

Université de Paris I
Magistère d'Economie
Première année
Cours de Microéconomie
Temps - Risque
Exercices
Année 2025-2026

Temps - Exercices

Exercice 1**

Un consommateur vit deux périodes. Il dispose pendant la première période de sa vie d'un revenu Y_1 et ne perçoit aucun revenu pendant la deuxième période de sa vie. Ses préférences sont représentées par la fonction d'utilité intertemporelle

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\sigma}} C_1^{1 - \frac{1}{\sigma}} + \beta \frac{1}{1 - \frac{1}{\sigma}} C_2^{1 - \frac{1}{\sigma}}$$

où β et σ sont deux paramètres positifs et C_t désigne le niveau de consommation à la période t . On note p_t le prix du bien de consommation à la période t ($t = 1, 2$). On pose $p_2 = p$ et $p_1 = 1$. on suppose par ailleurs que le consommateur peut emprunter ou épargner au taux nominal i .

1. Définir et déterminer l'élasticité de substitution intertemporelle.
2. Calculer la consommation optimale à chaque période ainsi que le niveau d'épargne. A quelle condition, une hausse du taux d'intérêt se traduit par une baisse de l'épargne?

Exercice 2*

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'impact d'un système de retraite par répartition sur le niveau d'épargne. On considère pour cela un agent vivant deux périodes. L'agent est dit "jeune" en première période et "vieux" en deuxième période. Les préférences de cet agent peuvent être représentées par la fonction $U(C_1, C_2)$ où C_1 et C_2 désignent les quantités de bien consommées aux périodes de vie 1 et 2. Les préférences sont supposées continues et convexes. L'agent est salarié lorsqu'il est jeune et perçoit alors un salaire réel w . Du fait des progrès de la productivité, le salaire réel croît au taux γ de génération en génération. Le taux d'intérêt réel est égal à r .

1. Déterminer la contrainte budgétaire intertemporelle de l'agent en l'absence de tout système de retraite. Illustrer graphiquement le choix optimal du consommateur en supposant qu'il épargne une partie positive de son revenu.
2. L'Etat crée un système de retraite. La cotisation retraite obligatoire est une part θ du salaire w . Le système de retraite créé est un système par capitalisation. Déterminer le montant de la pension versée par la caisse de retraite à un agent lorsqu'il devient vieux (la caisse de retraite place les cotisations au même taux d'intérêt r). En déduire la contrainte budgétaire de l'agent. Illustrer graphiquement le choix optimal de l'agent. Comparer ce résultat au résultat obtenu à la question précédente. Commenter.

L'Etat supprime le système de retraite par capitalisation et crée un système de retraite par répartition en imposant aux agents de verser à la caisse de retraite une part θ (cotisation retraite) du salaire pendant la première période de leur vie. On suppose que le taux de croissance de la population est égal à n : lorsque H vieux perçoivent leur retraite, $(1 + n) H$ jeunes cotisent.

3. En admettant que l'Etat équilibre le budget de la caisse de retraite à chaque période, déterminer la somme reçue par un vieux de la part de la caisse de retraite. Déterminer et représenter graphiquement la nouvelle contrainte budgétaire d'un agent en distinguant trois cas : (i) $r = n + \gamma$, (ii) $r > n + \gamma$ et (iii) $r < n + \gamma$. Déterminer graphiquement le choix optimal de l'agent dans chacun des trois cas. Commenter.

4. En supposant que la consommation est un bien normal, montrez que l'épargne privée diminue dans les trois cas à la suite de l'introduction du système de retraite par répartition.

5. Montrer que la diminution de l'épargne est inférieure à θw dans le cas (ii) mais supérieure à θw dans le cas (iii).

Exercice 3*

On considère un agent vivant deux périodes. L'agent est dit "jeune" en première période et "vieux" en deuxième période. Les deux périodes de vie de l'agent durent T années. L'agent est salarié lorsqu'il est jeune et perçoit alors un salaire annuel nominal égal à w (il perçoit donc un salaire wT durant la période 1). Par ailleurs, l'agent a la possibilité de prendre sa retraite durant la deuxième période de vie. Si l'agent choisit de prendre sa retraite l'année z de la deuxième période, la durée de la retraite est égale à $T - z$ années et la durée d'activité durant la deuxième période est égale à z années. Du fait des progrès de la productivité, le salaire croît au taux γ d'une période à l'autre. Le salaire annuel durant la deuxième période est donc égal à $w(1 + \gamma)$. Si l'agent part à la retraite à la date z , le salaire nominal perçu en deuxième période est donc $(1 + \gamma)wz$. Un marché financier permet à l'agent d'épargner ou d'emprunter à la période 1 au taux d'intérêt nominal i : un euro placé à la période 1 rapporte $1 + i$ euro à la période 2 et un euro emprunté à la période 1 exige le remboursement de $1 + i$ euro à la période 2.

On suppose enfin que les préférences de l'agent sont représentées par la fonction d'utilité suivante:

$$U(C_1, C_2, R) = \ln C_1 + \frac{1}{1 + \delta} (\ln C_2 + \ln R)$$

avec $R = T - z$ et où C_1 et C_2 désignent les quantités de bien consommées aux périodes 1 et 2. Le paramètre δ est positif ($\delta > 0$). Les prix du bien de consommation sont toujours égaux à 1.

1. Commenter les trois arguments de la fonction d'utilité. Interpréter le paramètre δ .
2. Déterminer la contrainte budgétaire intertemporelle de l'agent pour une retraite de durée R . Commenter très soigneusement une telle expression.
3. Ecrire le programme de décision d'un agent qui choisit les niveaux de consommation et la durée de la retraite R .
4. Déterminer les trois conditions d'optimalité d'une solution intérieure.
5. Quel est l'effet d'une augmentation du paramètre γ sur le choix optimal de départ à la retraite? Ce résultat vous semble-t-il général?

Exercice 4**

L'objectif de cet exercice est d'examiner l'impact de l'incohérence temporelle sur les choix des consommateurs.

Considérons un consommateur confronté au choix suivant. Chaque samedi cet individu va au cinéma. Il doit, par ailleurs, dans les quatre prochaines semaines effectuer un rapport pour son entreprise. Il doit obligatoirement effectuer ce rapport de sorte qu'un des quatre samedis du mois il ne peut aller au cinéma. Enfin, la qualité du film proposé le samedi est variable et augmente avec le temps. Le bénéfice retiré du film diffusé le samedi t ($t = 1, 2, 3, 4$) est noté v_t et est le suivant: $v_1 = 3$, $v_2 = 5$, $v_3 = 8$ et $v_4 = 13$.

Les préférences de cet individu sont représentées par la fonction d'utilité intertemporelle suivante: $U_t = v_t + \beta \sum_{\tau=t+1}^4 v_\tau$ avec $\beta \leq 1$. La variable t désigne la période présente.

1. Interprétez le paramètre β et expliquez pourquoi un individu pour lequel $\beta < 1$ est sujet à l'incohérence temporelle.

On s'intéresse au choix de trois types d'individus: un individu cohérent temporellement ($\beta = 1$), un individu incohérent temporellement mais conscient de cette incohérence temporelle (individu sophistiqué avec $\beta = \frac{1}{2}$) et un individu naïf i. e. inconscient de son incohérence temporelle ($\beta = \frac{1}{2}$).

2. L'individu cohérent temporellement.

Déterminez la date à laquelle l'individu effectue le rapport.

3. L'individu sophistiqué

(i) A la période 3, si l'individu n'a pas encore effectué le rapport, va-t-il l'effectuer en $t = 3$ ou $t = 4$?

(ii) A la période 2, l'individu sophistiqué anticipe son comportement futur. S'il n'a pas encore effectué le rapport au début de la période 2, va-t-il in fine l'effectuer en $t = 2$, $t = 3$ ou $t = 4$?

(iii) A la période 1, l'individu sophistiqué anticipe son comportement futur. En définitive à quelle période effectue-t-il le rapport?

4. L'individu naïf

(i) A la période 3, si l'individu n'a pas encore effectué le rapport, va-t-il l'effectuer en $t = 3$ ou $t = 4$?

(ii) A la période 2, l'individu naïf n'anticipe pas son comportement futur. S'il n'a pas encore effectué le rapport au début de la période 2, va-t-il l'effectuer en $t = 2$?

(iii) A la période 1, l'individu naïf n'anticipe pas son comportement futur. En définitive à quelle période effectue-t-il le rapport?

Exercice 5**

Un consommateur vit deux périodes. Il dispose pendant la première période de sa vie d'un revenu Y_1 et perçoit un revenu Y_2 pendant la deuxième période de sa vie. Ses

préférences sont représentées par la fonction d'utilité intertemporelle suivante:

$$\ln C_1 + \beta \ln C_2$$

où β est un paramètre avec : $0 < \beta < 1$. C_t désigne le niveau de consommation à la période t . Le prix du bien de consommation est toujours égal à 1.

Le consommateur est contraint sur le marché du crédit puisqu'il ne peut emprunter une somme supérieure à $E > 0$. On suppose $E < \frac{Y_2}{1+r}$. Le taux d'intérêt prêteur est égal au taux d'intérêt emprunteur : l'agent rembourse $1 + r$ euro pour un euro emprunté ou un euro placé rapporte $1 + r$ euro.

1. Déterminer la contrainte budgétaire intertemporelle et la représenter graphiquement.
2. Calculer le Taux Marginal de Substitution au point $(C_1, C_2) = (Y_1 + E; Y_2 - E.(1 + r))$. Dans quel(s) cas un tel point est-il optimal?
3. Déterminer les consommations optimales aux périodes 1 et 2. Commenter.

Risque - Exercices

Exercice 1**

1. Soit un individu dont la fonction d'utilité de Von Neumann est $u(x) = \ln x$. La richesse initiale est composée d'une somme de 1000 euros et d'une loterie rapportant +500 euros avec probabilité p et -500 euros avec probabilité $1 - p$.

Déterminer l'équivalent certain de la loterie ainsi que la prime de risque pour $p = \frac{1}{2}$ et $p = \frac{9}{10}$.

2. Soit un individu dont la fonction d'utilité de Von Neumann est $u(x) = \sqrt{x}$. La richesse initiale est composée d'une somme de 25 euros. Il possède par ailleurs un billet de loterie rapportant +75 euros avec probabilité $\frac{1}{2}$ et 0 sinon. Quel est l'espérance de son utilité? Quel est le plus petit prix auquel l'agent est prêt à vendre le billet de loterie?

Exercice 2

Un armateur s'engage à transporter de la marchandise dont la valeur est de 100 000. Il doit prendre une décision concernant l'assurance de cette marchandise pendant le transport. Par souci de simplification on suppose qu'en cas d'accident, la marchandise est totalement perdue. Les préférences dans le risque de l'armateur sont représentables par le modèle d'Espérance d'Utilité avec une fonction d'utilité de Von Neumann $u(x) = \ln x$. La capacité financière de l'armateur pendant cette période est de 120 000. La probabilité de perte de la marchandise, compte tenu de l'état du navire et de la destination est estimée à 0.05.

Remarque: à cause de la lente croissance de la fonction $\ln x$ vous devez, pour comparer les différentes propositions, conserver dans vos résultats au moins 4 chiffres après la virgule.

1. Une compagnie d'assurance propose à l'armateur 2 contrats :

- un contrat A qui couvre totalement sa perte en cas d'accident et dont la prime est de 5500.

- un contrat B qui rembourse 50 000 en cas de perte de la marchandise et qui coûte 2750.

L'armateur s'assurera-t-il dans ce cas ? Si oui, quel contrat sera choisi? Pourquoi ?

2. Si, suite à de bonnes affaires, la capacité financière de l'armateur devenait de 500 000, que pouvez vous dire sur son choix de contrat d'assurance ?

3. On suppose que la capacité financière de l'armateur est toujours de 120 000. Il sait qu'en effectuant une révision technique complète du navire et en installant des équipements supplémentaires, il peut réduire la probabilité d'accident : supposons que cette dernière puisse passer de 0.05 à 0.01. La révision coûte 1000. L'armateur va-t-il l'entreprendre ? On suppose ici qu'il ne s'assure pas. Commenter.

Exercice 3

Un individu, de richesse initiale W , fait face à un risque de maladie pouvant entraîner une perte monétaire de montant $S \leq \frac{1}{2}W$. La probabilité que cette maladie survienne est égale à $\frac{1}{2}$. La fonction d'utilité de Von Neumann de l'agent est notée

$u(x) = \ln x$. Une compagnie d'assurance propose par ailleurs un contrat d'assurance caractérisé par une indemnité $I \geq 0$ versée en cas de maladie et par une prime P égale à $\frac{2}{3}I$.

1. Calculez l'indice absolu d'aversion au risque de cet agent.
2. Ecrire le programme qui permet de déterminer le choix optimal d'assurance I effectué par l'individu. Déterminer ce choix optimal d'assurance. Commenter.

Exercice 4

Un consommateur dispose d'un patrimoine W et il envisage d'investir un montant x dans un actif à risque. L'actif procure un rendement $r_d < 0$ en cas de résultat « défavorable », et un rendement $r_f > 0$ en cas de résultat « favorable » (1 euro placé rapporte $1 + r_i$ euro).

1. Ecrire la valeur du patrimoine du consommateur dans chacune des deux situations.
2. Supposons que la situation favorable se produise avec une probabilité π et la situation défavorable avec une probabilité $1 - \pi$. Quel est le rendement attendu de l'actif ? Quelle est l'utilité attendue du consommateur (en fonction de x) s'il a une fonction d'utilité de type VNM ? Montrer qu'en cas d'aversion pour le risque, l'utilité espérée $EU(x)$ est une fonction concave de x .
3. Ecrire l'équation donnant le montant optimal de l'investissement pour le consommateur. A quelle condition investira-t-il un montant strictement positif ? (Application numérique : $W = 10.000$ euros, $r_f = 20\%$, $r_d = -5\%$, $\pi = \frac{1}{2}$, $u(W) = \ln W$).

Exercice 5**

Un individu, de richesse initiale W , fait face à un risque de maladie pouvant entraîner une perte monétaire de montant S . Le risque est caractérisé par la variable aléatoire X avec $P(X = S) = \frac{1}{2}$ $P(X = 0) = \frac{1}{2}$. La fonction d'utilité de Von Neumann de l'agent est notée $u(x) = -e^{-ax}$ avec $a > 0$. Une compagnie d'assurance propose par ailleurs un contrat d'assurance caractérisé par une indemnité I versée en cas de maladie et une prime P égale à bI avec $b \geq \frac{1}{2}$.

- A.**
1. Calculer l'indice absolu d'aversion pour le risque. Commenter.
 2. Ecrire le programme qui permet de déterminer le montant de couverture I^* choisi par l'individu. Calculer le montant de couverture optimal choisi par l'agent. Commenter.
 3. Comment varie I^* si b augmente. Expliquer.
 4. Calculer l'espérance d'utilité de l'agent lorsque l'agent peut s'assurer et lorsque lorsque $b = \frac{1}{2}$.

B On suppose à présent qu'un système de dépistage est possible et permet de déterminer avant que l'agent ne s'assure si l'agent sera malade ou non. La compagnie d'assurance comme l'individu connaissent le résultat du dépistage. Le dépistage est imparfait: un individu malade donnera un test positif avec probabilité $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ et

un individu sain donnera un test négatif avec la même probabilité α . Le déroulement temporel des décisions est le suivant: (1) Le dépistage est effectué et le résultat est observé par l'agent et la compagnie d'assurance (2) La compagnie d'assurance propose un contrat d'assurance avec $b = \alpha$ si le test est positif et $b = 1 - \alpha$ si le test est négatif..

5. Déterminez le montant I demandé par un individu en fonction du résultat du dépistage.

6. En déduire l'espérance d'utilité de l'agent avant qu'il ne se fasse dépister. Comparer ce dernier résultat au résultat obtenu à la question 4.

C On suppose dans cette partie que l'agent perçoit mal la vraie probabilité de maladie et pense qu'il sera malade avec probabilité $q > \frac{1}{2}$. La vraie probabilité de maladie reste égale à $\frac{1}{2}$. On dit alors que l'agent est pessimiste. La compagnie connaît la vraie probabilité. La compagnie d'assurance propose par ailleurs un contrat d'assurance caractérisé par une indemnité I versée en cas de maladie et une prime P égale à bI avec $b \geq \frac{1}{2}$.

7. Déterminer le montant de couverture choisi par l'agent.

8. Lorsque $b > \frac{1}{2}$ l'assurance totale est-elle possible? Commenter.

Exercice 6**

On considère un agent dont les préférences sont représentées par la fonction de Von-Neumann et Morgenstern $u(x) = \sqrt{x}$. Cet agent dispose d'une richesse de 100 000 euros et fait face à un risque de dommage évalué à 20 000 euros. Ce dommage peut survenir avec la probabilité p . Une compagnie lui propose une assurance totale pour une prime de 4000 euros.

1. A partir de quelle probabilité de dommage, l'agent accepte-t-il le contrat d'assurance? On notera un tel seuil $\tilde{p}$.

Un cabinet d'expertise propose à l'agent d'acquérir de l'information sur la probabilité de dommage. Le cabinet fait une expertise. A l'issue de cette expertise, le rapport peut conclure, avec une probabilité q , que la probabilité de dommage est égale à $\bar{p} > p$ ou avec une probabilité $1 - q$ que la probabilité de dommage est égale à $\underline{p} < p$. On a $q.\bar{p} + (1 - q).\underline{p} = p$. On suppose également que $p > \tilde{p}$. La compagnie d'assurance ne modifie pas le contrat proposé en fonction de la probabilité révélée par le rapport.

2. Que signifie l'hypothèse $q.\bar{p} + (1 - q).\underline{p} = p$?

3. En supposant que le rapport d'expertise est gratuit, le rapport d'expertise augmente-t-il l'espérance d'utilité de l'agent?

4. A quelle condition sur les probabilités $\bar{p}$ et $\underline{p}$ l'agent est-il prêt à payer le rapport d'expertise?

Exercice 7**

L'objectif de cet exercice est d'essayer d'estimer si l'aversion au risque accroît la valeur de l'information.

Soit un agent maximisateur d'espérance d'utilité dont la fonction d'utilité de Von Neumann est $U(w) = -e^{-aw}$. Il a la possibilité de répartir sa richesse entre un actif risqué et un actif non risqué. L'actif risqué peut soit rapporter $(1+r)E$ avec probabilité p , soit rapporter $(1-r)E$ avec probabilité $1-p$ (avec $p \geq 1-p$), ceci pour 1 E investi. L'actif sans risque rapporte 1 E pour 1 E investi.

1. (i) Quel est le montant optimal I (avec la contrainte $I \geq 0$, l'agent ne peut vendre de l'actif risqué) investi en actif risqué si l'agent dispose d'une richesse w ? Commenter.
- (ii) Sachant que l'agent dispose de w_0 et que $p = \frac{1}{2}$, quel est son choix de portefeuille?

L'agent a la possibilité d'acheter une revue spécialisée qui donne de l'information sur le rendement de l'actif risqué, avant de constituer son portefeuille. En lisant cette revue, soit il apprend la nouvelle y^+ avec probabilité $\frac{1}{2}$ et alors sa probabilité révisée est $p(y^+) = \frac{1}{2} + \epsilon$ (avec $\frac{1}{2} \geq \epsilon \geq 0$), soit il apprend la nouvelle y^- avec probabilité $\frac{1}{2}$ et alors sa probabilité révisée est $p(y^-) = \frac{1}{2} - \epsilon$. La lecture de cette revue lui permet donc d'améliorer son information sur le rendement de l'actif risqué.

2. (i) Quels sont ses choix optimaux d'investissement conditionnellement à la nouvelle reçue grâce à la lecture de la revue?
- (ii) Quelle est son utilité espérée avant obtention de l'information par la revue étant donnés les choix optimaux qu'il effectuera en lisant cette revue?
- (iii) Quel est le prix maximal que l'agent est prêt à payer pour acheter la revue et obtenir cette information?
- (iv) Comment varie ce prix si a augmente? Ce résultat vous semble-t-il paradoxal? Comment peut-on expliquer un tel résultat?

Exercice 8

L'objet de cet exercice est d'étudier l'effet d'une taxe sur la prise de risque d'un agent. Considérons pour cela un consommateur doté d'une utilité de Von Neumann u croissante et concave. Cet agent dispose initialement d'un revenu w_0 qu'il peut placer dans un actif sans risque qui rapporte $(1+r)$ euro pour un euro placé et un actif risqué qui rapporte $(1+\underline{e})$ euros pour un euro placé avec une probabilité p et $(1+\bar{e})$ avec une probabilité $1-p$. On suppose $\underline{e} < r$, $\bar{e} > r$ et $p\underline{e} + (1-p)\bar{e} > r$. On note a la part de la richesse placée dans l'actif risqué.

1. Montrer que la condition du premier ordre relative au programme de l'agent s'écrit:

$$p(\underline{e} - r)u'(\underline{w}) + (1-p)(\bar{e} - r)u'(\bar{w}) = 0$$

avec $\underline{w} = w_0(1+r+a(\underline{e}-r))$ et $\bar{w} = w_0(1+r+a(\bar{e}-r))$

Montrer que cette condition définit un maximum.

2. (i) Rappeler la définition de l'indice d'aversion absolu pour le risque que l'on notera IA .

(ii) Montrer que $\frac{da}{dr}$ est du signe de

$$-pu'[\underline{w}] - (1-p)u'[\bar{w}] + w_0(1-a)[p(\underline{e}-r)u''(\underline{w}) + (1-p)(\bar{e}-r)u''(\bar{w})]$$

Montrer que cette expression peut s'écrire:

$$-pu'[\underline{w}] - (1-p)u'[\bar{w}] - w_0(1-a)[p(\underline{e}-r)u'(\underline{w})IA(\underline{w}) + (1-p)(\bar{e}-r)u'(\bar{w})IA(\bar{w})]$$

En déduire que lorsque l'indice IA croît avec la richesse, la part de la richesse placée dans l'actif risqué diminue si r augmente (indication: montrer que l'expression entre crochets est positive en vous aidant de la condition du premier ordre).

Expliquer ce résultat (indication: penser à l'effet de substitution et à l'effet de revenu).

Quel est donc l'impact sur a d'une taxe sur les revenus tirés de l'actif non risqué?

(iii) Que peut-on dire du signe de $\frac{da}{dr}$ si l'indice d'aversion pour le risque décroît si la richesse augmente? Commenter.

Exercice 9

On considère une entreprise qui produit un unique bien avec du travail selon la technologie $f(l)$ où l désigne le nombre d'heures de travail et f est fonction croissante et concave. L'entreprise est en concurrence parfaite sur le marché du travail et du bien. Au moment où l'entreprise choisit l , le salaire horaire w est connu mais le prix du bien est inconnu. L'entrepreneur sait que ce prix peut être égal à $\bar{p}$ avec probabilité q et $\underline{p}$ avec probabilité $1-q$. Les préférences de l'entrepreneur sont représentées par une fonction de Von-Neumann $u(x)$ croissante et concave où x désigne le revenu. Cet entrepreneur ne dispose pas d'autre revenu que le profit de son entreprise.

A. L'entrepreneur peut s'assurer contre le risque sur le prix. Le contrat d'assurance propose une indemnité I versée si le prix est égal à $\underline{p}$ pour une prime égale à $(1-q)I$.

Déterminer la richesse finale de l'entrepreneur. En déduire la contrainte budgétaire de l'entrepreneur. Quel est l'objectif assigné à la firme par l'entrepreneur? Ecrire la condition nécessaire et suffisante permettant de déterminer la quantité de travail demandée que l'on notera l_c .

B. L'entrepreneur n'a plus la possibilité de s'assurer.

1. Déterminer l'objectif de l'entrepreneur. Ecrire la condition nécessaire et suffisante permettant de déterminer la quantité de travail demandée que l'on notera l_u .

2. On suppose dans cette question que le prix est connu et égal à p . Ecrire la condition permettant de déterminer la demande de travail que l'on notera $l(p)$.

3. On définit le prix certain équivalent p_u comme la solution de l'équation

$$u(p_u f(l(p_u)) - w l(p_u)) = q u(\bar{p} f(l_u) - w l_u) + (1-q) u(\underline{p} f(l_u) - w l_u)$$

Montrer que $p_u < q\bar{p} + (1 - q)\underline{p}$. Commenter.

4. Comparer la demande de travail en présence d'incertitude sur le prix et en l'absence d'incertitude sur le prix (le prix est alors égal à $q\bar{p} + (1 - q)\underline{p}$). Commenter.

Exercice 10

Un individu, de richesse initiale w , fait face à un risque pouvant entraîner une perte monétaire de montant L . Le risque est caractérisé par la variable aléatoire X , $P(X = L) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$. Les préférences de l'agent sont représentées par la fonction d'utilité de Von Neumann $u(\cdot)$ avec $u' > 0$ et $u'' < 0$. Une compagnie d'assurance propose à l'agent de s'assurer contre ce risque. Le montant de l'indemnité versée en cas de dommage est égale à I et le montant de la prime est égal à $(1 + \lambda)pI$. L'individu peut choisir librement le montant I souhaité.

1. Ecrire le programme qui permet de déterminer le montant de couverture optimal pour l'individu (choix de I). Donner la condition de premier ordre qui caractérise ce montant de couverture.

2. Comment varie le montant de couverture avec la richesse initiale lorsque la fonction d'utilité est $u(x) = -e^{-\alpha x}$ avec $\alpha > 0$? Et si $u(x) = x^b$ avec $b \in]0, 1[$? Justifiez votre réponse.

Supposons maintenant que l'individu fait face à un deuxième risque qui est non assurable. Il peut entraîner une perte monétaire de montant M et est caractérisé par la variable aléatoire Y avec $P(Y = M) = q$ et $P(Y = 0) = 1 - q$. On a $P(X = L \text{ et } Y = M) = r$.

3. Ecrire le programme qui détermine le montant de couverture contre le risque X que choisit l'individu dans ce contexte. Comment s'écrit la condition de premier ordre dans ce cas ?

2. Interpréter l'inégalité $r > pq$. On a toujours $\lambda > 0$. Etudier l'optimalité de l'assurance totale lorsque $r > pq$. Commenter.

Exercice 11

Un agent dispose d'un revenu w qu'il peut placer dans un actif sans risque de rendement nul ou dans un actif risqué. Une unité de cet actif risqué rapporte avec équiprobabilité $1 + h$ euros et $1 - d$ euros ($h > 0$ et $0 < d < 1$). Une unité de l'actif coûte 1 euro. L'agent a une utilité de VNM $u(x) = \ln x$.

1. Déterminer la quantité α^* optimale d'actif risqué.
2. Quel est l'impact d'une augmentation de d sur α^* ? Expliquez.
3. Quel est l'impact d'une augmentation de h sur α^* ? Expliquez.

Exercice 12

Un individu, de richesse initiale W , fait face à un risque d'incendie pouvant entraîner une perte monétaire de montant S . Le risque est caractérisé par la variable aléatoire X avec $P(X = S) = p$. La fonction d'utilité de Von Neumann de l'agent est

notée $u(\cdot)$ avec $u' > 0$ et $u'' < 0$. Une compagnie d'assurance propose par ailleurs un contrat d'assurance caractérisé par une indemnité I versée en cas de dommage et une prime P égale à bI avec $b \geq p$.

Partie A.

1. Ecrire le programme qui permet de déterminer le montant de couverture optimal I pour l'individu. Donner la condition de premier ordre qui caractérise ce montant de couverture.

2. Comment varie le montant de couverture avec la richesse initiale lorsque la fonction d'utilité est $u(x) = \ln x$? Justifiez votre réponse.

Partie B

L'individu a la possibilité de diminuer sa probabilité de perte en achetant un système d'alarme-incendie. La probabilité de perte dépend alors de la qualité du système d'alarme. En notant e la qualité d'un tel système, la probabilité de perte est égale à $p(e)$. On suppose par ailleurs qu'un système d'alarme de qualité e coûte $\frac{1}{2}e^2$. On suppose enfin que $p'(e) < 0$ et $p(0) = p$.

1. Commenter ces deux dernières hypothèses.

2. Pour un niveau e donné, écrire la richesse finale de l'agent **en l'absence de tout contrat d'assurance**.

3. Préciser le programme (sans le résoudre) qui permet à l'agent de calculer la qualité e du système d'alarme en l'absence de tout contrat d'assurance.

4. La compagnie d'assurance peut contrôler la qualité du système d'alarme et donc faire dépendre la prime de la qualité e . Elle propose un contrat d'assurance complète pour une prime $P = (1 + \lambda)p(e)$. On suppose $\lambda \geq 0$.

(i) On suppose $\lambda = 0$. L'individu s'assurera-t-il si la qualité e est fixée (par des dispositions réglementaires par exemple) ou préférera-t-il rester sans assurance? Justifier votre réponse.

(ii) Dans le cas où $\lambda = 0$, déterminer la condition nécessaire que doit vérifier le niveau optimal de e choisi par l'agent. L'alarme-incendie est-elle substitut ou complément de l'assurance?

Partie C

Plutôt que d'acquérir un système d'alarme, l'agent préfère équiper sa maison de matériaux particulièrement robustes au feu de sorte que pour un coût $c.L$, le dommage est réduit de L et est donc égal à $S - L$. c est un paramètre avec $c \geq p$.

1. Ecrire la richesse finale de l'agent pour un montant de protection L **en l'absence de tout contrat d'assurance**. Commenter. Interpréter le paramètre c . Déterminer le montant de protection optimal dans le cas $u(x) = \ln x$. Commenter.

2. La compagnie d'assurance propose un contrat d'assurance avec une indemnité égale à I pour une prime égale à bI ($b \geq p$). L'agent peut à la fois s'assurer et investir dans la protection de son habitation.

- (i) Interpréter le paramètre b .
- (ii) Déterminer le montant de protection optimal (L^*) et de couverture optimal (I^*) lorsque $b < c$ d'une part et lorsque $b > c$ d'autre part. La protection et l'assurance sont-ils compléments ou substituts?

Exercice 13**

Un individu compare deux loteries:

- une loterie i donnant les montants $z_1, \dots, z_i + \varepsilon, \dots, z_n$ avec la même probabilité $\frac{1}{n}$
 - une loterie j donnant les montants $z_1, \dots, z_j + \varepsilon, \dots, z_n$ avec la même probabilité $\frac{1}{n}$
- avec $z_1, \dots, z_n$ des réels positifs décroissants ($z_1 > z_2 > \dots > z_i > \dots > z_j > \dots > z_n$) et ε une loterie de moyenne nulle prenant deux valeurs $\bar{\varepsilon}$ et $\underline{\varepsilon}$ avec la probabilité p et $1 - p$.

Cet individu est doté d'une fonction de VNM $u(x)$ avec $u'(x) > 0$ et $u''(x) < 0$.

1. Montrer que la différence entre l'espérance d'utilité de la loterie i et celle de la loterie j est du même signe que l'expression suivante:

$$\int_{z_j}^{z_i} pu'(x + \bar{\varepsilon}) + (1 - p)u'(x + \underline{\varepsilon}) - u'(x) dx$$

2. En déduire que l'agent préfère la loterie i à la loterie j si et seulement si $u'(x)$ est convexe.

On dit qu'un agent est prudent s'il préfère supporter un risque de moyenne nulle sur un revenu élevé plutôt que faible.

3. Déduire de la question 2 qu'un agent est prudent si et seulement si $u'''(x) > 0$.

On considère un individu qui fait un choix de consommation sur deux périodes: $t = 0, 1$. L'individu est doté d'un revenu de période 0 égal à w_0 et d'un revenu de deuxième période risqué qui vaut $\bar{x}$ avec probabilité p et $\underline{x}$ avec probabilité $1 - p$ tels que $p\bar{x} + (1 - p)\underline{x} = w_0$.

On suppose que l'espérance d'utilité s'écrit:

$$u(w_0 - s_0) + [pu(s_0 + \bar{x}) + (1 - p)u(s_0 + \underline{x})]$$

où s_0 est l'épargne en $t = 0$.

L'individu choisit s_0 à la période 0.

4. Commentez la forme de l'espérance d'utilité.
5. Déterminez la condition d'optimalité que vérifie s_0 . Déterminez l'épargne en $t = 0$ lorsque le revenu de $t = 1$ est certain et égal à w_0 .

Montrez que $s_0 > 0$ si et seulement si l'agent est prudent. Pourquoi peut-on interpréter s_0 comme une épargne de précaution?

Exercice 14**

1. Soit deux distributions X_1 et X_2 . X_1 est une distribution uniforme sur $[-1, 1]$ et X_2 prend les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité.

Représentez graphiquement les deux fonctions de distribution.

Laquelle de ces deux distributions est la "plus risquée"?

2**. Un individu qui dispose d'une richesse de 200 hésite entre deux investissements immobiliers. Le premier consiste à acheter deux appartements d'une valeur chacun de 50. Le deuxième consiste à acheter un seul appartement d'une valeur de 100. Par ailleurs la probabilité d'incendie et de destruction totale d'un appartement est de 0,01. Les événements incendie sont indépendants.

Si l'individu a de l'aversion pour le risque, lequel des deux investissements va-t-il effectuer?

3**. Les actionnaires d'une entreprise doivent voter entre deux projets d'investissement de 100 millions d'euros. Le projet 1 rapportera avec la même probabilité 80, 100, 120 ou 140 millions d'euros. Le projet 2 rapportera avec équiprobabilité 90 ou 130 millions d'euros. Quel projet remportera la majorité des actionnaires s'ils ont tous de l'aversion pour le risque?

Exercice 15**

L'objectif de cet exercice est d'étudier la demande d'assurance décès (communément appelée assurance-vie). Nous considérons pour cela un cadre très simple dans lequel un individu dispose d'un revenu y à la première période de sa vie ($t = 1$) et aucun revenu en deuxième période ($t = 2$). Il existe un marché financier parfait qui permet de placer ou d'emprunter au taux d'intérêt nominal $i = 0$. Par ailleurs cet individu a une probabilité de mourir en deuxième période égale à p . L'objectif de cet individu est donc de maximiser la fonction $u(C_1) + ((1-p)u(C_2) + p\alpha u(L))$ en utilisant les notations suivantes:

- C_1 : consommation en $t = 1$
- C_2 : consommation en $t = 2$
- L : legs aux héritiers en $t = 2$
- $u(x) = \ln x$
- Paramètre $\alpha : 0 < \alpha < 1$

Le prix du bien de consommation est égal à 1 aux deux périodes. Une compagnie d'assurance propose également un contrat d'assurance décès qui assure à l'individu un revenu I en cas de décès en $t = 2$ pour une prime payée en $t = 1$ égale à bI avec $1 > b \geq p$.

1. Justifier et commenter la fonction objectif de l'individu.
2. Expliquer pourquoi $L = I + S$ où l'on note S le montant épargné ($S > 0$) ou emprunté ($S < 0$) en $t = 1$.
3. Ecrire la contrainte budgétaire à chaque période et dans chaque état de la nature. Montrer que l'individu fait face à une unique contrainte qui s'écrit $C_1 + (1-b)C_2 + bL = y$. Interpréter ce dernier résultat.
4. Précisez les trois contraintes d'optimalité caractérisant la consommation optimale en $t = 1$ et $t = 2$ ainsi que le niveau optimal de legs. En déduire l'épargne optimale ainsi que la demande optimale d'assurance décès.
5. Montrer que I est négatif si $\frac{p\alpha}{b} < \frac{1-p}{1-b}$. Pourquoi parle-t-on dans ce cas de rente viagère? Interpréter les conditions dans lesquelles I est négatif.