i – le nombre de vivants à l'âge x_i et la probabilité de décéder : $q_i = \frac{D_i}{N_i}$

si tous les individus ont la même probabilité de décéder sur l'intervalle, alors D_i est une variable aléatoire binomiale et q_i est la proportion binomiale avec leurs variances :

$$S_{D_i}^2 = N_i q_i (1 - q_i) \quad \rightarrow \quad S_{D_i}^2 = D_i (1 - q_i) \quad \text{et} \quad S_{q_i}^2 = \frac{q_i (1 - q_i)}{N_i} \quad \rightarrow \quad S_{q_i}^2 = \frac{q_i^2 (1 - q_i)}{D_i}^* \quad \text{F1}$$

soit a_i est la fraction du dernier intervalle vécu, et $q_i = \frac{n_i \cdot M_i}{1 + (1 - a_i) n_i \cdot M_i}$ (voir chap.5, diap.32)

avec P_i – effectif de la population exposée on obtient la formule : $S_{q_i}^2 = \frac{n_i^2 \cdot M_i (1 - a_i \cdot M_i)}{P_i [1 + (1 - a_i) n_i \cdot M_i]^3}$ F2

$\rightarrow$ qui se transforme en $S_{q_x}^2 = \frac{M_x (1 - a_x \cdot M_x)}{P_x [1 + (1 - a_x) n_x \cdot M_x]^3}$ si $n = 1$, et en $S_{q_x}^2 = \frac{4M_x (1 - M_x)}{P_x [2 + M_x]^3}$ si $a_x = 1/2$ F3

*) D_i – est directement observable, N_i - non

Variance de l'espérance de vie dans un échantillon

Soit p_{ij} – la probabilité de survie dans l'intervalle (x_i, x_j) calculée comme il suit

$$p_{ij} = p_i \cdot p_{i+1} \cdot \dots \cdot p_{j-1} \quad \text{avec } i < j; i, j = 0, 1, 2, \dots \text{ et } p_i = 1 - q_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Alors la variance de p_{ij} se fabrique avec la transformation de König-Huygens

$$S_{p_{ij}}^2 = p_{ij}^2 \cdot \sum_{h=i}^{j-1} p_h^{-2} \cdot S_{p_h}^2 \quad \text{sachant que } S^{\text{gl}} = S_1^{\text{gl}} \text{ cf. diapo précédent}$$

On peut ensuite calculer variance de l'espérance de vie des survivants à l'âge α

$$S_{e_\alpha}^2 = \sum_{i=\alpha}^{\omega-1} p_{\alpha h}^2 [e_{i+1} + (1 - a_i) \cdot n] \cdot S_{p_i}^2$$

En quatre étapes (quatre colonnes, voir la diapositive 49-50) :

1. Calculer la variance de p_x (ou q_x) ; x – l'âge dans la première colonne de la table (F1, F2, F3)
2. Calculer le produit $l_x^2 [e_{x+1} + (1 - a_x) \cdot n] \cdot S_{p_x}^2$ (où l_x – la survie de table et $S_{p_x}^2$ – la variance de p_x voir pt 1)
3. Sommer les produits calculés dans la colonne 2 de bas vers haut
4. Diviser les sommes dans la colonne 3 par l_x^2 pour obtenir le score de la variance

Table de mortalité abrégée, France métropolitaine, Hommes, 2013

Intervalle d'âge (ans) de x_i à x_{i+1}	Amplitude de l'intervalle	Effectif de la population moyenne	Nombre de décès sur l'intervalle	Taux de mortalité	Fraction vécue dans le dernier intervalle d'âge	Quotient de mortalité sur l'intervalle
x_i x_{i+1}	n_i	P_i	D_i	M_i	a_i	q_i
0 - 1	1	389 063	1 512	0.003886	0.1	0.00387
1 - 5	4	1 591 818	293	0.000184	0.39	0.00074
5 - 10	5	2 013 549	196	0.000097	0.46	0.00049
10 - 15	5	2 018 608	197	0.000098	0.54	0.00049
15 - 20	5	1 941 524	638	0.000329	0.57	0.00164
20 - 25	5	1 907 553	1 228	0.000644	0.49	0.00321
25 - 30	5	1 897 062	1 393	0.000734	0.5	0.00366
30 - 35	5	1 976 661	1 747	0.000884	0.52	0.00441
35 - 40	5	1 987 397	2 418	0.001217	0.54	0.00607
40 - 45	5	2 203 383	4 257	0.001932	0.54	0.00962
45 - 50	5	2 167 438	6 879	0.003174	0.54	0.01575
50 - 55	5	2 086 298	10 793	0.005173	0.53	0.02556
55 - 60	5	1 973 080	16 118	0.008169	0.52	0.04006
60 - 65	5	1 925 166	22 274	0.011570	0.52	0.05629
65 - 70	5	1 558 137	24 424	0.015675	0.52	0.07553
70 - 75	5	1 070 195	24 219	0.022630	0.51	0.10721
75 - 80	5	933 079	33 742	0.036162	0.51	0.16609
80 - 85	5	710 234	45 574	0.064168	0.48	0.27496
85 - 90	5	393 858	46 408	0.117829	0.45	0.44496
90 - 95	5	143 114	29 719	0.207660	0.41	0.64387
95+		184 650	7 398	0.300000		1

1) Score de a_i est estimé à partir moyenne des tables complètes supposant que ${}_1a_x=0.5$

2) Score de q_i est estimé avec la formule

$$q_i = \frac{n_i \cdot M_i}{1 + (1 - a_i) \cdot n_i \cdot M_i}$$

Estimation de la variance sur e_x dans la table de mortalité (France, hommes, 2013)

Intervalle d'âge (ans) de x_i à x_{i+1}	Nombre de vivants à l'âge x_i	Nombre de décès sur l'intervalle	Nombre d'années vecues sur l'intervalle	Nombre d'années vécues après l'âge x_i		Variance de p_i = var(q_i)	Éléments des calculs		Variance estimée de e_i	Écart type estimé de e_i
							Élément 1	Élément 2		
	l_i	d_i	L_i	T_i	e_i	$10^8 Sp_i^2$	f_i	F_i	$10^4 Se_i^2$	Se_i
0-1	100 000	387	99 651	7 879 016	78.79	0.98808	616 602.45	6 183 796.20	6.1838	0.025
1-5	99 613	73	398 272	7 779 365	78.10	0.18471	107 520.85	5 567 193.75	5.6106	0.024
5-10	99 539	48	497 566	7 381 093	74.15	0.12073	61 819.89	5 459 672.90	5.5103	0.023
10-15	99 491	49	497 343	6 883 526	69.19	0.12075	52 889.06	5 397 853.01	5.4532	0.023
15-20	99 442	163	496 861	6 386 183	64.22	0.42184	157 626.65	5 344 963.95	5.4051	0.023
20-25	99 279	319	495 582	5 889 322	59.32	0.83823	268 938.86	5 187 337.30	5.2629	0.023
25-30	98 960	363	493 894	5 393 739	54.50	0.96060	256 286.84	4 918 398.44	5.0223	0.022
30-35	98 597	435	491 944	4 899 845	49.70	1.10818	241 066.46	4 662 111.60	4.7957	0.022
35-40	98 163	595	489 444	4 407 901	44.90	1.51272	262 810.91	4 421 045.14	4.5881	0.021
40-45	97 567	938	485 678	3 918 458	40.16	2.15187	293 082.89	4 158 234.23	4.3682	0.021
45-50	96 629	1 522	479 643	3 432 780	35.53	3.55106	368 794.83	3 865 151.34	4.1395	0.020
50-55	95 107	2 431	469 821	2 953 137	31.05	5.89645	453 063.66	3 496 356.51	3.8654	0.020
55-60	92 676	3 713	454 470	2 483 316	26.80	9.55744	521 510.29	3 043 292.85	3.5433	0.019
60-65	88 964	5 007	432 800	2 028 845	22.81	13.42307	487 000.00	2 521 782.56	3.1863	0.018
65-70	83 956	6 342	404 561	1 596 046	19.01	21.59531	479 650.34	2 034 782.56	2.8868	0.017
70-75	77 615	8 321	367 686	1 191 485	15.35	42.36914	524 740.42	1 555 132.22	2.5816	0.016
75-80	69 294	11 509	318 270	823 799	11.89	68.17994	410 549.79	1 030 391.79	2.1459	0.015
80-85	57 784	15 889	247 611	505 528	8.75	120.28025	307 923.67	619 842.00	1.8564	0.014
85-90	41 896	18 642	158 213	257 917	6.16	236.79822	205 863.26	311 918.33	1.7771	0.013
90-95	23 254	14 972	72 100	99 704	4.29	496.78724	106 055.07	106 055.07	1.9613	0.014
95+	8 281	8 281	27 605	27 605	3.33					

$$S_{q_i}^2 = \frac{q_i^2 (1 - \hat{q})_i}{D_i}$$

$$F_i = \sum_{j=i}^{\infty} f_j$$

$$f_i = l_i^2 \cdot [e_{i+1} + (1 - a_i) \cdot n]^2 \cdot S_{p_i}^2$$

Table de mortalité comme modèle de croissance de la population

Rappel : voir partie 1 du cours

Le temps est discret : $\rightarrow P(t) = k \cdot P(t-1)$

$$P(t) = k^t \cdot P(0)$$

k – taux de croissance

Le temps est continu : $\rightarrow \frac{dP}{dt} \cdot \frac{1}{P} = r$

$$P(t) = e^{rt} \cdot P(0)$$

r – taux
d'accroissement

$k = e^r$ ou $k = \exp(r)$

$$r = b - d$$

Le taux d'accroissement et la probabilité de survie

$$P(T) = P(0) e^{r(t) \cdot \Delta t} \cdot e^{r(t) \cdot \Delta t} \dots e^{r(t) \cdot \Delta t} =$$

$$= P(0) e^{r(t) \cdot \Delta t + r(t) \cdot \Delta t + \dots + r(t) \cdot \Delta t} = P(0) e^{\int_0^T r(t) dt}$$

$$P(T) = P(0) e^{\int_0^T r(t) dt} \longrightarrow P(T) = P(0) \cdot e^{\bar{r} [0, T]}$$

$$P(t) = P(0) \cdot e^{\bar{r} t} \longrightarrow P(t) - P(0) = P(0) (e^{\bar{r} t} - 1)$$

$$\frac{P(t) - P(0)}{P(0)} = (e^{\bar{r} t} - 1) \longrightarrow p = e^{\bar{r} t}$$

Sachant que $r = n - m$; et que $n=0 \rightarrow p = e^{mT}$

$$P(t) = P(0) \cdot e^{-r \cdot t} \quad \Rightarrow \quad P(0) - D(t) = P(0) \cdot e^{-r \cdot t}$$

$$P(0) - P(0) \cdot e^{-r \cdot t} = D(t) \rightarrow D(t) = P(0) \cdot (1 - e^{-r \cdot t})$$

$$(1 - e^{-r \cdot t}) = \frac{D(t)}{P(0)} \quad \Rightarrow \quad (1 - \frac{D(t)}{P(0)}) = e^{-r \cdot t}$$

$$(1 - q) = e^{-r \cdot t}$$

$$q = 1 - e^{-r \cdot t}$$

Le taux de mortalité de table est le taux d'accroissement pour une génération dans la population stationnaire

La population stationnaire → la population de la table de mortalité L_x

La population stationnaire → $\sum_x L_x$

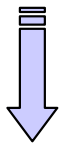
On peut réécrire la formule de croissance

$$(1 - e^{rT}) = \frac{D_0}{P(0)} \quad \text{pour une génération de table}$$

$$(1 - e^{rT}) = \frac{D_x}{S_x} = \frac{\sum_{y=0}^x n d_y}{S_x}$$

Comme $q_x = (1 - e^{rT})$ et $r = -m$

L'accroissement est toujours négatif (la population se diminue) il faut le prendre avec le signe moins (négative)

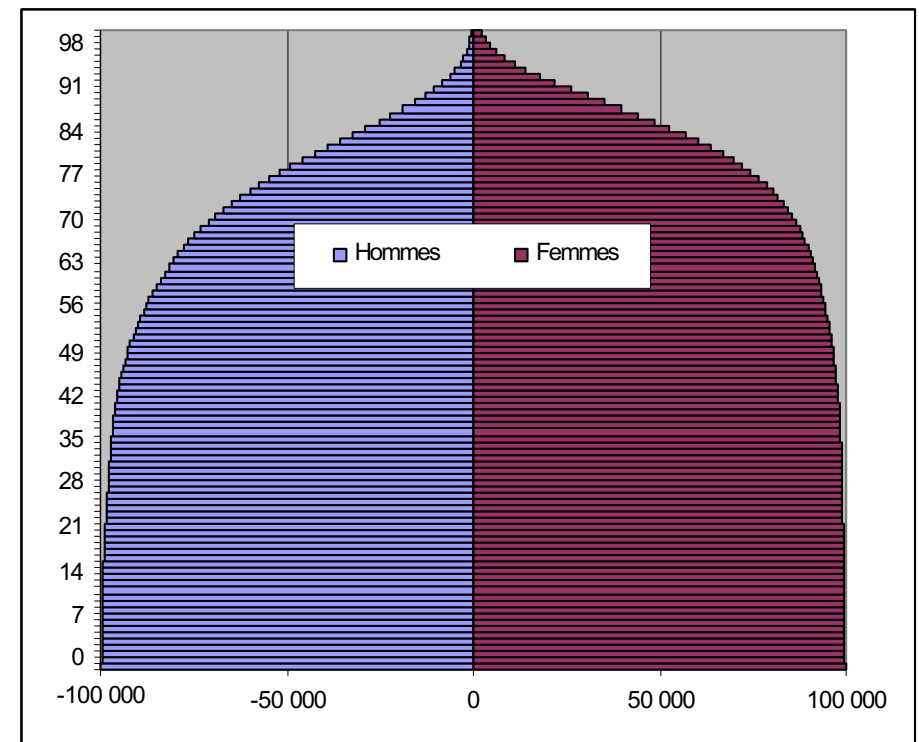


**Formules de
conversion des taux en
quotient**

$${}_n q_x = (1 - e^{-m_x n})$$

$$\frac{\ln(1 - {}_n q_x)^{-1}}{n} = m_x$$

*Populations stationnaires de la table de mortalité
(France, 2000-2002)*



Annexes

Annexe : démonstration pour la fiche « Le paradoxe de la mortalité infantile »¹⁾

Approche 1 : les équations récurrentes

$$\left\{ \begin{array}{l} e_x = \frac{T_x}{S_x} \\ e_{x+n} = \frac{T_{x+n}}{S_{x+n}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} e_x = \frac{T_x}{S_x} \\ e_{x+n} = \frac{T_x - L_x}{S_x \cdot {}_n p_x} \end{array} \right. \rightarrow e_{x+n} - e_x = \frac{T_x - L_x}{S_x \cdot {}_n p_x} - \frac{T_x}{S_x}$$

$$e_{x+n} - e_x = \frac{T_x - L_x}{S_x \cdot {}_n p_x} - \frac{T_x}{S_x} = \frac{T_x - L_x}{S_x \cdot {}_n p_x} - \frac{T_x \cdot {}_n p_x}{S_x \cdot {}_n p_x}$$

$$e_{x+n} - e_x = \frac{T_x - L_x - T_x \cdot {}_n p_x}{S_x \cdot {}_n p_x} = \frac{T_x(1 - {}_n p_x) - L_x}{S_x \cdot {}_n p_x} = \frac{e_x \cdot {}_n q_x - \frac{{}_n L_x}{S_x}}{{}_n p_x}$$

$$e_{x+n} - e_x = \frac{e_x \cdot {}_n q_x - \frac{{}_n L_x}{S_x}}{{}_n p_x} \quad \text{quod erat demonstrandum}$$

¹⁾ R.PRESSAT (1995) *Elements de démographie mathématiques*, Edition de l'AIDELF, p.18-22

Annexe : démonstration pour la fiche « Le paradoxe de la mortalité infantile »¹⁾

Approche 2 : soit l'espérance de vie $e(x)$ est une fonction continue $\rightarrow$

$$e(x) = \frac{\int_x^\infty S(\xi) d\xi}{S(x)} \rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (e_{x+\Delta x} - e_x) \quad (*)$$

$$e'(x) = \frac{[S(x)]' - S(x) S'(x) \int_x^\infty S(\xi) d\xi}{[S(x)]^2} = -1 - \frac{S'(x)}{S(x)} \cdot \frac{\int_x^\infty S(\xi) d\xi}{S(x)} = -1 + q(x) \quad (**)$$

Ainsi $e(x)$ est croissant tant que $e'(x) = -1 + q(x) > 0$ donc si $q(x) > \frac{1}{e(x)}$

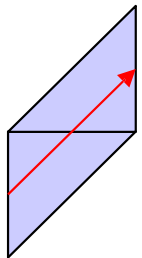
À l'envers $e(x)$ est décroissant tant que $q(x) > \frac{1}{e(x)}$ *Quod Erat Demonstrandum*

Au retour dans le domaine discret on voit : $S_x \cdot e_x = S_x (1 - {}_n q_x) (1 + e_{x+1}) + S_x \cdot {}_n q_x \cdot a_x$

Ainsi pour que $e_{\mathbb{N} \cdot \mathbb{Q}} > e_x = (1 - {}_n q_{\mathbb{N}}) (1 + e_{\mathbb{N} \cdot \mathbb{Q}}) + q_{\mathbb{N}} \cdot a_{\mathbb{N}}$ il faut ${}_n q_x > \frac{1}{e_{x+1} + 1 - {}_1 q_x}$

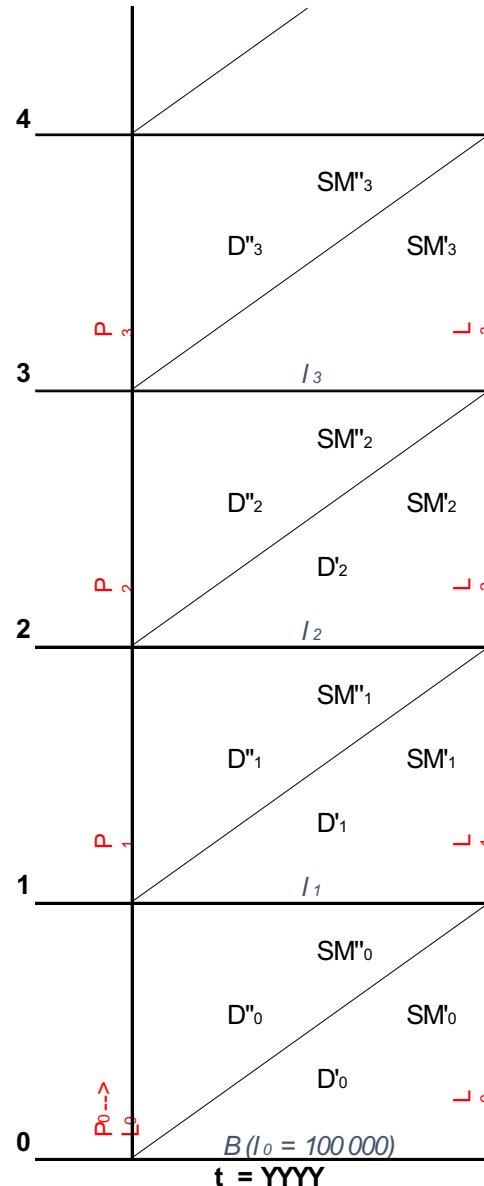
¹⁾ R.PRESSAT (1995) *Elements de démographie mathématiques*, Edition de l'AIDELF, p.18-22

Annexe: Algorithme № 3 (INSEE / quotients perspectifs) : calculs des tables annuelles de mortalité en France (particularités)



- Tables sont calculées à partir des quotients perspectifs de survie des générations ($v_{x,x+1}^L$ ou les quotients de translation) par année de naissance au cours de l'année de référence de la table de mortalité
- Les quotients de survie sont les compléments à 1 des quotients de mortalité (attrition à cause des décès) des générations par année de naissance ajustés à la migration (sachant que l'effectif varie à cause des décès et à cause de la migration conjointement)
- Calculs s'appuient sur les effectifs de la population au début de l'année (au 1 janvier) classés par année d'âge et par sexe
- Pour estimer l'effectif de la population exposée au risque de décès on fait le recours à la statistique de migration (solde migratoire) classée par année de naissance (l'âge atteint dans l'année = type « génération – période ») et par sexe des migrants
- Les décès enregistrés au cours de l'année de référence sont classés par sexe, par âge et par année de naissance des décédés (groupés par triangles ou les ensembles élémentaires du diagramme de Lexis)
- L'objectif est d'estimer pour chaque génération x le ratio de survie entre le début et la fin d'année : $\frac{P_{x+1,t+1}}{P_{x,t}} = v_{x,t} = \frac{L_{x+1}}{L_x}$ (où $P_{x,t}$ l'effectif de la population ajusté à la migration)
- Estimation de la variable basique de la table (l_x ou S_x) se fait comme une moyenne de L_{x+1} et L_x pondérées par les parts de décès dans le triangle supérieur à l'âge $x-1$ (décès avant l'anniversaire) et le triangle inférieur à l'âge x (décès après l'anniversaire)

Algorithme de calculs et données pour la table de mortalité annuelle et triennale en France



1. Calculer la probabilité (le quotient perspectif) de survie durant l'année pour les âges > 1 ($v_{x,x+1}$)

Données :

- population par âge et par sexe au 1 janvier (*tableau T6*) = P_x
- décès classés par sexe, âge et par année de naissance (*T73*) = $D_x = D_x^{000} + D_x^{001}$
- solde migratoire par âge atteint dans l'année (SM_x) ou bien par âge et par année de naissance

$$v_{x,x+1}^L = \frac{{}_n L_{x+n}}{{}_n L_x} = \frac{P_{x+1,t+1}}{P_{x,t} + 0,5 \cdot SM_x^a} = 1 - \frac{D_x + D_{x+1}}{P_{x,t} + 0,5 \cdot SM_x^a} \rightarrow \text{un complément à 1 du quotient d'attrition}$$

2. Calculer la probabilité pour un nouveau-né de survivre de la naissance au 1^{er} janvier

Données :

- nombre de naissances déclarées vivantes par sexe (*T35*) pour l'année précédente
- décès classés par âge et par année de naissance (*T77*)

$$v_0^L = 1 - \frac{D_0}{B + 0,5 \cdot SM_0^R}$$

3. Calculer population de table par âge révolu = ${}_n L_x$ (soit $n = 1$) à partir de l'âge 0 supposant que le nombre de naissances = 100 000

$${}_1 L_0 = 100\,000 \cdot v_0^L \quad \text{et} \quad {}_1 L_{x+1} = {}_1 L_x \cdot v_{x,x+1}^L$$

4. Calculer la probabilité de survie de la naissance à l'anniversaire où à l'âge exacte x (l_x) supposant que $l_0 = 100\,000$ ($S_0 = 100\,000$)

$$l_x = {}_1 L_{x-1} - \frac{D_x}{D_x + D_{x+1}} (L_{x-1} - {}_1 L_x) \quad l_x = {}_1 L_{x-1} \left(1 - \frac{D_x}{D_x + D_{x+1}} \right) + \frac{D_x}{D_x + D_{x+1}} \cdot L_x$$

5. Table de mortalité triennale se fabrique à partir de quotients de survie étant une moyenne arithmétique des trois quotients annuels

Défaut : le même que l'algorithme 1

Annexe : Algorithme № 4 (méthode dite « actuarielle ») : conversion des taux en quotients

Soit ${}_1m_x^*$ les taux de mortalité à l'âge « x » observés dans une population, et qu'ils soient à peu près égaux aux taux de mortalité de table ce qui s'écrit :

$${}_1m_x^* = {}_1m_x = \frac{{}_1d_x}{{}_1L_x} \quad (1)$$

Si la variation de survie sur un intervalle d'âge est linéaire $\rightarrow {}_1L_x = 0,5 (S_x + S_{x+1})$ (2)

on peut réécrire équation (1) $\rightarrow {}_1m_x^* = \frac{{}_1d_x}{0,5 (S_x + S_{x+1})}$ (3)

et en divisant le numérateur et le dénominateur de l'équation (3) par S_x on obtient

la formule de conversion d'un quotient en taux pour : ${}_1m_x^* = \frac{2q_x}{1+{}_1p_x} = \frac{2q_x}{2-{}_1q_x}$ (4)

et celle de conversion des taux en quotients : ${}_1q_x = \frac{2m_x}{2+{}_1m_x}$ (5)

On utilise ensuite l'équation (5) pour démarrer la construction d'une table de mortalité à partir des taux de mortalité fournis par la statistique démographique...

La démonstration alternative : ${}_nq_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nS_x} = \frac{{}_nm_x \cdot {}_nL_x}{{}_nS_x} = \frac{{}_nm_x \cdot n(2S_x - S_{x+1})}{2S_x} = \frac{2 \cdot {}_nm_x \cdot n - {}_nm_x \cdot q_{n-x}}{2} \rightarrow {}_nq_x = \frac{2 \cdot {}_nm_x - {}_nm_x \cdot q_{n-x}}{2 + {}_nm_x}$

Exercice pour autocontrôle : présenter les formules pour ${}_nm_x$ et ${}_nq_x$ sur le diagramme de Lexis

Annexe : Précision de la formule de conversion de ${}_n m_x$ en ${}_n q_x$ pour les intervalles d'âge pluriannuels (« formule de Chiang »)

$${}_n L_x = n \cdot S_{x:n} + {}_n a_x \cdot {}_n d_x \quad \text{où } {}_n a_x \text{ — nombre moyen d'années vécues par les décédés entre âge } x \text{ et } x + n$$

$${}_n L_x = n \cdot (S_x - {}_n d_x) + {}_n a_x \cdot {}_n d_x \Rightarrow n \cdot S_x = {}_n L_x + n \cdot {}_n d_x - {}_n a_x \cdot {}_n d_x \Rightarrow$$

$$S_x = \frac{1}{n} \cdot [{}_n L_x + (n - {}_n a_x) \cdot {}_n d_x] \quad \text{Par définition } {}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{S_x} = \frac{n \cdot {}_n d_x}{{}_n L_x + (n - {}_n a_x) \cdot {}_n d_x}$$

$${}_n q_x = \frac{n \cdot \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x}}{\frac{{}_n L_x}{{}_n L_x} + (n - {}_n a_x) \cdot \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x}} \Rightarrow$$

$${}_n q_x = \frac{n \cdot {}_n m_x}{1 + (n - {}_n a_x) \cdot {}_n m_x}$$

Donc, la conversion des taux en probabilité ne dépend que de « ${}_n a_x$ »

Greville T.N.E "Short Methods of Construction Life Tables" Records from the American Institute of Actuaries, 1943, vol. 32, part. 1, n° 65, juin 1943, p.29-42

Chiang C.L. An Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics. N.Y., Wiley 1968

Relations entre la formule « actuarielle », la formule de Chiang et la loi exponentielle de la mortalité

$${}_nq_x = \frac{n \cdot {}_n m_x}{1 + (n - {}_n a_x) \cdot {}_n m_x}$$



Quelle est la distribution des décès à l'intérieur de l'intervalle $x, x + 1$:
linéaire, exponentielle (ou autre) ?

1. Distribution linéaire de $S(x) \rightarrow S^{(k)}(x) = k$

$${}_n a_x = \frac{n}{2} \rightarrow {}_n q_x = \frac{n \cdot {}_n m_x}{1 + \left(n - \frac{n}{2}\right) \cdot {}_n m_x} = \frac{n \cdot {}_n m_x}{1 + \frac{n}{2} \cdot {}_n m_x} \rightarrow {}_n q_x = \frac{2 \cdot n \cdot {}_n m_x}{2 + n \cdot {}_n m_x}$$

on obtient **la formule** usuelle que Y. Péron (1971) appelle « **actuarielle** »

2. Distribution exponentielle de $S(x)$: on n'a pas besoin de ${}_n a_x$ qui se calcule à l'intérieur du modèle

Si ${}_n m_x$ est **constant** (densité uniforme) sur un intervalle $x, x + n$ et ${}_n q_x = 1 - \frac{S_{x+n}}{S_x} \Rightarrow$

$${}_n q_x = 1 - \frac{S_{x+n}}{S_x} = 1 - \frac{S_x e^{-n \cdot {}_n m_x}}{S_x} \Rightarrow {}_n q_x = 1 - e^{-n \cdot {}_n m_x} \text{ et } {}_n p_x = e^{-n \cdot {}_n m_x} \rightarrow S_x = \int_0^x u(y) dy$$