*Cours « Les principes de l'***Analyse démographique** » **Master 1e année** par Alexandre Avdeev,

Compléments pour le cours sur l'analyse de la fécondité

Notes complémentaires aux matériaux de base disponibles dans les EPI de l'Université Panthéon Sorbonne

Les notes préliminaires

A la différence

- de l'analyse de la **mortalité** basée sur le **modèle d'attrition** d'une population avec le temps (modèle de survie),
  - d'où vient la nature probabiliste des indicateurs (paramètres) de la mortalité
  - et son universalité (applicable à tout passage d'un état à un autre et aux ensembles des objets animés (par ex. les humains, les muches, etc.) et inanimés (par ex. les voitures, les ordinateurs etc.)
- et de l'analyse de **la nuptialité** visant la formation des couples basée sur le **modèle de combinatoire/permutation**,
  - cependant on peut réduire l'analyse de nuptialité à un modèle de survie i.e. premiers mariages ou la primo-nuptialité et y appliquer les principes de la théorie de probabilité
  - sa nature est aussi universelle puisque ce modèle est applicable à tout ensemble humain où l'accouplement a lieu

l'analyse de **la fécondité** s'intéresse à **la production** des naissances (fécondité=productivité)

  - cette productivité dépend ***des facultés physiologiques*** des espèces (la durée de la vie féconde, la fertilité biologique, la durée de gestation, la portée de gestation etc.) qui ***imposent les limites à cette productivité***
  - bien qu'il y ait la possibilité de ***réduire l'analyse de la fécondité à un modèle de survie***, cette réduction est très compliquée et suppose de ***passer à l'analyse de la maternité*** où remplacer la production des naissances par les accouchements (ce qui convient pour les protozoaires avec la *mitose*, et non pour celle avec la *schizogonie*)
  - cependant, pour les espèces ayant la gestation à portée unique (dont les humains) cette réduction se réalise dans le modèle d'une table de fécondité qui (table) n'est pas applicable aux espèces ayant la gestation à portée multiple…

- donc par leur nature les paramètres (indicateurs) de la fécondité
  - ne correspondent pas aux exigences de la théorie de probabilité
  - ne sont pas vraiment autorisés pour certaines opérations mathématiques (additions, multiplication)

Natalité et fécondité :

En démographie (francophone) la notion de la natalité est un élément de l'équation fondamental du mouvement de la population:

<u>En termes du volume :</u>

[Accroissement naturel durant une période *t*] = [nombre de naissances] – [nombre de décès] → $AN_t = N_t - D_t$

<u>En termes des nombres réduits à l'effectif de la population (exposée) :</u>

[taux d'accroissement naturel] = [taux brut de natalité] – [taux brut décès] → $\frac{AN_t}{\overline{P}\cdot t} = \frac{N_t}{\overline{P}\cdot t} + \frac{D_t}{\overline{P}\cdot t} = TBAN = TBN - TBD$

En français on dit « la dénatalité » pour identifier une situation où : $N_t < D_t$ et par conséquent $TBN < TBD$.

Cependant une interprétation du niveau du ***TBN*** et respectivement l'explication des causes de la dénatalité sont difficiles puisque la production des naissances ne dépend que d'une partie de la population à savoir des femmes à l'âge de procréer (de 15 à 50 ans).

Le niveau du ***TBN*** dépend donc

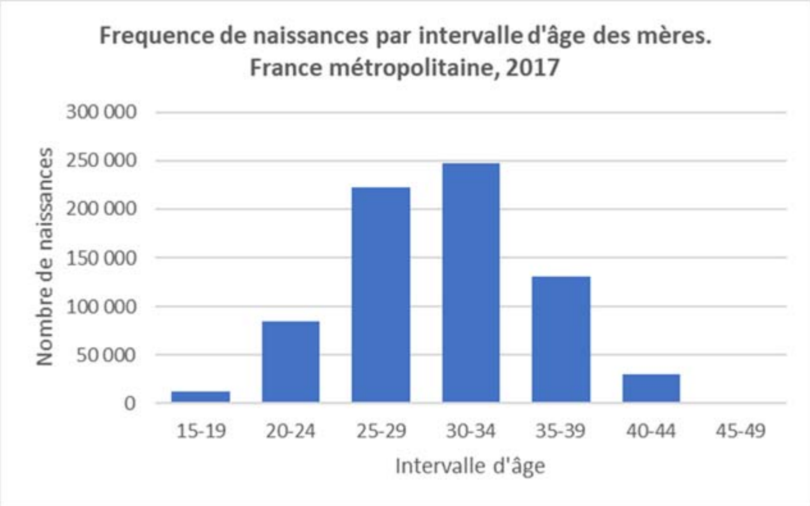
1) de la part des femmes 15-49 ans ($_{35}W_{15}$) dans la population $\frac{_{35}\overline{W}_{15}}{\overline{P}_t}$; et

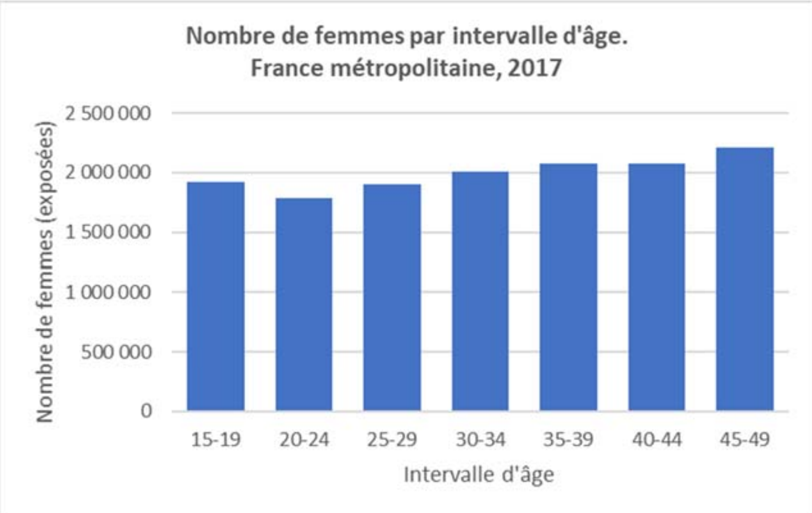
2) de leur productivité procréatrice qu'on peut quantifier comme le rapport ***le nombre de naissance à la population féminine*** âgées 15-49 exposée pendant une période ***t.*** On appelle ce ratio

le taux <u>de fécondité</u> générale (TFG) : $TFG_t = \frac{N_t}{_{35}\overline{W}_{15}\cdot t}$ → $TBN_t = \frac{N_t}{_{35}\overline{W}_{15}} \cdot \frac{_{35}\overline{W}_{15}}{\overline{P}_t} = TFG \cdot \frac{_{35}\overline{W}_{15}}{\overline{P}_t}$

En conclusion: la natalité (taux brut de natalité) dépend de la fécondité générale (taux de fécondité générale) et de la structure de population par sexe et par âge (proportion des femmes de l'âge 15-49 ans).

Principes de calculs des indicateurs de la fécondité : fécondité réduite où les taux de fécondité par âge





Intervalle d'âge	Amplitude d'intervalle d'âge	Nombre de naissances	Nombre de femmes (exposées)	Taux de fécondité par âge (tfsa) pour 1000	Population type (immortelle) au début de l'intervalle d'âge	Population immortelle exposée	Nombre de naissances (population immortelle)	Population féminine de table de mortalité (So=10000)	Nombre de naissances (population de table)	Nombre de naissances de filles (population de table)*
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)=(3)/(4)	(6)	(7)=(6)x(2)	(8)=(7)x(5)	(9)	(10)=(9)x(5)	(11)=δ x (10)
15-19	5	12 501	1 924 553	6.50	1 000	5000	32.5	49 757	323.2	157.7
20-24	5	84 402	1 787 600	47.22	1 000	5000	236.1	49 714	2 347.3	1 145.0
25-29	5	222 883	1 906 032	116.94	1 000	5000	584.7	49 661	5 807.1	2 832.8
30-34	5	247 604	2 011 783	123.08	1 000	5000	615.4	49 591	6 103.5	2 977.3
35-39	5	130 801	2 072 822	63.10	1 000	5000	315.5	49 486	3 122.7	1 523.3
40-44	5	29 870	2 080 585	14.36	1 000	5000	71.8	49 318	708.0	345.4
45-49	5	1 960	2 210 607	0.89	1 000	5000	4.4	49 039	43.5	21.2
total		730 021	13 993 982			35000	1 860.3		18 455.3	9 002.6

Données pour cet exemple: France métro, 2017 ; fichier: ...\Fecondite\Lexis pour fecondite.xlsx

δ – la proportion de filles parmi les naissances moyenne (indépendamment de l'âge des mères) ou spécifique à l'âge

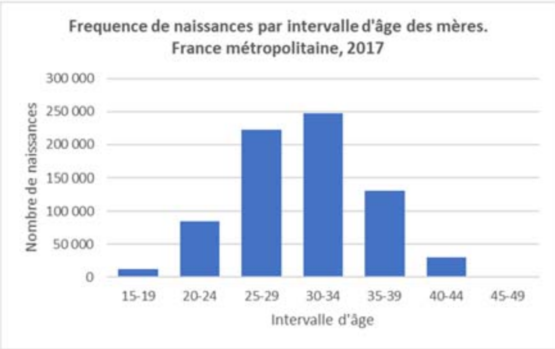
$$TFG = \frac{N}{\overline{W}_{15-49} \cdot t} = \frac{730021}{13.993.892 \cdot 1} \cdot 1000 = 52{,}17‰$$

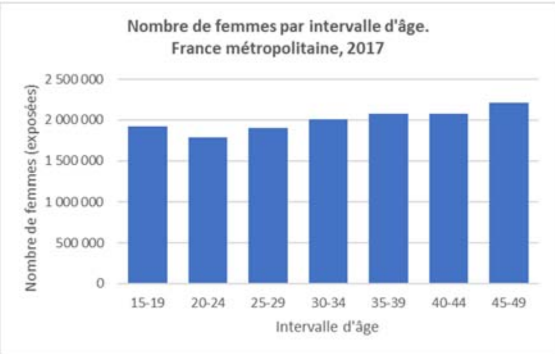
Soit les naissances réduites par âge **ou taux de fécondité spécifique à l'âge - TFSA**

$$TFSA \equiv {}_n f_x = \frac{{}_n N_x}{{}_n\overline{W}_x \cdot t}; \qquad {}_5 f_{15} = \frac{12\,501}{1194\,553 \cdot 1} \cdot 1\,000 = 6{,}50‰;$$

puisque les taux par âge sont annualisés ${}_5 f_{15}$ s'applique à 5 intervalles annuels d'âge: 15, 16, 17,18 et 19

Principes de calculs des indicateurs de la fécondité : rapport entre les taux de fécondité par âge et le taux global de fécondité





Intervalle d'âge	Amplitude d'intervalle d'âge	Nombre de naissances	Nombre de femmes (exposées)	Taux de fécondité par âge (tfsa) pour 1000	Population type (immortelle) au début de l'intervalle d'âge	Population immortelle exposée	Nombre de naissances (population immortelle)	Population féminine de table de mortalité (So=10000)	Nombre de naissances (population de table)	Nombre de naissances de filles (population de table)*
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)=(3)/(4)	(6)	(7)=(6)x(2)	(8)=(7)x(5)	(9)	(10)=(9)x(5)	(11)=δ x (10)
15-19	5	12 501	1 924 553	6.50	1 000	5000	32.5	49 757	323.2	157.7
20-24	5	84 402	1 787 600	47.22	1 000	5000	236.1	49 714	2 347.3	1 145.0
25-29	5	222 883	1 906 032	116.94	1 000	5000	584.7	49 661	5 807.1	2 832.8
30-34	5	247 604	2 011 783	123.08	1 000	5000	615.4	49 591	6 103.5	2 977.3
35-39	5	130 801	2 072 822	63.10	1 000	5000	315.5	49 486	3 122.7	1 523.3
40-44	5	29 870	2 080 585	14.36	1 000	5000	71.8	49 318	708.0	345.4
45-49	5	1 960	2 210 607	0.89	1 000	5000	4.4	49 039	43.5	21.2
total		730 021	13 993 982			35000	1 860.3		18 455.3	9 002.6

Taux de fécondité générale

$$TFG = \frac{N}{\bar{W} \cdot t}$$

Taux de fécondité spécifique à l'âge

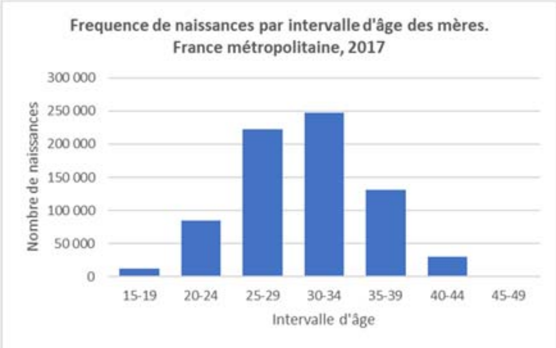
$$TFSA \equiv {}_n f_x = \frac{{}_n N_x}{{}_n \bar{W}_x \cdot t};$$

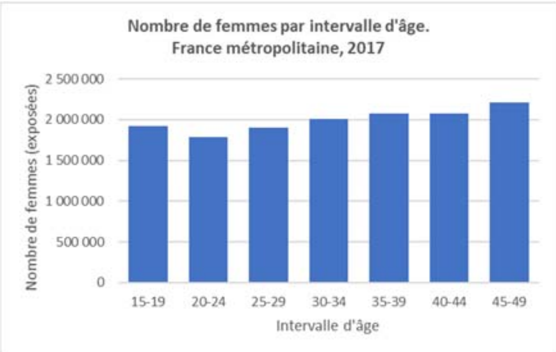
On voit bien que $$TFG = \frac{\sum_{x=15}^{45} {}_n N_x}{\sum_{x=15}^{45} {}_n \bar{W}_x \cdot t} = \frac{\sum_{x=15}^{45} {}_n f_x \cdot {}_n \bar{W}_x \cdot t}{\sum_{x=15}^{45} {}_n \bar{W}_x \cdot t} = \sum_{x=15}^{45} {}_n f_x \cdot \frac{{}_n \bar{W}_x}{\sum_{x=15}^{45} {}_n \bar{W}_x};$$

Le taux de fécondité générale **n'est qu'une moyenne des taux par âge pondérés par la structure par âge des femmes à l'âge fécond**, il dépend donc de la fécondité par âge et de la structure de la population → ***ce n'est un indicateur parfait de de fécondité***

On voit que les taux de fécondité varient beaucoup avec l'âge et aussi bien que la structure de la population par âge, pour neutraliser l'effet de la structure par âge on peut recourir à la standardisation (directe en l'occurrence)

Principes de calculs des indicateurs de la fécondité : la standardisation ou une élimination de l'effet de structure par âge et calcul du taux de fécondité totale (taux comparatif)





Population type

Intervalle d'âge	Nombre de naissances	Nombre de femmes (exposées)	Taux de fécondité par âge (tfsa) pour 1000	**Population type (immortelle) au début de l'intervalle d'âge**	**Population immortelle exposée**	**Nombre de naissances (population immortelle)**	Population féminine de table de mortalité (So=10 000)	Nombre de naissances (population de table)	Nombre de naissances de filles (population de table)
15-19	12 501	1 924 553	6.50	**1 000**	**5 000**	**32.5**	49 757	323.2	157.7
20-24	84 402	1 787 600	47.22	**1 000**	**5 000**	**236.1**	49 714	2 347.3	1 145.0
25-29	222 883	1 906 032	116.94	**1 000**	**5 000**	**584.7**	49 661	5 807.1	2 832.8
30-34	247 604	2 011 783	123.08	**1 000**	**5 000**	**615.4**	49 591	6 103.5	2 977.3
35-39	130 801	2 072 822	63.10	**1 000**	**5 000**	**315.5**	49 486	3 122.7	1 523.3
40-44	29 870	2 080 585	14.36	**1 000**	**5 000**	**71.8**	49 318	708.0	345.4
45-49	1 960	2 210 607	0.89	**1 000**	**5 000**	**4.4**	49 039	43.5	21.2
total	730 021	13 993 982			**35000**	**1 860.3**		18 455.3	9 002.6

Puisque $TFG = \sum_{x=15}^{45} {}_n f_x \cdot \frac{{}_n\overline{P}_x}{\sum_{x=15}^{45} {}_n\overline{W}_x}$; On choisir comme standard une population imaginaire des générations de 1000 femmes immortelles qui sont exposées à la fécondité

Pour cette population TFG ajusté à l'âge = $TFG(AA) = \frac{1}{35\ 000} \cdot \sum_{x=15}^{45} {}_n f_x \cdot 5\ 000 = \frac{1}{35} \cdot \sum_{x=15}^{45} {}_n f_x \cdot 5$

Et le ***nombre total réduit d'enfant***s dans cette ou la fécondité totale réduite = $FTR = \cdot \sum_{x=15}^{45} {}_n f_x \cdot 5 = 5 \cdot \sum_{x=15}^{45} {}_n f_x$

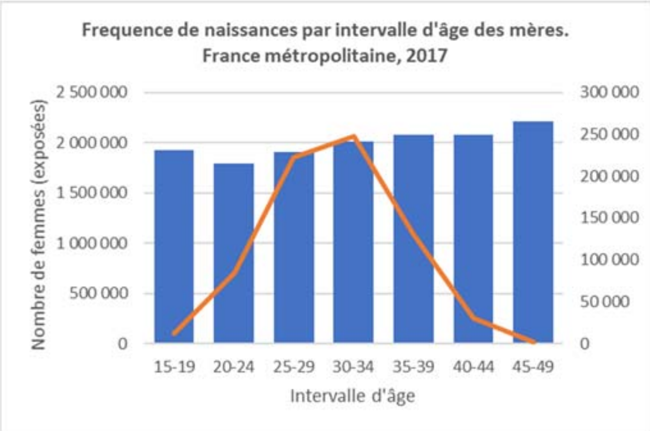
C'un indicateur de la fécondité nette qu'on appelle :

la fécondité totale / la taux de fécondité totale /
la somme des naissances réduites / l'indice conjoncturelle de fécondité / l'indice synthétique de fécondité

$$TFT = n \cdot \sum_{x=15}^{45} {}_n f_x$$

Il a une métrique très convenable pour l'interprétation:
nombre de naissance par femme

Principes de calculs des indicateurs de la fécondité : prise en compte de la mortalité et calculs du taux de reproduction nette



Intervalle d'âge	Nombre de naissances	Nombre de femmes (exposées)	Taux de fécondité par âge (tfsa) pour 1000	Population type (immortelle) au début de l'intervalle d'âge	Population immortelle exposée	Nombre de naissances (population immortelle)	Population féminine de table de mortalité (So=10000)	Nombre de naissances (population de table)	Nombre de naissances de filles (population de table)
15-19	12 501	1 924 553	6.50	1 000	5000	32.5	49 757	323.2	157.7
20-24	84 402	1 787 600	47.22	1 000	5000	236.1	49 714	2 347.3	1 145.0
25-29	222 883	1 906 032	116.94	1 000	5000	584.7	49 661	5 807.1	2 832.8
30-34	247 604	2 011 783	123.08	1 000	5000	615.4	49 591	6 103.5	2 977.3
35-39	130 801	2 072 822	63.10	1 000	5000	315.5	49 486	3 122.7	1 523.3
40-44	29 870	2 080 585	14.36	1 000	5000	71.8	49 318	708.0	345.4
45-49	1 960	2 210 607	0.89	1 000	5000	4.4	49 039	43.5	21.2
total	730 021	13 993 982			35000	1 860.3		18 455.3	9 002.6

Taux de fécondité générale $TFG = \frac{N}{{}_{35}\bar{W}_{15} \cdot t}$ Taux de fécondité totale $TFT = n \cdot \sum_{x=15}^{45} {}_n f_x$ Taux de fécondité par âge $f_x = \frac{{}_nN_x}{{}_n\bar{W}_x \cdot t}$;

Dans une population immortelle le ratio de reproduction des générations équivaut le taux de croissance qui dépend de la fécondité totale et de la proportion des filles (la reproduction sexuée). Chez les humains le rapport normal de sexes à la naissance est 105 garçons pour 100 filles, donc la proportion de fille ***δ= 100/(100+105)=0,488***, et on calcule

le taux brut de reproduction: $$TBR = \delta \cdot TFT = \delta \cdot n \cdot \sum_{x=15}^{45} {}_n f_x$$

Dans une population soumise à la mortalité par âge le ratio (le taux) de reproduction dépend de la survie des femmes de la naissance à la fin de l'âge fécond et les années d'exposition à la fécondité correspondent à la population d'une table de mortalité calculée pour cette population ${}_nL_x$, on peut donc calculer

le taux net de reproduction: $$TNR == \frac{\delta \cdot \sum_{x=15}^{45} {}_n f_x \cdot {}_nL_x}{S_0}$$

__Nota:__ on peut utiliser les taux de naissances féminines par âge, si ces données sont disponibles

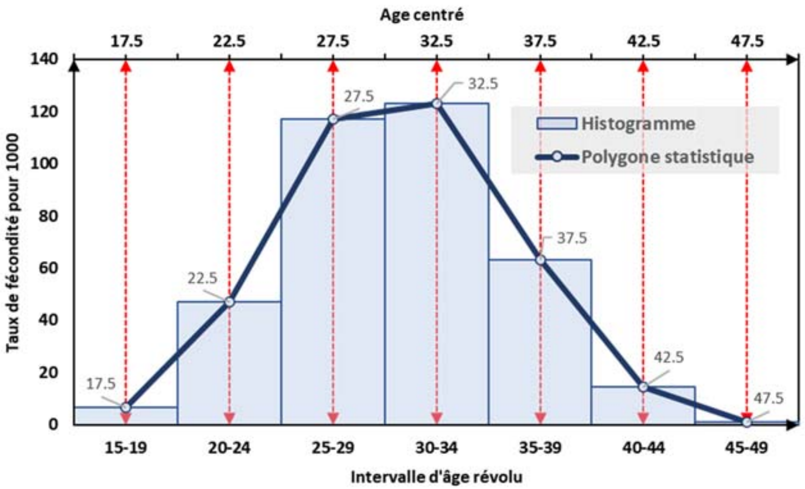
Analyse de la fécondité par âge : répartition, densité, tendance centrale et dispersion

Naissances, population féminine et les taux de fécondité par âge.

Intervalle d'âge	Ampli-tude	Nombre de naissances	Nombre de femmes (exposées)	Taux centré de fécondité par âge pour 1000	Centre d'intervalle d'âge	Présentation conventionnelle des intervalle d'âge révolu
$x, x+n$	n_x	${}_nN_x$	${}_nW_x$	${}_nf_x$	$\bar{y}_x$	y_x
15-20	5	12 501	1 924 553	6,50	17,5	15-19
20-25	5	84 402	1 787 600	47,22	22,5	20-24
25-30	5	222 883	1 906 032	116,94	27,5	25-29
30-35	5	247 604	2 011 783	123,08	32,5	30-34
35-40	5	130 801	2 072 822	63,10	37,5	35-39
40-45	5	29 870	2 080 585	14,36	42,5	40-44
45-50	5	1 960	2 210 607	0,89	47,5	45-49
total		730 021	13 993 982	xxx	xxx	

Données pour cet exemple: France métro, 2017

Modes de présentation graphique (visualisation) des taux de fécondité par âge



Particularités à noter:

- L'âge révolu est catégorisé: les intervalles d'âge annuels ou pluriannuels (quinquennaux)
- Les taux sont ***centrés*** représentant une valeur moyenne sur l'intervalle, applicable à tous les âges (révolus) à l'intérieure de chaque intervalle [x, x+n)
- Les taux sont naturellement ordonnés et repartis en fonction de l'âge (à chaque âge correspond un taux)

Les taux par âge $\, {}_nf_x = \frac{{}_nN_x}{{}_nW_x \cdot t}$; représentent donc une série (de répartition) d'une variable quantitative qui peut être chartérisée par des paramètres de :

a) **sa tendance centrale (moyenne, médian, mode)**

b) **sa dispersion (écart-type),**

c) **sa forme (aplatissement, dysmétrie)**

d) sa grandeur intégrale

Pour les taux de type *'âge x période' et 'âge x génération'*

a) l'âge moyen de la fécondité : $\bar{x} = \dfrac{\sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} \left[\left(x+\frac{n_x}{2}\right)\cdot {}_nf_x \right]}{\sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} {}_nf_x}$ si $\boldsymbol{n_x}$ sont les mêmes $\bar{x} = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} x\,{}_nf_x}{\sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} {}_nf_x}$

On peut par ailleurs calculer le mode et la médiane, mais il suffit d'indique l'intervalle d'âge

b) écart type d'âge de la fécondité : $s_x = \sqrt[2]{\dfrac{\sum_{x=15}^{x=50-n}\left[\bar{x}-\left(x+\frac{n}{2}\right)\right]^2 \cdot {}_nf_x}{\sum_{x=15}^{x=50-n} {}_nf_x}}$ ou bien : $s_x = \sqrt[2]{\overline{x^2}-\bar{x}^2}$ (formule de König)

Pour les taux de type 'génération x période' (âge atteint) formules deviennent : $\bar{x} = \dfrac{\sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} x\,{}_nf_x}{\sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} {}_nf_x}$

c) les indicateurs de la forme se calculent de même façon (voir le cours d'analyse statistique), mais dans la pratique courante ces indicateurs n'apparaissent que rarement voire jamais (à tort)

Habituellement **un graphique de type histogramme ou polygone** suffit pour juger la forme de la répartition de la densité fécondité par âge (cf. graphique à gauche)

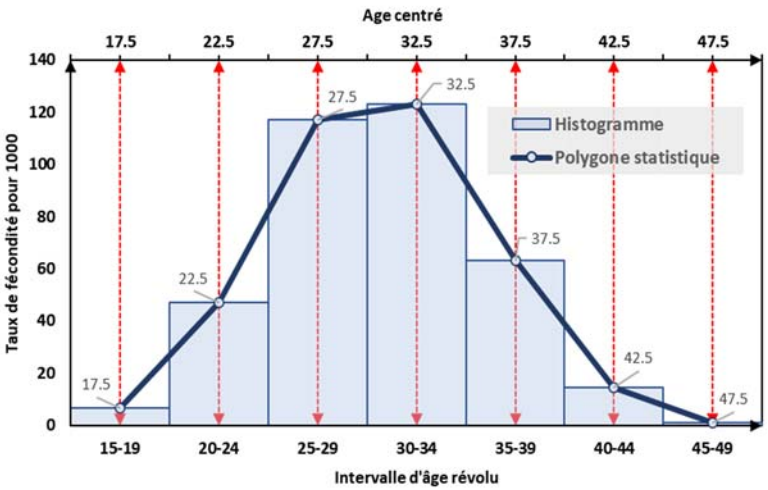
Analyse de la fécondité par âge : niveau intégral et niveau moyen

Naissances, population féminine et les taux de fécondité par âge.

Intervalle d'âge	Ampli-tude	Nombre de naissances	Nombre de femmes (exposées)	Taux centré de fécondité par âge pour 1000	Centre d'intervalle d'âge	Présentation conventionnelle des intervalle d'âge révolu
$x, x+n$	n_x	${}_nN_x$	${}_nW_x$	${}_nf_x$	$\bar{y}_x$	y_x
15-20	5	12 501	1 924 553	6,50	17,5	15-19
20-25	5	84 402	1 787 600	47,22	22,5	20-24
25-30	5	222 883	1 906 032	116,94	27,5	25-29
30-35	5	247 604	2 011 783	123,08	32,5	30-34
35-40	5	130 801	2 072 822	63,10	37,5	35-39
40-45	5	29 870	2 080 585	14,36	42,5	40-44
45-50	5	1 960	2 210 607	0,89	47,5	45-49
total		730 021	13 993 982	xxx	xxx	

Données pour cet exemple: France métro, 2017

Présentation (visualisation) des taux de fécondité par âge



Particularités à noter:

- L'âge révolu est catégorisé: les intervalles d'âge annuels ou pluriannuels (quinquennaux)
- Les taux sont ***centrés*** représentant une valeur moyenne sur l'intervalle, applicable à tous les âges (révolus) à l'intérieur de chaque intervalle [x, x+n)
- Les taux sont naturellement ordonnés et repartis en fonction de l'âge (à chaque âge correspond un taux)

Les taux par âge ${}_nf_x = \frac{{}_nN_x}{{}_nW_x \cdot t}$; représentent donc une série (de répartition) d'une variable quantitative qui peut être chartérisée par des paramètres de :

a) sa tendance centrale (moyenne, médian, mode)

b) sa dispersion (écart-type),

c) sa forme (aplatissement, dysmétrie)

d) sa grandeur intégrale

---

d) la grandeur se mesure par rapport à la surface de l'histogramme représentant la répartition de la densité des taux par âge (la densité des naissances réduites) elle dépend donc de la hauteur des rectangle (taux) et des amplitude des intervalles

soit

avec une moyenne arithmétique des taux par âge : ${}_{35}f_{15} = \frac{\sum_{x=15}^{50-n_{45}} n_x \cdot {}_nf_x}{\sum_{x=15}^{50-n_{45}} n_x}$

Si les « n » sont égaux, il suffit de diviser la somme des taux par le nombre d'intervalle d'âge

On voit dans cette formule que ${}_{35}f_{15}$ ***correspond au taux de fécondité générale ajusté à l'âge* (TFGaa)**

soit

avec un intégral ou le total des surface de tous les rectangles ou la **Fécondité Totale :** $FT = \sum_{x=15}^{50-n_{45}} n_x \cdot {}_nf_x$

Cet indicateur est communément désigné comme **Indicateur conjoncturel de fécondité** (cf. INSEE), synonymes en français : **Indice Synthétique de Fécondité** ou la **Somme des Naissances Réduites** (INED)
Sinon **Taux de Fécondité Totale** (Caselli, Valin, Wunch, 2001, *DAS*, vol.1, p.286)

Ces deux indicateurs sont isomorphes : $\boxed{FT = 35 \cdot {}_{35}f_{15}}$

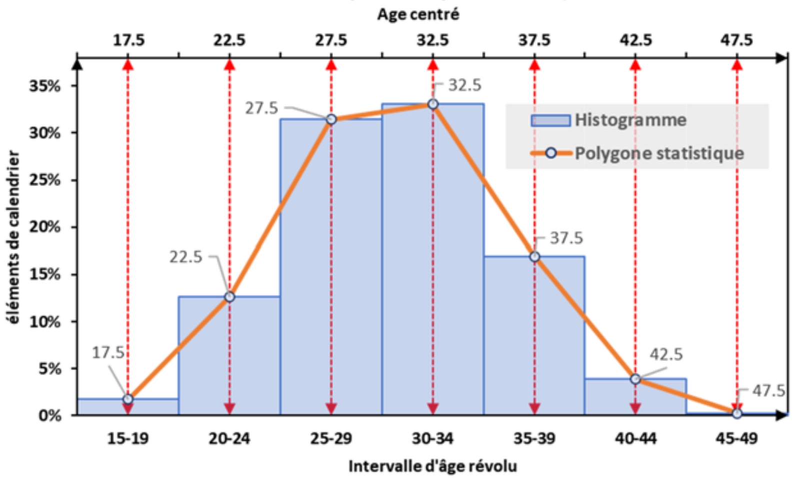
Analyse de la fécondité par âge: niveau (quantum) et calendrier (tempo) de la fécondité

Naissances, population féminine et les taux de fécondité par âge.

Intervalle d'âge	Ampli-tude	Nombre de naissances	Nombre de femmes (exposées)	Taux centré de fécondité par âge pour 1000	Centre d'intervalle d'âge	Taux de fécondité réduits (%)
$x, x+n$	n_x	${}_nN_x$	${}_nW_x$	${}_nf_x$	$\bar{y}_x$	φ_x
15-20	5	12 501	1 924 553	6,50	17,5	1,7%
20-25	5	84 402	1 787 600	47,22	22,5	12,7%
25-30	5	222 883	1 906 032	116,94	27,5	31,4%
30-35	5	247 604	2 011 783	123,08	32,5	33,1%
35-40	5	130 801	2 072 822	63,10	37,5	17,0%
40-45	5	29 870	2 080 585	14,36	42,5	3,9%
45-50	5	1 960	2 210 607	0,89	47,5	0,2%
total		730 021	13 993 982	xxx	xxx	100,0%

Données pour cet exemple: France métro, 2017

Présentation (visualisation) des éléments de calendrier
(l'échelle de l'âge de gauche est seule différence avec le graphique sur la diapositive précédente)



a) l'âge moyen de la fécondité : $\bar{x} = \frac{n}{2} + \frac{\sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} x \, {}_n f_x}{\sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} {}_n f_x}$

b) écart type de l'âge de la fécondité : $s_x = \sqrt[2]{\frac{\sum_{x=15}^{x=50-n} \left[\bar{x} - (x + \frac{n}{2})\right]^2 \cdot {}_n f_x}{\sum_{x=15}^{x=50-n} {}_n f_x}}$

ces paramètres 'a)' et 'b)' sont normalisés, (réduits à la somme des taux) ils sont donc indépendants de la grandeur des taux

Soit

${}_n\varphi_x = \frac{{}_n f_x}{\sum_x {}_n f_x}$ les taux de fécondité normalisés (réduits à leur somme sur l'intervalle de 15 à 50 ans), →

→ $\sum_x {}_n\varphi_x = 1$ et avec cette écriture l'âge moyen de la fécondité : $\bar{x} = \frac{n}{2} + \sum_{x=15}^{x=50-n_{45}} x \, {}_n\varphi_x$

la densité de la fécondité par âge réduite est

- identique à la densité de la fécondité par âge,
- indépendant du niveau de la fécondité totale

→ **on considère ${}_n\varphi_x$ comme les éléments du calendrier de la fécondité ou le '*tempo' de fécondité***

c) la fécondité totale $TFT = n \cdot \sum_{x=15}^{50-n_{45}} {}_n f_x$ à son tours ne dépend pas de la structure des taux par âge ou du calendrier de la fécondité (1+2 ≡ 2+1) par conséquent:

on considère le *TFT* comme le niveau ou 'quantum' de la fécondité

Analyse transversale de la fécondité par rang de naissance :

Soit $_nW_x$ – effectif des femmes d'âge entre x et x+n indépendamment de leur descendance

$_nN_x$ – naissances de rang (de parité) i chez les femmes d'âge entre x et x+n

$_nf_x^i = \frac{_nN_x^i}{_nW_x}$ – le taux de fécondité de **rang *i*** par âge des mères

NB : *on utilise les taux de deuxième catégorie qui sont additifs :* avec dénominateur commun

Alors $\boxed{TFT^i = n \cdot \sum_{x=\alpha}^{\omega-n} {_nf_x^i}}$ – indice synthétique de fécondité de rang ***i*** (interprété comme un nombre moyen d'enfants de rang i nés vivants par une femme dans une génération fictive)

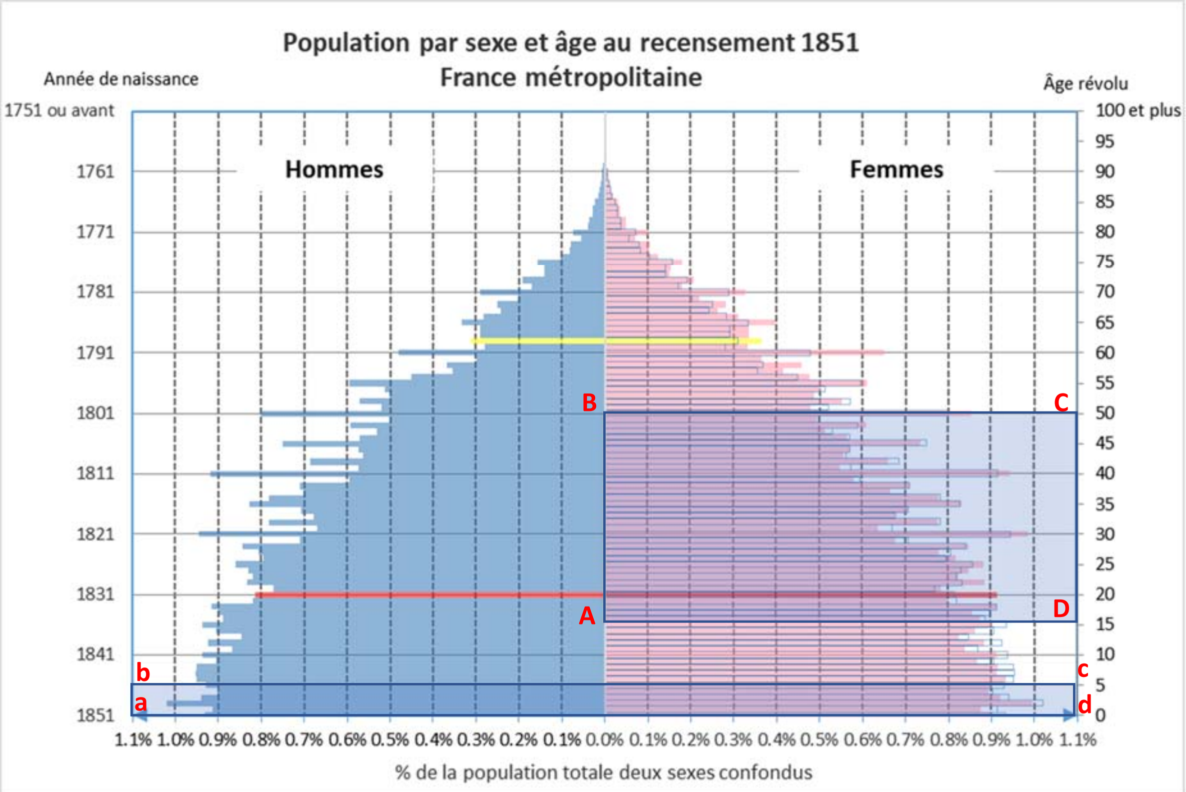
Puisqu'on utilise dans ces calculs les taux de deuxième catégorie les *TFT*^{i} se résument par addition en le TFT général (tous rangs confondus) :

$$\boxed{TFT = \sum_{k=1}^{m} TFT^i = n \cdot \sum_{k=1}^{m} \sum_{x=\alpha}^{\omega-n} {_nf_x^i}}$$

Pour chaque rang de naissance on peut calculer l'âge moyen à la maternité (de rang i) :

$$\boxed{AMM^i = \frac{n}{2} + \frac{\sum_{x=15}^{49-n} x \cdot {_nf_x^i}}{\sum_{x=15}^{49} {_nf_x^i}} = \frac{n}{2} + n \cdot \frac{\sum_{x=15}^{49-n} x \cdot {_nf_x^i}}{TFT^i}}$$

Estimations indirectes des indicateurs de la fécondité à partir des données d'un Recensement général de population ou d'une enquête sur échantillon



On peut estimer la fécondité totale (taux de fécondité totale / indice synthétique) sans prise en considération de la mortalité des enfants < 5 ans

Pour la France en 1851: $FT = \dfrac{35 \cdot {}_{35}\hat{f}_{15}}{1000} = \dfrac{35 \cdot 78,5}{1000} = 2,75$

Estimation du TGF ($_{35}\hat{f}_{15}$) moyen pour 5 ans qui précédent le RGP ou une enquête :

Le rectangle **abcd** représentant le nombre d'enfants âgés 0-4 ans révolus ***P(0-4)*** à la date de la collecte des données et le rectangle **ABCD** l'effectif de femmes âgées de 15 à 50 ans ***W(15-49)***

le ratio enfants/mères (REM) $= \dfrac{\text{Nombre d'enfant 0-4 ans}}{\text{Nombre de femmes 15-49}}$

Soit *B* le nombre de naissance moyen annuel durant 5 ans proportionnel à l'effectif de la population 0-4 ans dans la mesure de la table de mortalité du moment :

$$\frac{B}{P(0-4)} \approx \frac{l_0}{{}_5L_0} \rightarrow B = \frac{P(0-4) \cdot l_0}{{}_5L_0}$$

$$_{35}\hat{f}_{15} = \frac{l_0 \cdot P(0-4)}{{}_5L_0 \cdot W(15-49)} = REM \cdot \frac{l_0}{{}_5L_0}$$

Pour la France en 1851 $_5L_0 \approx 4265$ avec $\boldsymbol{S_0}$ =1000* et

$$REM = \frac{3\,321\,819}{9\,355\,995} = 0{,}355$$

Taux de fécondité générale $_{35}\hat{f}_{15} = \left(0,355 \cdot \dfrac{1000}{4265}\right) \cdot 1000 = 78,5‰$

$$ISF \approx {}_{35}\hat{f}_{15} \cdot 35 = 2,75$$

---

* cf. JN Bonneuil «Table de mortalité France et par département et tables de migration nette par département, 1806-1906, INED https://table-mortalite-bonneuil.site.ined.fr/

La quantification de la fécondité dans la dimension longitudinale (générationnelle): de la réalité à une artifice

Soit
x – début de d'un intervalle d'âge ;
n – amplitude d'intervalle d'âge
W_x – effectif d'une génération féminine à l'âge x (exacte) ;
$_nN_x$ – nombre de naissances produites par les femmes sur l'intervalle d'âge entre x et x+n ;

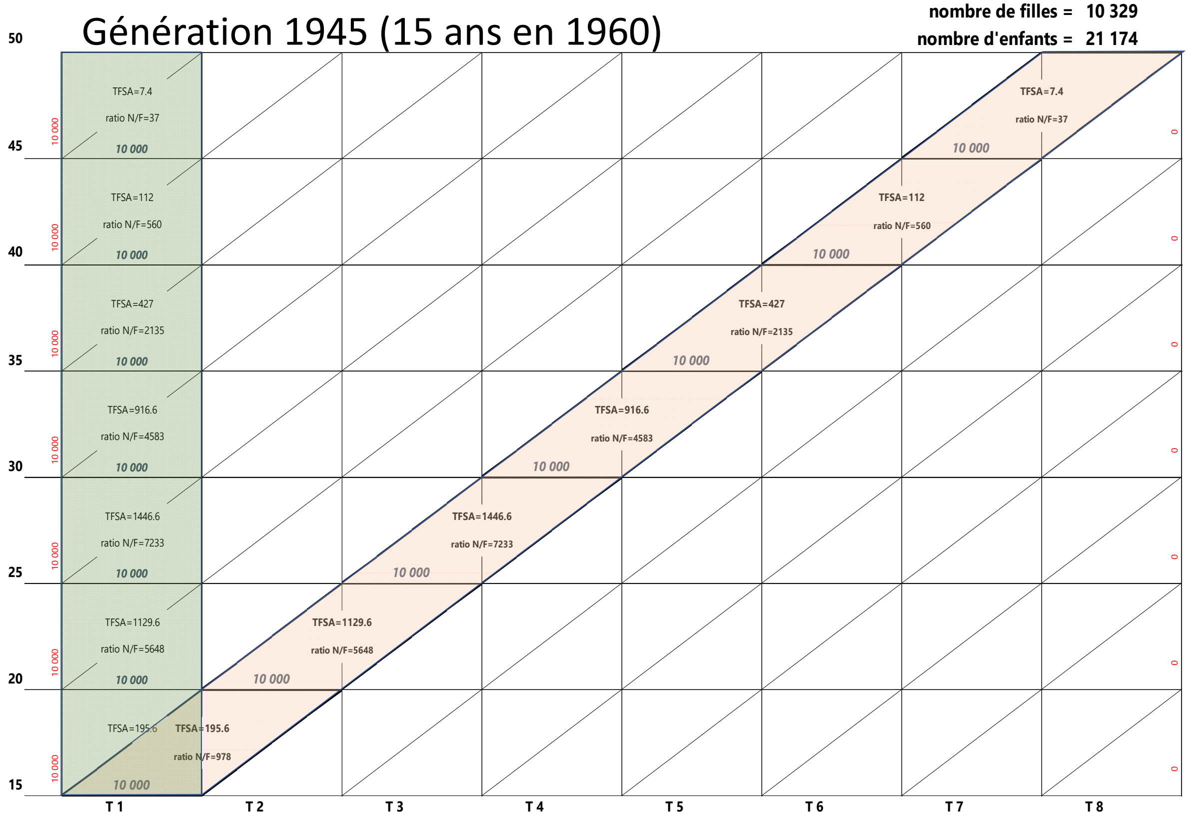
Il n'y pas de migration, ni mortalité on pourrait donc calculer avec le respect des règles mathématiques et la nature des données

les taux de fécondité spécifique à l'âge (TFSA) : $${}_nf_x = \frac{{}_nN_x}{0,5\cdot(W_x + W_{x+n})\cdot n}$$

les quotients de fécondité spécifique à l'âge ou ratios de naissances aux femmes à l'âge exacte **x** (ratio N/F) : $${}_nF_x = \frac{{}_nN_x}{W_x} \equiv n\cdot {}_nf_x$$

la descendance finale ou le nombre moyen d'enfants par femme à l'âge de 50 ans avec 3 approches et 3 formules équivalentes :

$$DF = \frac{\sum_{x=15}^{50-n} {}_nN_x}{W_{50}} \quad (1) \qquad DF = \sum_{x=15}^{50-n} {}_nF_x \quad (2) \qquad DF = n\cdot\sum_{x=15}^{50-n} {}_nf_x \quad (3)$$



Si la mortalité (et migration) intervient dans notre population, les trois formules pour la descendance finale (*DF*) ne sont plus équivalentes:

- la formule (1) surestime la fécondité finale puisque le dénominateur est réduit à cause de la mortalité par rapport à l'effectif de la population procréatrice (exposée);
- la formule (2) viole les règles mathématique d'addition des quotients (dénominateur n'est plus commun)
- la formule (3) reste conforme à la mathématique, mais *elle transforme la génération réelle en génération longitudinale hypothétique*, on passe donc de l'analyse d'un objet réel à un artifice d'une fonction des taux de fécondité ($_nf_x$) avec les âges catégorisés et ordonnés ou ***f(x)*** si l'âge est continu….

La présentation et la quantification de la fécondité dans la dimensions transversale (conjoncturelle)

Soit

x – début de d'un intervalle d'âge ;

n – amplitude d'intervalle d'âge

W_x – effectif d'une génération féminine à l'âge x (exacte) ;

${}_nN_x$ – nombre de naissances produites par les femmes sur l'intervalle d'âge entre x et x+n ;

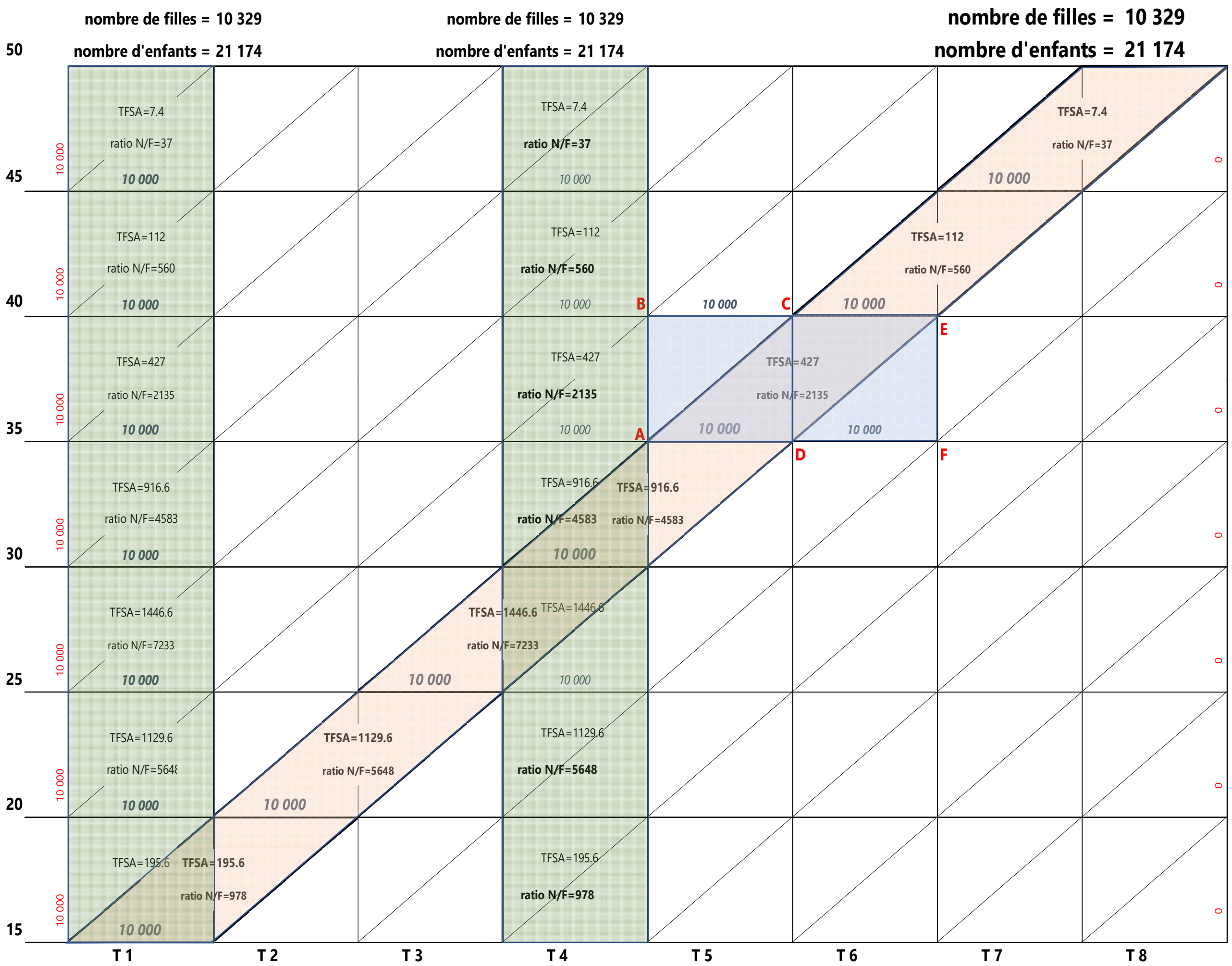
En admettant l'hypothèse de la stationnarité, on reconnaît identique :

- le nombre et la répartition des événements situés dans les carrés ***ABCD, DCEF*** et dans le losange ***ACED***
- la structure par âge et le niveau de la fécondité de la génération T1 (diagonale) et de la population féminine multigénérationnelle T4 (colonne)

Cette hypothèse (stationnarité) est utile puisqu'elle permet de faire les prévisions pour le nombre de naissances surtout à court terme.

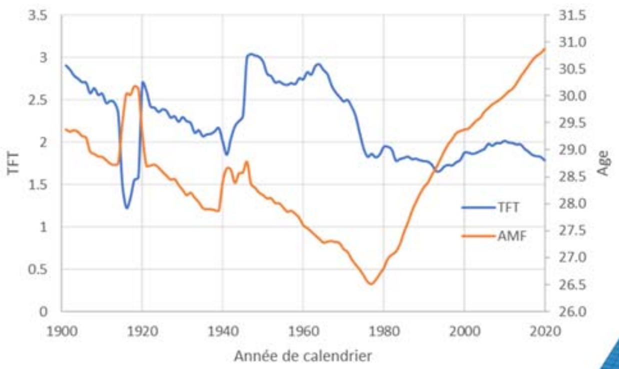
Toutefois, elle ne donne aucune raison pour interpréter la dynamiques de la fécondité totale (transversale) de même sorte que la dynamique de la descendance finale.

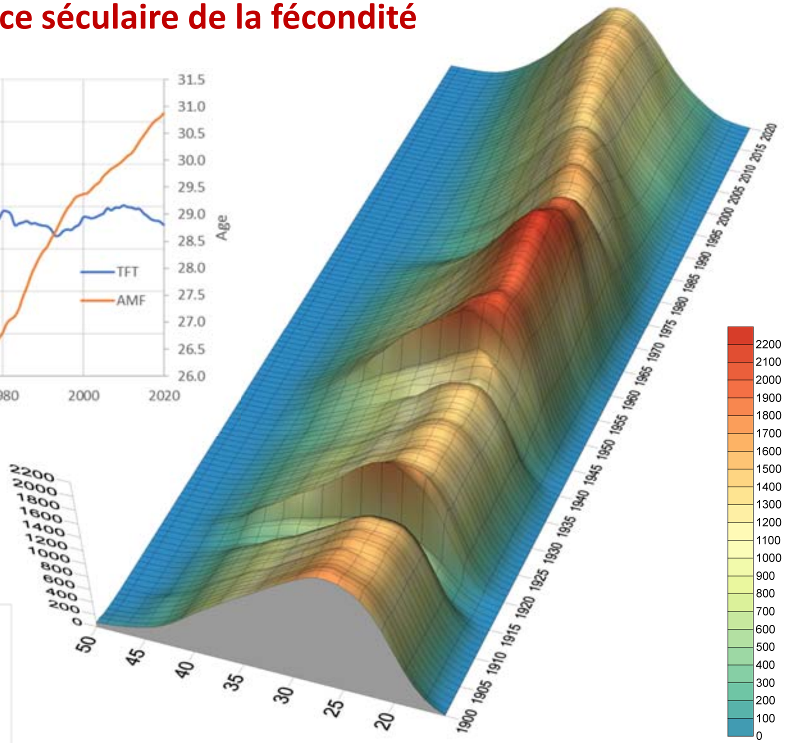
L'hypothèse de stationnarité, par la définition, suppose qu'il n'y a aucune dynamique (ou qu'elle est très faible), mais si la dynamique existe il se peut que les changements dans le calendrier de fécondité des générations (tempo) sans changement du niveau (quantum) provoquent la variation de la fécondité totale (transversale)



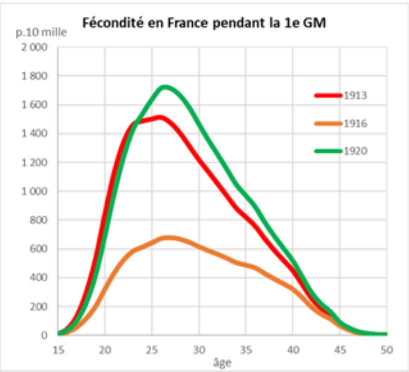
Analyse visuelle de l'évolution séculaire de la fécondité en France à partir des taux par âge

Tendance séculaire de la fécondité

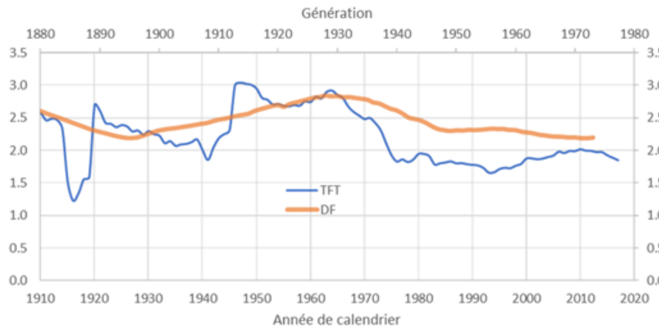




Effet de la période
toutes les générations
sont concernées

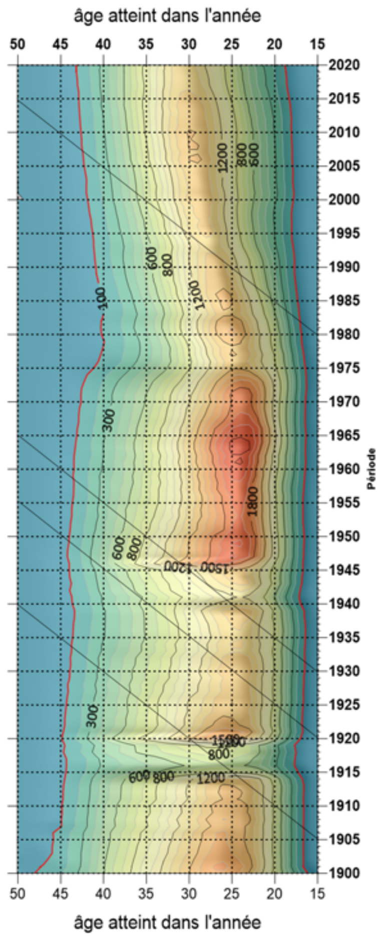


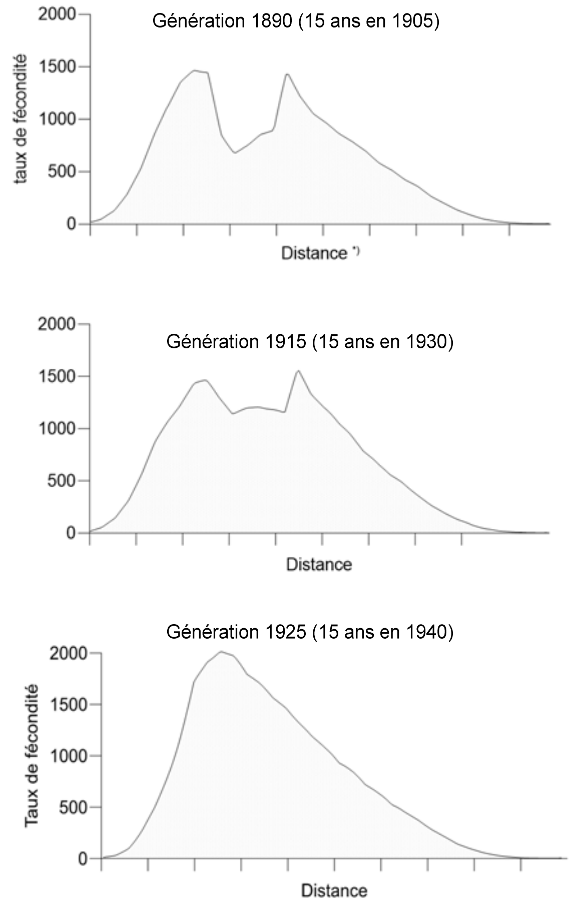
Mais la fécondité des générations résiste



Cours « Analyse démographique »
pour Master de démographie , IDUP
par Alexandre Avdeev, IDUP © 2022

Découpage « générationnel »
(illustration de la récupération après une crise)





Pli de Ryder où l'effet de la 'translation' ou de l'interférence entre le tempo (changement du calendrier) et le quantum (le niveau) de la fécondité

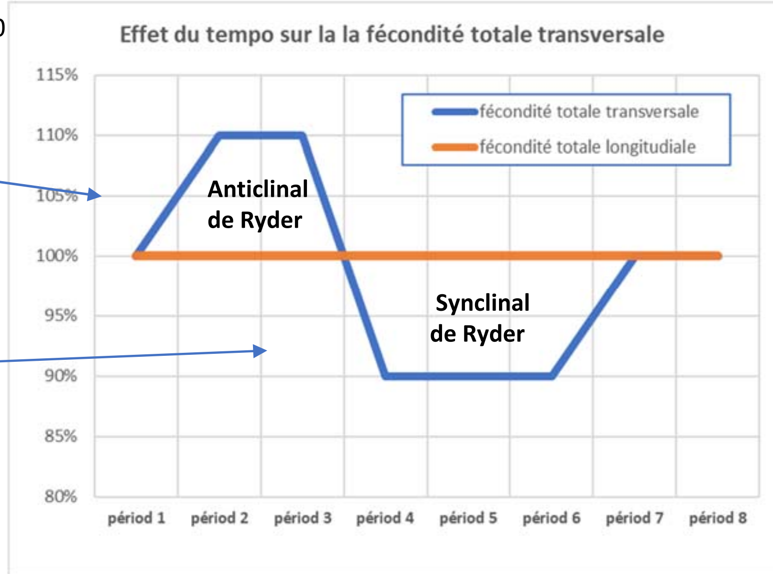
Effet du tempo sur la la fécondité totale transversale

Contribution des âges plus élevés à la fécondité totale →	60%	60%	50%	40%	50%	60%	70%	70%	70%
Contribution des âges jeunes à la fécondité totale →	40%	50%	60%	50%	40%	30%	30%	30%	30%
fécondité totale transversale	100%	110%	110%	90%	90%	90%	100%	100%	
fécondité totale longitudiale	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	

- A la fin de la transition démographique la fécondité des générations devient plus jeune à cause de la disparition des naissances des rangs élevés: dans cet exemple on voit le passage du rapport 40/60 à d'abord 50/50 et ensuite à 60/40
  - TFT transversal > TFT longitudinal
  - TFT transversal augmente

  } Anticlinal de Ryder
  - toutefois l'âge moyen à la primo-fécondité ne bouge pas trop…
  - si la fécondité des générations (longitudinale) diminue, cela n'est pas affiché par la dynamique des indicateurs transversaux
- La fécondité des générations (longitudinale) recule à cause de la "gender transition" où la seconde transition démographique (?)
  - TFT transversale < TFT longitudinale
  - TFT transversale TFR diminue habituellement

  } Synclinal de Ryder
  - si la fécondité des générations diminue, cela est accompagnée par la diminution exagérée de la indicateur conjoncturel
  - inversement, l'augmentation de la fécondité des générations n'est pas affichée (cachée) par la dynamique de l'indicateur conjoncturel



D:\Documents\At_use\Dossier2020\Oxford\Calculs\Tempo-effect.xlsx

<u>Démonstrations mathématiques sont présentées en détails dans :</u>

Ryder, N. (1964) – "The process of demographic translation". *Demography*, 1964, Vol. 1 no.1, p. 74-82

Bongaarts, J. and G. Feeney (1998) – "On the quantum and tempo of fertility". *Population and Development Review*, 1998, vol. 24 no 2, p. 271-291

Une solution pour la quantification de l'effet de translation voir l'EPI, cours régulier, thème 8, diapo 18-24

Analyse de la fécondité par rang de naissances :

probabilité d'agrandissement de la famille (PAF)

La probabilité d'agrandissement des familles (PAF)

Soit a_i la probabilité qu'une femme ayant ***i*** enfants donne la naissance à un autre enfant

$$a_0 = \frac{DF(1)}{1} = DF(1);$$

$$a_1 = \frac{DF(2)}{DF(1)};$$

$$a_2 = \frac{DF(3)}{DF(2)};$$

....

$$a_k = \frac{DF(k+1)}{DF(k)}$$

Ainsi

$a_0 \equiv$ (proportion des femmes ayant des enfants ou la descendance finale de ***rang 1)*** $\equiv$ probabilité d'avoir au moins un enfant.

Donc a_k est la probabilité d'agrandissement des familles de parité ***k***

La signification exacte de la probabilité d'agrandissement des familles ***(***a_k***)*** est suivante : c'est la proportion des femmes qui ont ***k+1*** enfants parmi celles qui ont ***k*** enfants, ➔ ou c'est la fréquence de passage de la parité ***k*** à la parité ***k+1***

La proportion des femmes sans enfants p_0 est égale à $p_0 = 1 - DF(1)$ ***et*** $DF(1) = 1 - p_0$

Respectivement, soit p_1 proportion des femmes ayant un enfant unique, alors ➔

$p_1 = DF(1) - DF(2)$ et $DF(2) = DF(1) - p_1$ ou $DF(2) = 1 - p_0 - p_1$

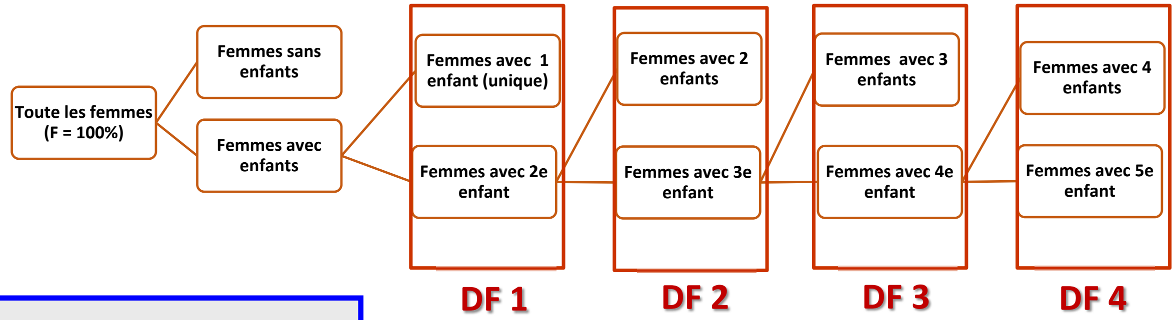
$p_2 = DF(2) - DF(3)$ et $DF(3) = DF(2) - p_2$

ou $DF(3) = 1 - p_0 - p_1 - p_2$

La probabilité d’agrandissement des familles (suite)

On peut décrire la probabilité d’agrandissement des familles avec une expression contenant $\boldsymbol{p_k}$ *(proportion des femmes avec un enfant de parité* ***k****)* :

« arbre de probabilité »



$$a_0 = DF(1) = 1 - p_0;$$

$$a_1 = \frac{DF(2)}{DF(1)} = \frac{1 - p_0 - p_1}{1 - p_0};\ \ etc...$$

$$a_k = \frac{DF(k)}{DF(k-1)} = \frac{1 - \sum_{k=0}^{k} p_k}{1 - \sum_{k=0}^{k-1} p_k} = 1 - \frac{p_k}{1 - \sum_{k=0}^{k-1} p_k}$$

$$DF(1) = a_0;$$

$$DF(2) = a_1 \cdot DF(1) = a_1 \cdot a_0;\ \ etc...$$

$$DF(k) = a_{k-1} \cdot DF(k-1) = \prod_{k=0}^{k-1} a_k$$

$$DF = \sum_{k=1}^{\omega} DF(k) = a_0 + a_0 a_1 + ... + \prod_{j=0}^{\omega-1} a_j$$

Pour l’intervalle fermé-ouvert (décomposition de la DF_{n+}) :

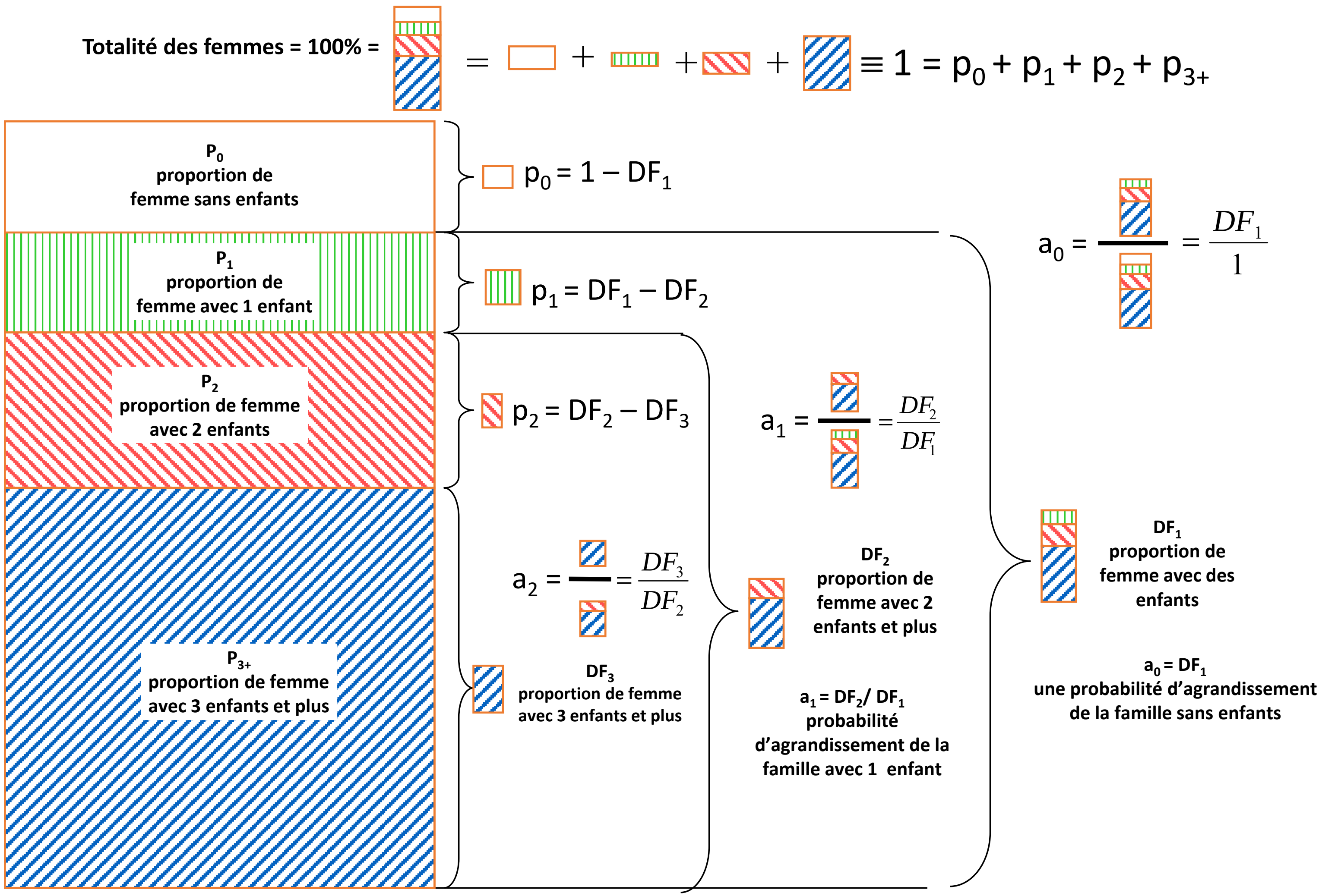
1° Hypothèse de la probabilité constante (progression géométrique) $a_{n+} = 1 - \dfrac{DF_{n-1}}{DF_{n+}}$;

avec *n+ = {n, n+1, n+2* etc.},

et $DF_{n+} = DF - \sum_{i=1}^{n-1} DF_i$

2° Hypothèse sur la distribution binomiale des femmes avec n enfants et plus (la solution un peu plus difficile)

La probabilité d'agrandissement de la famille (illustration)



Algorithme de calcul d’une table de fécondité (1e naissance)

Données				Calculs pour les premières naissances					Calculs pour les secondes naissances						
Year	x	w0x	m1x	q1x	l0x	b1x	L0x	Sb1x	w1x	M2x	q2x	l1x	b2x	L1x	Sb2x
1991	-12	1	0	0	10 000.0	0.0	10 000.0	0.0	0			0	0.0	0.0	0
1991	13	0.9999	0.00005	0.00005	10 000.0	0.5	9 999.8	0.5	0.00007			0	0.0	0.2	0
1991	14	0.9994	0.00047	0.00047	9 999.5	4.7	9 997.2	5.2	0.00061	0.03844	0.03772	0	0.1	2.8	0
1991	15	0.9978	0.00211	0.00211	9 994.8	21.1	9 984.3	26.3	0.00215	0.0105	0.01045	5	0.2	15.6	0
1991	16	0.9921	0.00653	0.00651	9 973.7	64.9	9 941.3	91.2	0.00743	0.04576	0.04474	26	2.6	57.9	0
1991	17	0.9780	0.01743	0.01728	9 908.8	171.2	9 823.2	262.4	0.02024	0.06368	0.06171	88	10.9	171.1	3
1991	18	0.9543	0.03051	0.03005	9 737.6	292.6	9 591.3	555.0	0.04126	0.06288	0.06096	249	24.4	387.3	14
1991	19	0.9204	0.04577	0.04475	9 445.0	422.6	9 233.7	977.7	0.07023	0.08803	0.08432	517	62.2	706.4	38

L’ordre des calculs pour les premières naissances

1. Colonne E : $q1_x = m1_x/(1 + 0{,}5 \cdot m1_x)$;
2. Colonne F : $l0_x = l0_{x-1}(1 - q1_x)$;
3. Colonne H : $L0_x = l0_x \cdot (1 - 0{,}5 \cdot q1_x)$
4. Colonne G : $b1_x = L0_x \cdot m1_x$;
5. Colonne I : $Sb1_x = Sb1_{x-1} + b1_x$;

	A	B	C	D	E (1)	F (2)	G (4)	H (3)	I (5)
3	Year	x	w0x	m1x	q1x	l0x	b1x	L0x	Sb1x
4	1991	-12	1	0	0	10000	=H4*D4	=F4-F4*E4*0.5	0
5	1991	13	0.99993	0.00005	=D5/(1+0.5*D5)	=F4*(1-E4)	=H5*D5	=F5-F5*E5*0.5	=I4+G5
6	1991	14	0.99938	0.00047	=D6/(1+0.5*D6)	=F5*(1-E5)	=H6*D6	=F6-F6*E6*0.5	=I5+G6
7	1991	15	0.9978	0.00211	=D7/(1+0.5*D7)	=F6*(1-E6)	=H7*D7	=F7-F7*E7*0.5	=I6+G7
8	1991	16	0.9921	0.00653	=D8/(1+0.5*D8)	=F7*(1-E7)	=H8*D8	=F8-F8*E8*0.5	=I7+G8
9	1991	17	0.97802	0.01743	=D9/(1+0.5*D9)	=F8*(1-E8)	=H9*D9	=F9-F9*E9*0.5	=I8+G9
10	1991	18	0.95434	0.03051	=D10/(1+0.5*D10)	=F9*(1-E9)	=H10*D10	=F10-F10*E10*0.5	=I9+G10

Algorithme de calcul d'une table de fécondité (2e naissance)

Données				Calculs pour les premières naissances					Calculs pour les secondes naissances						
Year	x	w0x	m1x	q1x	l0x	b1x	L0x	Sb1x	w1x	M2x	q2x	l1x	b2x	L1x	Sb2x
1991	-12	1	0	0	10 000.0	0.0	10 000.0	0.0	0			0	0.0	0.0	0
1991	13	0.9999	0.00005	0.00005	10 000.0	0.5	9 999.8	0.5	0.00007			0	0.0	0.2	0
1991	14	0.9994	0.00047	0.00047	9 999.5	4.7	9 997.2	5.2	0.00061	0.03844	0.03772	0	0.1	2.8	0
1991	15	0.9978	0.00211	0.00211	9 994.8	21.1	9 984.3	26.3	0.00215	0.0105	0.01045	5	0.2	15.6	0
1991	16	0.9921	0.00653	0.00651	9 973.7	64.9	9 941.3	91.2	0.00743	0.04576	0.04474	26	2.6	57.9	0
1991	17	0.9780	0.01743	0.01728	9 908.8	171.2	9 823.2	262.4	0.02024	0.06368	0.06171	88	10.9	171.1	3
1991	18	0.9543	0.03051	0.03005	9 737.6	292.6	9 591.3	555.0	0.04126	0.06288	0.06096	249	24.4	387.3	14
1991	19	0.9204	0.04577	0.04475	9 445.0	422.6	9 233.7	977.7	0.07023	0.08803	0.08432	517	62.2	706.4	38

L'ordre des calculs pour les secondes naissances

1. Colonne L : $q2_x = m2_x/(1 + 0{,}5 \cdot m2_x)$;
2. Colonne O : $L1_x = l1_x + l0_x \cdot 0{,}5 \cdot q1_x - l1_x \cdot 0{,}5 \cdot q2_x)$
3. Colonne N : $b2_x = L2_x \cdot m2_x$;
4. Colonne M* : $l1_x = l1_{x-1} - b2_x + b1_{x-1}$;
5. Colonne I : $Sb2_x = Sb2_{x-1} + b2_x$;

* pour la colonne M il est possible de procéder : $l1_x = l1_{x-1} - b2_x + L1_{x-1} \cdot m1_{x-1}$;

A	B	J	K	L (1)	M (4)	N (3)	O (2)	P (5)
Year	x	w1x	m2x	q2x	l1x	b2x	L1x	Sb2x
1991	-12	0			0	=O4*K4	=M4+F4*E4*0.5-M4*L4*0.5	0
1991	13	0.00007			=M4-N4+H4*D4	=O5*K5	=M5+F5*E5*0.5-M5*L5*0.5	=P4+N4
1991	14	0.00061	0.03844	=K6/(1+0.5*K6)	=M5-N5+H5*D5	=O6*K6	=M6+F6*E6*0.5-M6*L6*0.5	=P5+N5
1991	15	0.00215	0.0105	=K7/(1+0.5*K7)	=M6-N6+H6*D6	=O7*K7	=M7+F7*E7*0.5-M7*L7*0.5	=P6+N6
1991	16	0.00743	0.04576	=K8/(1+0.5*K8)	=M7-N7+H7*D7	=O8*K8	=M8+F8*E8*0.5-M8*L8*0.5	=P7+N7
1991	17	0.02024	0.06368	=K9/(1+0.5*K9)	=M8-N8+H8*D8	=O9*K9	=M9+F9*E9*0.5-M9*L9*0.5	=P8+N8
1991	18	0.04126	0.06288	=K10/(1+0.5*K10)	=M9-N9+H9*D9	=O10*K10	=M10+F10*E10*0.5-M10*L10*0.5	=P9+N9
1991	19	0.07023	0.08803	=K11/(1+0.5*K11)	=M10-N10+H10*D10	=O11*K11	=M11+F11*E11*0.5-M11*L11*0.5	=P10+N10