x	$_aq_x$ ‰	S_x	x	$_aq_x$ ‰	S_x	x	$_aq_x$ ‰	S_x
0	263	10 000	30	275	1 055	65	425	82
1	345	7 370	35	279	765	70	506	47
5	263	4 827	40	284	551	75	598	23
10	248	3 558	45	292	395	80	699	9
15	258	2 675	50	307	280	85	817	3
20	270	1 985	55	331	194	90		1
25	272	1 449	60	370	130			

La vie moyenne de cette table est égale à 11,1 ans.

— La vie moyenne d'une table de mortalité du moment représente l'espérance de vie d'une génération, qui, à tout âge, connaitrait les conditions de mortalité qui sont celles de ce moment-là. Cette correspondance n'est évidemment pas valable ici, aucune génération ne subissant une mortalité exceptionnelle tout au long de son existence. Cette impossibilité se manifeste dans la valeur ridiculement basse de la vie moyenne (qui conduirait rapidement à la disparition de la population).

Pour mesurer correctement la mortalité et son évolution, il faudrait donc passer par les tables de génération. Cette façon de faire est cependant rarement possible, du fait de la non-disponibilité de données portant sur une centaine d'années, et, a l'inconvénient de ne pas rendre compte de la mortalité du moment, qui reflète, outre d'éventuels phénomènes exceptionnels, les conditions de vie habituelles de la période.

Pour étudier l'influence de ces dernières, on est amené à calculer des tables du moment, en excluant les périodes de mortalité exceptionnelle. Il faut cependant se souvenir que la mortalité « normale » de telles tables est inférieure à la mortalité réelle des générations, comme le montre la première partie de cet exercice.

Exercice M8

— Le nombre moyen d'années de vie gagnées à chaque âge est donné par la différence des espérances de vie aux deux périodes. On a donc les gains suivants représentés sur le graphique ci-après.

Age exact x	Gain	Age exact x	Gain
0	18,81	40	8,78
1	15,11	50	7,56
5	13,54	60	6,30
10	13,03	70	4,56
15	12,63	80	2,48
20	11,89	90	0,80
30	10,16		

x	$_aq_x$ ‰	S_x	x	$_aq_x$ ‰	S_x	x	$_aq_x$ ‰	S_x
0	263	10 000	30	275	1 055	65	425	82
1	345	7 370	35	279	765	70	506	47
5	263	4 827	40	284	551	75	598	23
10	248	3 558	45	292	395	80	699	9
15	258	2 675	50	307	280	85	817	3
20	270	1 985	55	331	194	90		1
25	272	1 449	60	370	130			

La vie moyenne de cette table est égale à 11,1 ans.

— La vie moyenne d'une table de mortalité du moment représente l'espérance de vie d'une génération, qui, à tout âge, connaitrait les conditions de mortalité qui sont celles de ce moment-là. Cette correspondance n'est évidemment pas valable ici, aucune génération ne subissant une mortalité exceptionnelle tout au long de son existence. Cette impossibilité se manifeste dans la valeur ridiculement basse de la vie moyenne (qui conduirait rapidement à la disparition de la population).

Pour mesurer correctement la mortalité et son évolution, il faudrait donc passer par les tables de génération. Cette façon de faire est cependant rarement possible, du fait de la non-disponibilité de données portant sur une centaine d'années, et, a l'inconvénient de ne pas rendre compte de la mortalité du moment, qui reflète, outre d'éventuels phénomènes exceptionnels, les conditions de vie habituelles de la période.

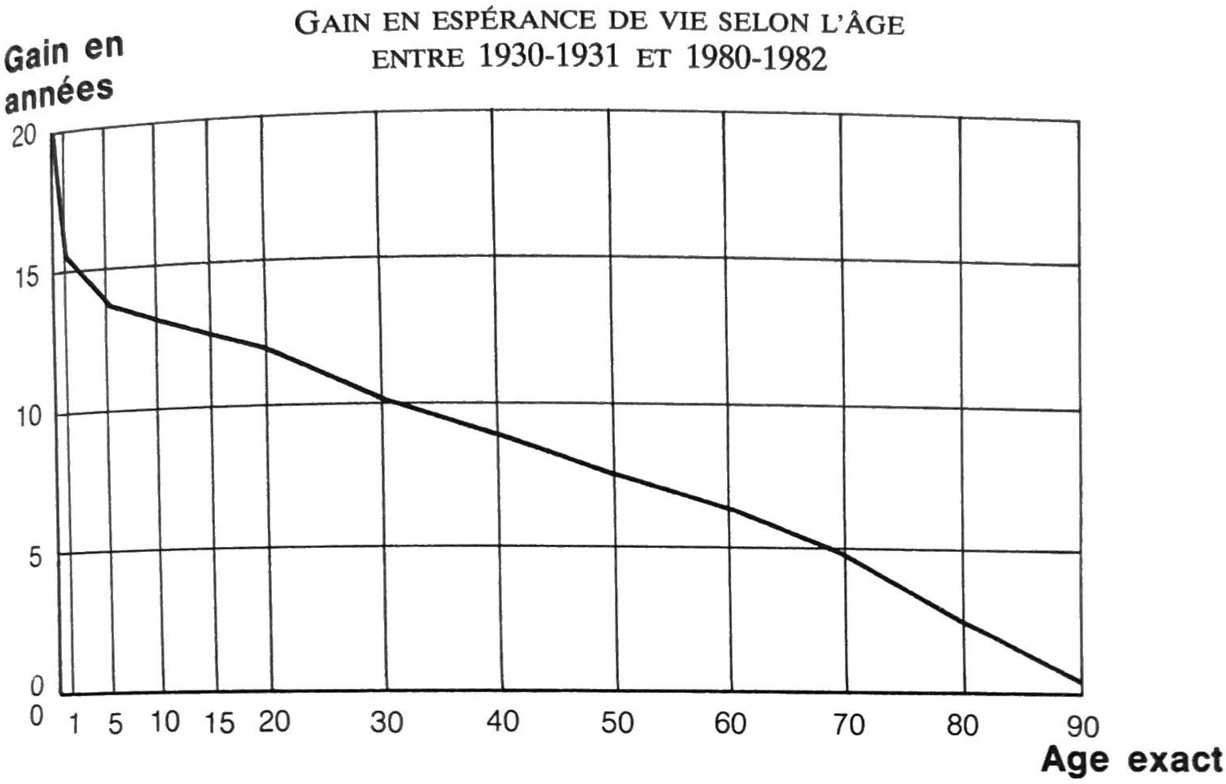
Pour étudier l'influence de ces dernières, on est amené à calculer des tables du moment, en excluant les périodes de mortalité exceptionnelle. Il faut cependant se souvenir que la mortalité « normale » de telles tables est inférieure à la mortalité réelle des générations, comme le montre la première partie de cet exercice.

Exercice M8

— Le nombre moyen d'années de vie gagnées à chaque âge est donné par la différence des espérances de vie aux deux périodes. On a donc les gains suivants représentés sur le graphique ci-après.

Age exact x	**Gain**	**Age exact x**	**Gain**
0	18,81	40	8,78
1	15,11	50	7,56
5	13,54	60	6,30
10	13,03	70	4,56
15	12,63	80	2,48
20	11,89	90	0,80
30	10,16		

GAIN EN ESPÉRANCE DE VIE SELON L'ÂGE
ENTRE 1930-1931 ET 1980-1982



— A la différence de l'échelle arithmétique, l'échelle logarithmique (p. 42) traduit les variations relatives et permet de mesurer le rapport des deux espérances de vie à un même âge, en lisant directement leur distance sur une échelle mobile identique à celle utilisée pour le graphique. On voit ainsi que l'espérance de vie à 60 ans de 1980-1982 représente environ 1,4 fois celle de 1930-1931, soit un gain de 40 % entre les deux dates.

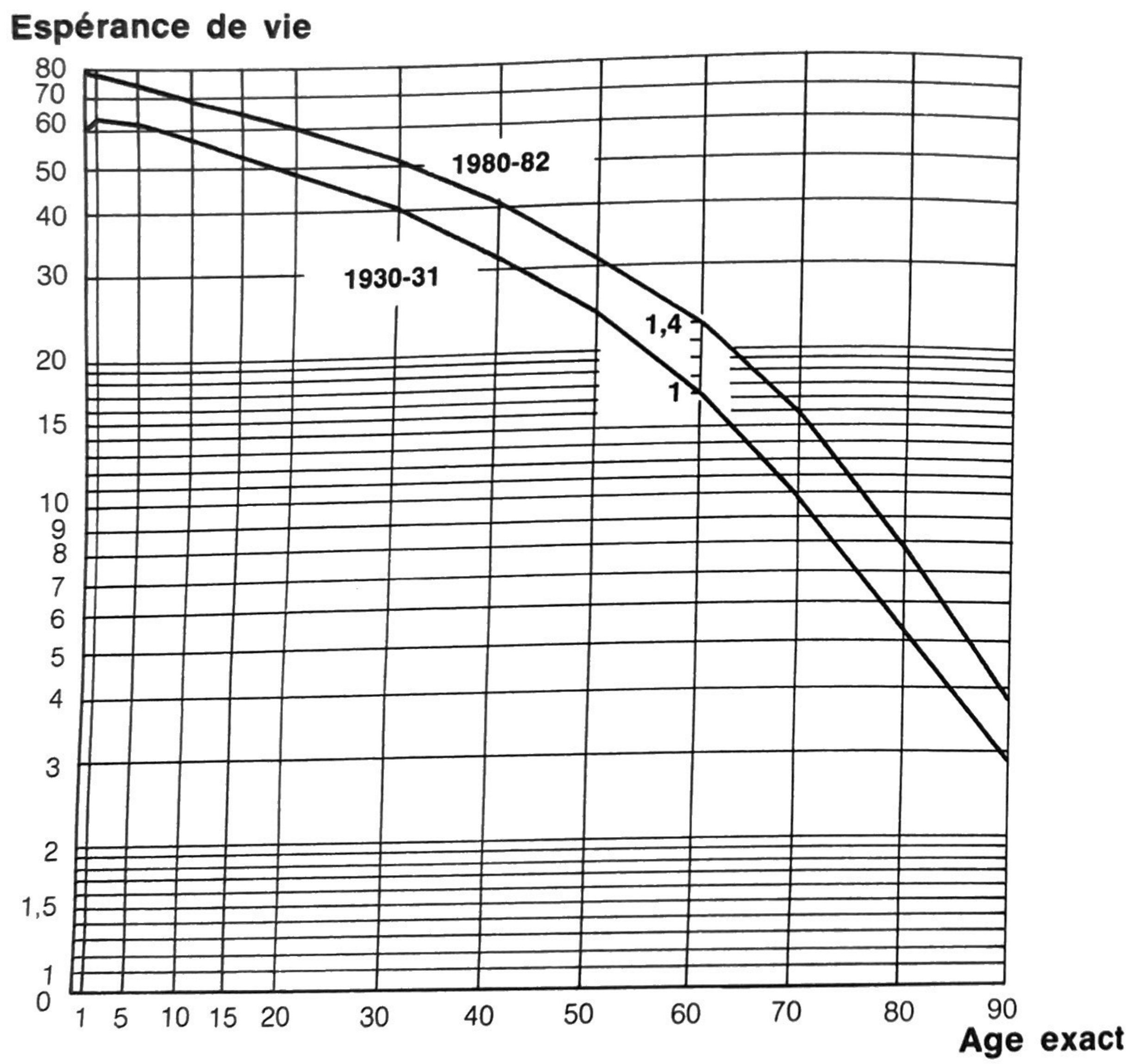
Voici les gains aux différents âges, obtenus par le calcul, mais que l'on pourrait lire directement sur le graphique avec une échelle très fine.

Age exact	Gain en %	Age exact	Gain en %
0	31	40	28
1	24	50	32
5	22	60	39
10	23	70	47
15	24	80	47
20	25	90	28
30	26		

Qu'elle soit absolue ou relative, quel que soit l'âge, la variation de l'espérance de vie est positive et souvent fortement, mais le gain absolu ne fait que décroître avec l'âge tandis que, le gain relatif est minimum à 5 ans et maximum vers 70-80 ans.

Après une chute importante entre la naissance et le premier anniversaire, à partir du 5e anniversaire, le nombre d'années supplémentaires à vivre décroît assez régulièrement.

Le gain relatif selon l'âge est assez stable entre 1 et 30 ans (de 22 à 25 %), mais à 50 ans, il retrouve la valeur qu'il avait à la naissance soit 31 % et à partir de cet âge, croît très fortement pour atteindre plus de 47 % à 80 ans. A 90 ans, il rediminue, se heurtant aux limites biologiques de la vie humaine.



Selon que l'on utilise la variation absolue ou la variation relative, ce sont les nouveau-nés (gain absolu = 18,81 ans) ou les vieillards de 80 ans (gain relatif = 47 %) qui ont le plus bénéficié de la baisse de la mortalité.

— Pour calculer ${}_1q_0$ à partir de la suite des espérances de vie, on fait apparaître dans la somme des années vécues par les nouveau-nés de la table, $e_0\,S_0$, les années vécues par ceux qui sont décédés avant un an et par ceux qui ont survécu jusqu'à cet anniversaire :

$$e_0\,S_0 = 0{,}5\,D(0{,}1) - (e_1 + 1)\,S_1$$

sachant que 0,5 $D(0{,}1)$ = somme des années vécues par les décédés entre 0 et 1 an,
$(e_1 + 1)\,S_1 =$ somme des années vécues par les S_1 au moment de leur décès (e_1 est l'espérance vie à 1 an).

En utilisant les quotients de mortalité de la table, on peut écrire cette équation sous la forme :

$$e_0\,S_0 = 0{,}5\,S_0\,{}_1q_0 + (e_1 + 1)\,S_0(1 - {}_1q_0)$$

puisque $\qquad D(0{,}1) = S_0\,{}_1q_0 \qquad$ et $\qquad S_1 = S_0 - S_0\,{}_1q_0$

d'où $\qquad e_0 = 0{,}5\,{}_1q_0 + (e_1 + 1)(1 - {}_1q_0)$

$$_1q_0(1 + e_1 - 0{,}5) = e_1 - e_0 + 1$$

et

donc

$$_1q_0 = \frac{e_1 - e_0 + 1}{e_1 + 0{,}5}$$

Pour calculer $_1q_0$, on fait apparaître dans la somme des années vécues depuis le premier anniversaire, $e_1 S_1$, les années vécues par ceux qui sont décédés avant 5 ans et celles vécues par les survivants à cet âge :

$$e_1 S_1 = 2\,D(1{,}5) + (e_5 + 4)\,S_5$$

avec $2\,D(1{,}5) =$ somme des années vécues au-delà de 1 an par les décédés entre 1 et 5 ans et $(e_5 + 4)\,S_5 =$ somme des années vécues au-delà de 1 an par les survivants à 5 ans,

d'où

$$e_1 = 2\,{}_4q_1 + (e_5 + 4)(1 - {}_4q_1)$$

et comme précédemment :

$$_4q_1 = \frac{e_5 - e_1 + 4}{e_5 + 2}$$

On effectue le même raisonnement pour obtenir $_5q_5$ et l'on a alors :

$$e_5 S_5 = 2{,}5\,{}_5q_5 + (e_{10} + 5)(1 - {}_5q_5)$$

d'où

$$_5q_5 = \frac{e_{10} - e_5 + 5}{e_{10} + 2{,}5}$$

Enfin la formule générale :

$$e_x S_x = \frac{a}{2}\,{}_1q_0 + (e_{x+a} + a)(1 - {}_aq_x)$$

permet avec les mêmes hypothèses, quelle que soient les valeurs de x et de a, de déterminer le quotient $_aq_x$:

$$_aq_x = \frac{e_{x+a} - e_x + a}{e_{x+a} + \frac{a}{2}}$$

Avec ces formules, on peut donc établir les 2 séries de quotients pour les périodes 1930-1931 et 1980-1982 et le rapport q(1980-1982)/q(1930-1931) correspondant.

— Voici les quotients obtenus (pour 10 000) :

Age	**1930 - 31** (1)	**1980 - 82** (2)	(1)/(2)
0	684	83	0,121
1-4	280	21	0,076
5-9	102	12	0,123
10-14	88	12	0,135

Age	**1930 - 31** (1)	**1980 - 82** (2)	(1)/(2)
15-19	177	24	0,136
20-29	457	58	0,127
30-39	494	95	0,191
40-49	688	207	0,301
50-59	1 182	452	0,382
60-69	2 446	968	0,396
70-79	5 347	2 667	0,499
80-89	9 709	6 881	0,709

Quel que soit l'intervalle d'âge, le risque de décéder a baissé dans de très fortes proportions : 87,9 % (1- 0,121) la première année, et 92,4 % (1- 0,076) entre 1 et 5 ans.

— Pour connaître la part due à la seule baisse de la mortalité infantile dans le gain de 18,18 ans entre les deux périodes, il faut calculer ce qu'aurait été l'espérance de vie dans une population dont la mortalité au-delà de 1 an n'aurait pas bougé, l'espérance de vie e_1 restant égale à ce qu'elle était en 1930-1931 et le risque de mortalité dans la première année étant celui de 1980-1982.

Puisque $e_0 = 0{,}5\ {}_1q_0 + (e_1 + 1)(1 - {}_1q_0)$, dans le cas présent, on aurait donc :

$$e_0 = (0{,}5 \times 0{,}0083) + (63{,}12 + 1)(1 - 0{,}0083) = 63{,}59 \text{ ans}$$

soit un gain absolu de $63{,}59 - 59{,}77 = 3{,}84$ ans et un gain relatif de $3{,}84/18{,}81 = 20{,}4$ %.

Pour calculer ce qu'est le gain dû à la seule baisse de la mortalité entre 1 et 5 ans, on calcule ce que serait l'espérance de vie dans une population ayant le quotient de mortalité infantile et l'espérance de vie à 5 ans de 1930-1931 et le quotient de mortalité entre 1 et 5 ans de 1980-1982.

Sachant que :

$$\begin{aligned} e_0\, S_0 &= 0{,}5\, S_0\, {}_1q_0 + 3\, S_1\, {}_4q_1 + (e_5 + 5)\, S_5 \\ &= 0{,}5\, S_0\, {}_1q_0 + 3\, S_0(1 - {}_1q_0)\, {}_4q_1 + (e_5 + 5)(1 - {}_1q_0)(1 - {}_4q_1) \end{aligned}$$

on aurait ici :

$$\begin{aligned} e_0 = (0{,}5 \times 0{,}0684) + [3(1 - 0{,}0684) \times 0{,}0021] + \\ + (60{,}85 + 5)(1 - 0{,}0684)(1 - 0{,}0021) = 61{,}26 \text{ ans} \end{aligned}$$

soit un gain absolu de $61{,}26 - 59{,}77 = 1{,}49$ ans et un gain relatif de $1{,}49/18{,}81 = 7{,}9$ ‰.

La seule baisse de la mortalité, dans la première année, a donc fait croître l'espérance de vie de 20 % tandis que la baisse dans les 4 années suivantes l'augmentait de moins de 8 ‰.