La prime de risque

Francis Bloch,[1]

[1]Université Paris I

September 15, 2025

Comparaison des loteries

- En univers incertain, on peut toujours classer les richesses w et w'.
- En univers incertain, la question est plus difficile.
- Si on a deux loteries différentes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ quand peut-on dire que le décideur préfère $\mathcal{L}$ à $\mathcal{L}'$?
- Par exemple, supposons qu'on ait trois loteries
  - $\mathcal{L} = (w; 1)$
  - $\mathcal{L}' = (w - x, w + x; 0.5, 0.5)$
  - $\mathcal{L}'' = (w - 2x, w + 3x; 0.6, 0.4)$.
- Comment comparer ces trois loteries?

Dominance stochastique d'ordre 1

La loterie $\mathcal{L}$ domine stochastiquement à l'ordre 1 la loterie $\mathcal{L}'$ si tous les décideurs qui ont une fonction d'utilité monotone préfèrent $\mathcal{L}$ à $\mathcal{L}'$.

Loteries finies et continues

- Quand on a un nombre **fini** de résultats $x_1, \dots, x_M$, la loterie $\mathcal{L}$ est une loterie **finie** caractérisée par des probabilités $p_1, \dots, p_M$
- Quand l'ensemble de résultats X est **continu** (par exemple un intervalle dans $\Re$), la loterie $\mathcal{L}$ est caractérisée par une distribution de probabilité continue avec
  - Une fonction de répartition $F(x) = \Pr[X \leq x]$
  - Une fonction de densité $f(x) = F'(x)$

Caractérisation de la dominance stochastique

Theorem

La variable aléatoire X domine stochastiquement au premier ordre la variable aléatoire Y si et seulement si $\Pr(X \leq x) \leq \Pr(Y \leq x)$ *pour tout x.*

- La dominance stochastique de premier ordre n'implique pas que le rendement sous X est toujours plus élevé que le rendement sous Y. (L'ensemble des rendements peut être le même pour les deux distributions).
- Si X domine stochastiquement au premier ordre Y, alors la moyenne de X est plus élevée que la moyenne de Y.
- Mais l'inverse n'est pas vrai. Si la moyenne de X est plus élevée que la moyenne de Y, il n'est pas certain que X domine stochastiquement Y.

Dominance stochastique pour les loteries finies

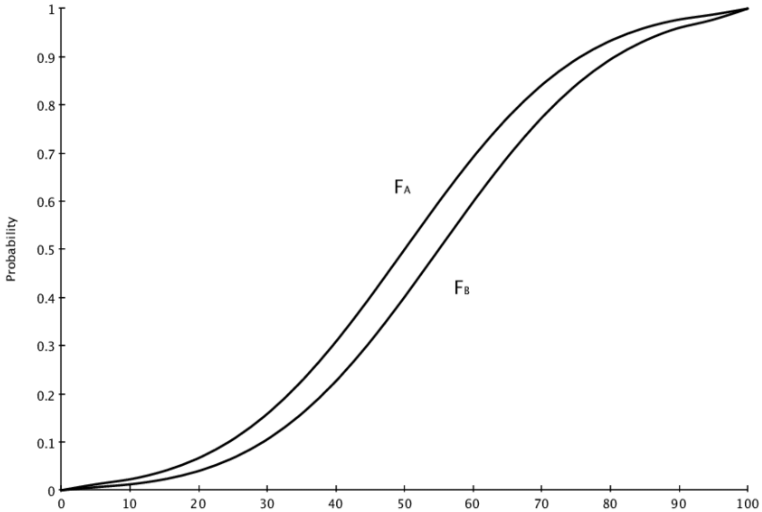
- On classe les résultats tels que $x_1 < x_2 < .... < x_M$.
- La loterie p domine stochastiquement au premier ordre la loterie q si et seulement si
  - Pour tout $m < M$, $\sum_{i=1}^{m} p_i < \sum_{i=1}^{m} q_i$
  - $\sum_{i=1}^{M} q_i = \sum_{i=1}^{M} p_i = 1$
- La loterie p met plus de poids sur les résultats plus élevés que la loterie q.

Dominance stochastique pour les loteries continues

- Soient deux loteries continues avec des fonctions de répartition $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$
- La loterie F domine stochastiquement au premier ordre la loterie G si et seulement si

$$F(x) \leq G(x) \text{ pour tout } x \in X.$$

Dominance stochastique d'ordre 1



Equivalent certain

- L'équivalent certain w^* de la loterie $\mathcal{L}$ est la richesse qui rend le décideur indifférent entre participer à la loterie et recevoir le paiement w^* avec certitude:

$$Eu(\mathcal{L}) = u(w^*).$$

- Si un individu a une utilité $u(w) = \sqrt{w}$, une richesse $\omega = 200$ et fait face à une loterie $\mathcal{L} = (-50, 100; 0.4, 0.6)$, on calcule

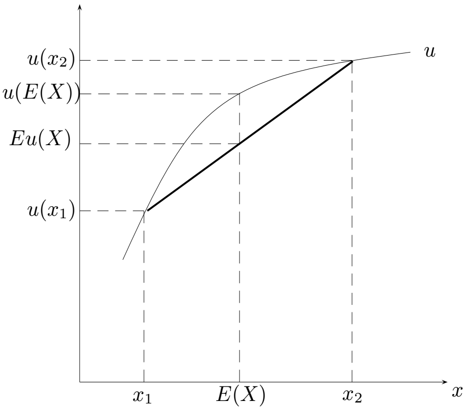
$$u(w^*) = \sqrt{w^*} = 0.4\sqrt{200 - 50} + 0.6\sqrt{200 + 100},$$

  ce qui donne $w^* = 233.82$

- L'équivalent certain dépend des préférences u, de la loterie $\mathcal{L}$ et du niveau de richesse certaine ω.

Equivalent certain

Equivalent Certain pour un individu risquophobe



La prime de risque

- La prime de risque attachée à la loterie $\mathcal{L}$ est la différence entre l'espérance de la loterie et l'équivalent certain:

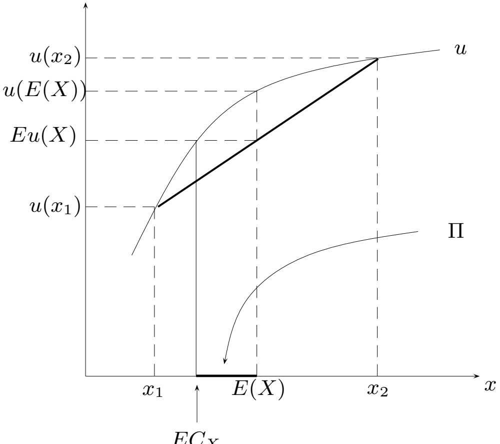
$$\pi = E(\mathcal{L}) - w^*.$$

- Dans l'exemple, $E(\mathcal{L}) = 240$, $w^* = 233.82$ donc $\pi = 6.18$
- On peut de façon équivalente définir la prime de risque par:

$$u(E(\mathcal{L}) - \pi) = Eu(\mathcal{L}).$$

Prime de risque

Prime de risque pour un individu risquophobe



Le paradoxe de Saint Petersbourg (rappel)

- On tire une pièce de monnaie non truquée.
- Le joueur gagne la première fois que la pièce tombe sur pile. Le paiement qu'il reçoit est 2 si la pièce tombe sur pile la première fois, 4 si elle tombe sur pile au second essai, 8 au troisième essai, etc...
- Combien êtes **vous** prêt à payer?
- La plupart des décideurs répondent qu'ils sont prêts à payer entre 5 et 20
- Pourtant l'espérance de la loterie est infinie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

- Pour expliquer cela il faut introduire la notion d'attitude vis à vis du risque.

Aversion au risque

- Un individu est *averse au risque (riscophobe)* si il préfère l'espérance d'une loterie à la loterie:

$$u(E\mathcal{L}) > Eu(\mathcal{L}).$$

- Dans le paradoxe de Saint Petersbourg, les individus ont de l'aversion au risque..

Neutralité par rapport au risque

- Un individu est *neutre par rapport au risque* si il est indifférent entre l'espérance d'une loterie et la loterie:

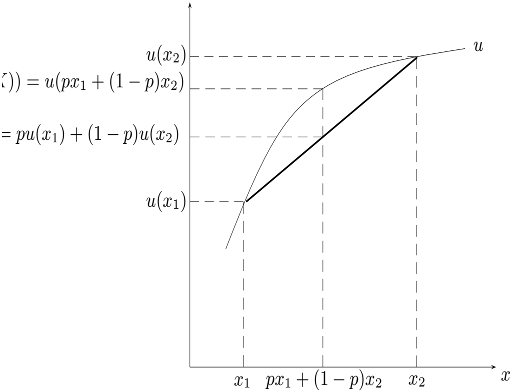
$$u(E\mathcal{L}) = Eu(\mathcal{L}).$$

Goût pour le risque

- Un individu a du *goût pour le risque (riscophile)* si il préfère jouer à la loterie que l'espérance de la loterie.

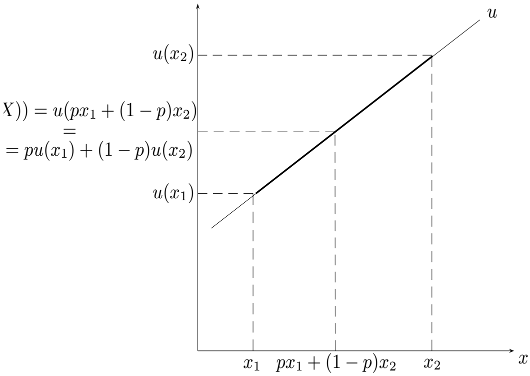
$$u(E\mathcal{L}) < Eu(\mathcal{L}).$$

Individu riscophobe



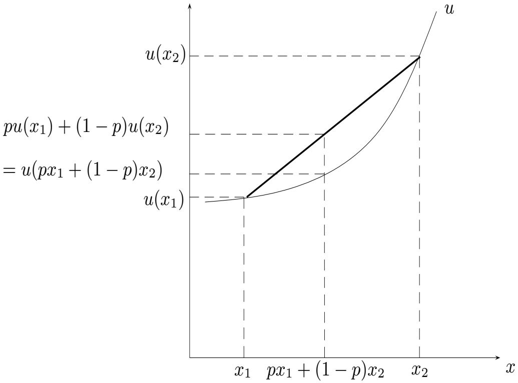
$X = [(p, 1-p), (x_1, x_2)]$ et $u(x)$ concave

Individu neutre au risque



$$X = [(p, 1 - p), (x_1, x_2)] \text{ et } u(x) \text{ linéaire}$$

Individu riscophile



$$X = [(p, 1-p), (x_1, x_2)] \text{ et } u(x) \text{ convexe}$$

Equivalent certain et aversion au risque

- Si le décideur est averse au risque : $w^* < E(\mathcal{L})$
  (l'équivalent certain est inférieur à l'espérance de la loterie)
- Si le décideur est neutre au risque: $w^* = E(\mathcal{L})$
  (l'équivalent certain est égal à l'espérance de la loterie)
- Si le décideur au du goût pour le risque : $w^* > E(\mathcal{L})$
  (l'équivalent certain est inférieur à l'espérance de la loterie)

Prime de risque et aversion au risque

- Si le décideur est averse au risque : $w^* < E(\mathcal{L})$ et donc $\pi > 0$ (la prime de risque est positive)
- Si le décideur est neutre au risque: $w^* = E(\mathcal{L})$ et donc $\pi = 0$ (la prime de risque est nulle)
- Si le décideur au du goût pour le risque : $w^* > E(\mathcal{L})$ et donc $\pi < 0$ (la prime de risque est négative)

L'inégalité de Jensen (1906)

- (**version finie**) Soit u une fonction concave. Alors, pour tout $(x_1, ..., x_n)$ et $(p_1, ..., p_n)$,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \leq u(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i).$$

- (**version continue**) Soit u une fonction concave. Alors

$$\int u(x) dFx \leq u(\int x dFx).$$

Concavité, convexité et attitudes par rapport au risque

- Le décideur est averse au risque si et seulement si la fonction d'utilité de Bernoulli u est concave
- Le décideur est neutre au risque si et seulement si la fonction d'utilité de Bernoulli u est affine
- Le décideur a du goût pour le risque si et seulement si la fonction d'utilité de Bernoulli u est convexe.

Attitudes vis à vis du risque

Aversion	Neutralité	Goût
$w^* < E(\mathcal{L})$	$w^* = E(\mathcal{L})$	$w^* > E(\mathcal{L})$
$\pi > 0$	$\pi = 0$	$\pi < 0$
u concave	u affine	u convexe
$u'' < 0$	$u'' = 0$	$u'' > 0$

Chômage et salaire

- Un salarié fait face à un risque de chômage.
- Avec probabilité p, il perd son emploi et touche une indemnité de chômage c
- Avec probabilité $1 - p$, il garde son emploi et touche un salaire $w > c$.
- On a donc

$$U(\mathcal{L}) = pu(c) + (1 - p)u(w).$$

- Crainte du chômage: $\frac{\partial U}{\partial p} = u(c) - u(w) < 0$ car $c < w$

Chômage et salaire

- Si $u(x) = \ln x$, $p = 10\%$, $w = 2000$, $c = 1000$ on trouve
$$w^* = 1866.$$
- Le salarié est prêt à accepter une baisse de salaire de 134 Euros pour éviter le risque de chômage.
- Si le salarié est neutre au risque, on calcule $w^* = 1900$, il accepte une baisse de salaire de 100 Euros
- Si le salarié a du goût pour le risque ($u(w) = w^2$), on a $w^* = 1924$. Il n'accepte une baisse de salaire que de 76 Euros!

Epargne de précaution

- On considère deux périodes:
  - Revenu certain y_1 en période 1
  - Revenu aléatoire en période 2: $(\underline{y_2}, \overline{y_2}; p, 1-p)$
- Le consommateur peut épargner en période 1 à un taux i.
- On a donc un profil de consommation (c_1, c_2) aléatoire :

$$((c_1, (y_1 - c_1)(1+i) + \underline{y_2}), (c_1, (y_1 - c_1)(1+i) + \overline{y_2}); p, 1-p).$$

- Le consommateur choisit c_1 pour maximiser

$$u(c_1) + pu(\underline{c_2}) + (1-p)u(\overline{c_2}).$$

Epargne de précaution

- Le problème est analysé dans le TD3
- Choisir c_1 pour maximiser

$$u(c_1)+pu((y_1-c_1)(1+i)+\underline{y_2})+(1-p)u((y_1-c_1)(1+i)+\overline{y_2}).$$

- La condition de second ordre donne:

$$u''(c_1)+pu''(\underline{c_2})(1+i)^2+(1-p)u''(\overline{c_2})(1+i)^2 \leq 0.$$

- Il faut donc $u'' < 0$: le consommateur doit être averse au risque pour choisir d'épargner
- On trouve aussi $\frac{dc_1^*}{dp} < 0$: le consommateur épargne plus si la crainte de chômage est plus forte.

Prime de risque et prime d'assurance

- Un individu a une richesse certaine $\omega = 100$ et une maison de valeur $I = 900$.
- Avec probabilité $p = 0.01$, la maison est détruite.
- La loterie est donc donnée par $\mathcal{L} = (100, 1000; 0.01, 0.99)$.
- Avec une fonction d'utilité $u(w) = \ln w$, on calcule l'équivalent certain:

$$\ln w^* = 0.01 \ln 100 + 0.99 \ln 1000,$$

- Soit $w^* = 977$ et $\pi = 991 - 977 = 14$.

Prime de risque et prime d'assurance

- Comment le propriétaire peut-il se débarrasser du risque ?
  - En vendant la maison: $\ln(\omega + p_v) = E(\mathcal{L})$ donnant un prix de vente $p_v = 877$
  - En souscrivant une assurance en choisissant une indemnité $i = l$. La prime d'assurance maximale $\overline{b}$ est telle que
  $$\ln(\omega + l - \overline{b}) = E\mathcal{L}.$$
  ou $\overline{b} = 1000 - 977 = 23$
- **(La prime de risque (14) et la prime d'assurance (23) sont différentes!)**

Prime de risque et prime d'assurance

- On a
$$\omega + I - \overline{b} = w^*$$
- et
$$\pi = E(\mathcal{L}) - w^* = \omega + I(1-p) - w^*.$$
- On en déduit
$$b^* = Ip + \pi$$
- La prime d'assurance est la valeur espérée de l'indeminité (Ip) plus la prime de risque.

Prix de vente

- Le prix de vente p_v d'une loterie $\mathcal{L}$ (partie aléatoire de la richesse) est le prix minimal auquel le décideur est prêt à vendre cette partie aléatoire.
- En vendant la partie aléatoire au prix p_v, le décideur obtient $\omega + p_v$; en participant à la loterie il reçoit $Eu(\mathcal{L})$, on a donc:
$$u(\omega + p_v) = Eu(\mathcal{L}) = u(w^*),$$
- Donc
$$p_v = w^* - \omega.$$
- Le prix de vente est la différence entre l'équivalent certain et la partie certaine de la richesse.

Prix de vente

- Le prix de vente dépend de la richesse et des préférences.
  - Exemple: un individu a une utilité $u(w) = \sqrt{w}$, une richesse $\omega = 200$ et fait face à une loterie $\mathcal{L} = (-50, 100; 0.4, 0.6)$, on calcule

    $$u(w^*) = \sqrt{w^*} = 0.4\sqrt{200-50} + 0.6\sqrt{200+100},$$

    ce qui donne $w^* = 233.82$ et $p_v = 33.82$
  - Avec $\omega = 100$ on a $w^* = 128$ donc $p_v = 28$
  - Avec $u(w) = w^2$, on a $w^* = 251$ et donc $p_v = 51$.

Prix de vente négatif

- On remplace la loterie de l'exemple par $\mathcal{L} = (50, -100; 0.4, 0.6)$.
- L'équivalent certain est $w^* = 152$ et le prix de vente $p_v = -48$
- Comme la loterie conduit à une perte (comme dans le cas de l'assurance), le décideur est prêt à payer pour se débarrasser du risque..
- **Le prix de vente peut être positif ou négatif**

Prix d'achat

- Définition symétrique de celle du prix de vente
- A quel prix un individu de richesse initiale ω est-il prêt à payer pour acquérir un revenu aléatoire X?
- On calcule p_A comme solution à

$$u(\omega) = EU(\omega + X - p_a).$$

- Le prix d'achat n'est pas égal au prix de vente.
- Dans l'exemple où $\omega = 200$, $u(w) = \sqrt{w}$ et $\mathcal{L} = (-50, 100; 0.4, 0.6)$ on calcule

$$\sqrt{200} = 0.4\sqrt{200 - p_a - 50} + 0.6\sqrt{200 - p_a + 100},$$

- $p_a = 32.68 \neq p_v = 33.82$
- La différence s'explique par le fait que les richesses initiales sont différentes..

Prix d'achat et prime de risque

- Mr X envisage d'acheter une voiture
- Il a une richesse initiale ω, la voiture coûte p et rapporte $2000q$, où q est un indice de qualité
- En univers certain, Mr X est prêt à acheter la voiture si $p \leq 2000q$.

Prix d'achat et prime de risque

- On suppose que la qualité n'est pas observable, et est donnée par une variable aléatoire Q.
- Si Mr X est neutre au risque, il achète la voiture si

$$E(\omega + 2000Q - p) \geq E(\omega),$$

soit

$$p \leq 2000E(Q).$$

- Supposons maintenant qu'il ait une aversion pour le risque. Alors il achète la voiture si

$$Eu(\omega + 2000Q - p) \geq Eu(\omega).$$

- En remplaçant

$$Eu(\omega + 2000Q - p) = u(E(\omega + 2000Q - p) - \pi)$$

$$u(E(\omega + 2000Q - p) - \pi) \geq u(\omega),$$

Prix d'achat et prime de risque

- d'où
$$\omega + 2000EQ - p - \pi \geq \omega,$$
et
$$2000EQ - \pi \geq p.$$
- Le prix d'achat est donc $p_a = 2000EQ - \pi$.
- En général, $p_a = E(X) - \pi$ tout comme $p_v = E(X) - \pi$ (mais avec différentes valeurs de la prime de risque..)