

Préférences en univers incertain

Francis Bloch

¹Université Paris I

September 15, 2025

L'incertain

- En univers incertain, le décideur fait des choix avant d'observer la situation..
- Exemples: choix financiers, choix d'études..
- Dans ce cas, un panier de biens ne peut plus être représenté par un vecteur de quantités.
- On distingue les **choix** ou **actions** des **conséquences** ou **résultats**.
- Les conséquences correspondent à des paniers de biens fixes
- Les choix sont faits sur des conséquences aléatoires.

Risque et incertitude

- Depuis Knight (1921) on distingue deux situations:
- **Incertitude** Le décideur ne peut pas attribuer de probabilités aux conséquences
- **Risque** Le décideur peut attribuer des probabilités aux conséquences
- On considèrera surtout des situations de risque.
- On peut également distinguer entre probabilités objectives (connues de tous) et subjectives (choisies par le décideur)

Loteries

- On suppose que le décideur a des probabilités subjectives sur les conséquences
- On suppose que les conséquences sont des montants monétaires (unidimensionnels)
- Une action peut alors être représentée par une **loterie** où
 - X est un ensemble de résultats possibles.
 - $\wp$ est un ensemble de distributions de probabilité sur ces résultats.

Exemple de loterie

- Supposons trois résultats possibles:
 $x_1 = 0, x_2 = 10, x_3 = 50$ avec des probabilités
 $p_1 = 0.5, p_2 = 0.2, p_3 = 0.3$
- Cette loterie s'écrit $\mathcal{L} = (0, 10, 50; 0.5, 0.2, 0.3)$

Loteries

- En général, une loterie est une **distribution de probabilité** p sur X définie par:
 - 1 un sous-ensemble fini de X , qu'on appelle le **support** de p et qui est dénoté $supp(p)$
 - 2 pour tout $x \in supp(p)$, un nombre réel positif $p(x) > 0$, tel que $\sum_{x \in supp(p)} p(x) = 1$.
- X est l'ensemble de résultats possibles et p la probabilité de chaque résultat.
- Toutes les probabilités doivent être non négatives et elles doivent sommer à 1.
- P est l'ensemble des loteries.

Exemple

- Loterie p : On lance un dé et on reçoit un paiement de \$120 Euros si le chiffre est strictement inférieur à 3 et zéro sinon.
 - $\mathcal{L} = (0, 120; \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
-
- Loterie q : On lance une pièce de monnaie. Si elle tombe sur face on reçoit \$100 Euros et zéro sinon.
 - $\mathcal{L} = (0, 100; 0.5, 0.5)$

Application 1: Assurance

- Mr X possède une maison d'une valeur de l euros. Cette maison peut être détruite par un incendie avec probabilité p .
- Une compagnie d'assurance s'engage à verser une **indemnité** i en cas d'incendie en échange d'une **prime** annuelle b
- On suppose que la prime est proportionnelle à l'indemnité:
 $b = \beta i$
- $\mathcal{L} = (-\beta i + i, -\beta i + l; p, 1 - p)$

Application 2: Demande de travail dans l'incertain

- Un producteur a une fonction de production $q = 2\sqrt{l}$ où l est la quantité de travail.
- Le salaire est certain, $w = 2$.
- Le prix de vente du bien est incertain,
 $P = (10, 12, 16; 0.4, 0.5, 0.1)$
- Pour tout prix P , la maximisation du profit donne la demande de travail $l^D = (P/2)^2$.
- $\mathcal{L} = (50, 72, 128; 0.4, 0.5, 0.1)$

Loteries composées

- Supposez qu'on ait deux distributions de probabilité simples p et q et un nombre $\alpha \in [0, 1]$.
- On construit une nouvelle distribution de probabilité appelée *loterie composée*, comme $r = \alpha p + (1 - \alpha)q$. Cette construction se fait en deux étapes:
 - 1 $\text{supp}(r) = \text{supp}(p) \cup \text{supp}(q)$
 - 2 pour tout $x \in \text{supp}(r)$, $r(x) = \alpha p(x) + (1 - \alpha)q(x)$, où $p(x) = 0$ si $x \notin \text{supp}(p)$ et $q(x) = 0$ si $x \notin \text{supp}(q)$.

Exemple de loterie composée

- α est la probabilité de choisir la loterie p (lancer le dé) et $1 - \alpha$ la probabilité de choisir la loterie q (lancer la pièce).
- On suppose $\alpha = \frac{1}{4}$ et $1 - \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- $(p, q; \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ est la loterie composée où la loterie simple est choisie avec probabilité $\frac{1}{4}$, et la loterie simple q avec probabilité $\frac{3}{4}$.

Loteries réduites

- Pour toute loterie composée, on peut calculer la *loterie réduite* qui est la loterie simple qui produit la même distribution de probabilité sur les résultats.
- Soit $(p_1, \dots, p_K; \alpha_1, \dots, \alpha_K)$ une loterie composée formée de K loteries simples. $\hat{p}$ est la loterie réduite qui engendre la même distribution de probabilité sur les résultats,
- Pour tout $x \in X$, $\hat{p}(x) = \sum_{i=1}^K \alpha_i p_i(x)$.

Préférences sur les résultats et sur les loteries

- On distingue deux types de fonctions d'utilité
- La fonction $u(x)$ (préférences pour la richesse)
- C'est une fonction d'utilité classique
- la fonction $U(\mathcal{L})$ (préférences sur les loteries)
- Cette fonction représente les préférences en univers incertain

La fonction d'utilité espérance de la richesse

- On suppose que $U(\mathcal{L}) = E\mathcal{L}$
- Ou encore $U(\mathcal{L}) = \sum_i p_i x_i$
- Le décideur classe les loteries en fonction de leur espérance d'utilité

Exemple de choix avec l'utilité espérance

- $\mathcal{L}_1 = (9, 11; 0.5, 0.5)$
- $\mathcal{L}_2 = (8, 12; 0.5, 0.5)$
- $\mathcal{L}_3 = (7, 13; 0.5, 0.5)$
- Le décideur est indifférent entre les trois loteries car elles ont toutes la même espérance 10
- La variance n'a aucune importance.
- Ce comportement correspond à la **neutralité au risque**

Assurance avec l'utilité espérance

- La loterie est donnée par $\mathcal{L} = (-\beta i + i, -\beta i + l; p, 1 - p)$
- Avec l'utilité espérance, l'espérance de richesse est donnée par

$$E\mathcal{L} = p((1 - \beta)i + (1 - p)(l - \beta i)) = (1 - p)l + (p - \beta)i.$$

- Le décideur choisit de s'assurer totalement ($i = l$) si $p > \beta$
- Le décideur choisit de ne pas s'assurer ($i = 0$) si $p < \beta$

Le paradoxe de Saint Petersburg

- Problème posé par Nicolas Bernoulli dans une lettre de 1713.
- On propose un pari où le parieur reçoit 2 euros si une pièce de monnaie tombe sur pile au premier coup.
- Il reçoit 4 euros si la pièce tombe pour la première fois sur pile au second coup..
- Il reçoit 2^k euros si la pièce tombe pour la première fois sur pile au k ème coup..
- Combien le parieur est-il prêt à payer pour participer au pari?
- **La plupart des parieurs proposent une somme comprise entre 2 et 100 euros**

Le paradoxe de Saint Petersburg

- Pourtant, l'espérance de la loterie est donnée par

$$\begin{aligned}E\mathcal{L} &= \frac{1}{2}2 + \frac{1}{4}4 + \dots + \frac{1}{2^k}2^k + \dots \\&= 1 + 1 + \dots + 1 + \dots \\&= \infty\end{aligned}$$

- On en déduit que les parieurs n'ont pas une fonction d'utilité espérance!
- Le cousin de Nicolas, Daniel Bernoulli, proposera une solution au problème (en suggérant une transformation de l'utilité) en 1738..
- Cette solution servira de fondement à l'utilité espérée de Von Neumann et Morgenstern..

La fonction d'utilité de Markowitz

- Harry Markowitz (1952) propose une fonction d'utilité qui dépend de l'espérance et de la variance de la loterie:

$$U(\mathcal{L}) = U(E\mathcal{L}, V\mathcal{L}).$$

- L'utilité est toujours croissante dans l'espérance:

$$\frac{\partial U}{\partial E} > 0.$$

La fonction d'utilité de Markowitz

- Si l'individu est riscophobe (aversion pour le risque), $\frac{\partial U}{\partial V} < 0$
- Si l'individu est neutre au risque, $\frac{\partial U}{\partial V} = 0$
- Si l'individu est riscophile (goût pour le risque), $\frac{\partial U}{\partial V} > 0$
- On utilise souvent la représentation linéaire:

$$U(\mathcal{L}) = E\mathcal{L} - kV\mathcal{L},$$

- où $k > 0$ mesure l'aversion au risque.

Assurance avec la fonction d'utilité de Markowitz

- On calcule:
- l'espérance $E\mathcal{L} = (1 - p)l + (p - \beta)i$,
- la variance

$$\begin{aligned}
 V\mathcal{L} &= p[(1 - \beta)i - [p((1 - \beta)i + (1 - p)(l - \beta i))]]^2 \\
 &\quad + (1 - p)[(l - \beta i) - [p((1 - \beta)i + (1 - p)(l - \beta i))]]^2 \\
 &= p(1 - p)(l - i)^2
 \end{aligned}$$

- On a donc:

$$U = (1 - p)l + (p - \beta)i - kp(1 - p)(l - i)^2.$$

Assurance avec la fonction d'utilité de Markowitz

- On suppose $p < \beta$ (sinon l'assureur fait des pertes)
- En calculant la dérivée de l'utilité par rapport à i ,

$$\frac{\partial U}{\partial i} = (p - \beta) + 2kp(1 - p)(I - i).$$

- La dérivée seconde est donnée par $-2kp(1 - p) < 0$.
- Donc le choix d'assurance optimal est donné par la condition de premier ordre:

$$i^* = I - \frac{\beta - p}{2kp(1 - p)}.$$

Autres fonctions d'utilité

- On peut construire beaucoup d'autres fonctions d'utilité des loteries.
- Une fonction "pessimiste" $U(\mathcal{L}) = \min x$, le plus petit des résultats
- Une fonction "optimiste" $U(\mathcal{L}) = \max x$, le plus grand des résultats
- Une fonction où on ne considère que les valeurs les plus grandes et les plus petites (fonction de Hurwicz)

$$U(\mathcal{L}) = \alpha \min x + (1 - \alpha) \max x.$$

L'Utilité espérée

- Dans la théorie de l'utilité espérée, l'utilité de la loterie s'écrit:

$$U(\mathcal{L}) = \sum_i p_i u(x_i),$$

- où $u(\cdot)$ est une fonction d'utilité sur les résultats, appelée **utilité de Bernoulli**
- Cette formulation apparaît pour la première fois en 1738 dans la solution du paradoxe de Saint Petersburg par Daniel Bernoulli.

L'utilité de Bernoulli

- Bernoulli propose de prendre une fonction u qui soit croissante mais à un taux décroissant (fonction concave) comme la fonction $u(x) = \ln x$.
- On a alors comme quantité maximale que le parieur est prêt à payer:

$$\sum_k \frac{1}{2^k} \ln 2^k = \ln 2 \sum_k \frac{k}{2^k} = 2 \ln 2,$$

- une valeur finie!

Les axiomes de Von Neumann et Morgenstern

- La caractérisation axiomatique de l'utilité espérée est due à Von Neumann et Morgenstern (1944)
- L'espace des alternatives est dénoté $\mathcal{X}$, *l'ensemble de toutes les loteries simples sur les résultat X .*

Les axiomes de Von Neumann et Morgenstern

- **Axiome R (Rationalité)** La relation stricte $\succ$ sur $\wp$ est complète et transitive.
- **Axiome C (Continuité)** Soient $p, q, r \in \wp$ tels que $p \succ q \succ r$. Alors il existe $\alpha, \beta \in (0, 1)$, tels que $\alpha p + (1 - \alpha)r \succ q \succ \beta p + (1 - \beta)r$.
- **Axiome I (Indépendance)** La relation de préférence $\succ$ sur $\wp$ satisfait l'axiome d'indépendance si pour tout $p, q, r \in \wp$ et tout $\alpha \in (0, 1]$, la relation suivante est vérifiée:

$$p \succ q \Leftrightarrow \alpha p + (1 - \alpha)r \succ \alpha q + (1 - \alpha)r$$

Le théorème de Von Neumann et Morgenstern

Une relation de préférence $\succ$ sur l'ensemble $\wp$ des loteries simples sur X satisfait les axiomes R , C and I si et seulement si il existe une fonction qui assigne un nombre réel à chaque résultat, $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toutes loteries $p, q \in \wp$, on ait:

$$p \succ q \Leftrightarrow \sum_{x \in X} p(x)u(x) > \sum_{x \in X} q(x)u(x).$$

Interprétation

- Le théorème montre que la fonction d'utilité de vnM $U(\mathcal{L})$ n'est pas une utilité quelconque
- C'est une fonction d'utilité *linéaire dans les probabilités*
- mais où les résultats $x_1, \dots, x_n$ sont transformés en utilisant une fonction d'utilité $u(\cdot)$

Utilité cardinale

- Si la fonction $U(\mathcal{L})$ est une fonction d'utilité de VnM, la fonction $f(U(\mathcal{L}))$ représente les mêmes préférences si
 - $f(\cdot)$ est une fonction croissante
 - $f(U(\mathcal{L}))$ est aussi une fonction d'utilité de VnM
- Ces deux conditions ne peuvent être vérifiées que si f est une transformation affine positive

$$f(U) = aU + b \text{ avec } a > 0.$$

- De même pour la fonction de Bernoulli u , elle est définie à une transformation affine positive près.
- En univers incertain, la notion d'utilité est donc *cardinale* (et non ordinale)

Application à l'assurance

- On reprend le modèle d'assurance en supposant que l'utilité est donnée par l'utilité espérée

$$U(\mathcal{L}) = \sum p_i \ln x_i.$$

- On a alors

$$\begin{aligned} U &= p \ln(i(1 - \beta)) + (1 - p) \ln(l - \beta i) \\ &= p[\ln(1 - \beta) + \ln i] + (1 - p) \ln(l - \beta i) \end{aligned}$$

- En différenciant par rapport à i :

$$\frac{p}{i} - \frac{(1 - p)\beta}{l - \beta i} = 0$$

- On trouve

$$i^* = \frac{pl}{\beta}$$

Le paradoxe d'Allais (1953)

- Problème 1: On choisit entre
 - A: (2500, 2400, 0; 0.33, 0.66, 0.01)
 - B: (2400; 1)
 - La plupart des individus choisissent B
- Problème 2: On choisit entre
 - C: (2500, 0; 0.33, 0.67)
 - D: (2400, 0; 0.34, 0.66)
 - La plupart des individus choisissent C

Le Paradoxe d'Allais

- Ces choix sont incohérents avec une utilité espérée:
- Dans le problème 1 si B est préféré à A,

$$u(\$2, 400) > 0.33u(\$2, 500) + 0.66u(\$2, 400),$$

$$0.34u(\$2, 400) > 0.33u(\$2, 500).$$

- Dans le problème 2 si C est préféré à D,

$$0.34u(\$2, 400) < 0.33u(\$2, 500).$$

Le paradoxe d'Ellsberg (1961)

- Il y a 2 urnes. L'une contient 50 boules rouges et 50 boules noires, l'autre 100 boules soit rouges soit noires.
- Problème 1: On choisit entre:
 - R1: Je parie que la boule est rouge si elle est tirée de l'urne 1
 - R2: Je parie que la boule est rouge si elle est tirée de l'urne 2
- Problème 2: On choisit entre:
 - N1: Je parie que la boule est noire si elle est tirée de l'urne 1
 - N2: Je parie que la boule est noire si elle est tirée de l'urne 2

Le paradoxe d'Ellsberg

- La plupart des individus choisissent R1 plutôt que R2 et N1 plutôt que N2.
- Ce comportement n'est pas cohérent avec l'espérance d'utilité
- Pour Ellsberg, il montre une aversion pour l'ambiguïté.