

Mesures de risque

Francis Bloch,¹

¹Université Paris I

September 21, 2025

Mesures d'aversion au risque

- On fixe la richesse aléatoire $\mathcal{L}$ et on considère deux individus A et B
- Quand peut-on dire que l'individu A a plus d'aversion au risque que l'individu B ?
- *Si la prime de risque π^A est plus élevée que la prime de risque π^B*
- La prime de risque π dépend
 - des préférences du décideur
 - de la partie risquée de la richesse
 - de la partie certaine de la richesse ω

Transformations concaves de la fonction d'utilité

- La fonction u est "plus concave" que la fonction w si il existe une fonction f telle que
 - f est strictement croissante, $f' > 0$
 - f est strictement concave, $f'' < 0$

et

$$u(w) = f(v(w)).$$

Transformation concave et prime de risque

- On suppose que u est une transformation concave de v
- $u(E(W) - \pi^A) = E(u(W)) = E(f(v(W)))$
- Par l'inégalité de Jensen,

$$E(f(v(W))) < f(E(v(W))) = f(v(E(W)) - \pi^B) = u(E(W) - \pi^B).$$

- On en déduit que

$$\pi^A > \pi^B.$$

- L'individu qui a une fonction d'utilité plus concave aura aussi une prime de risque plus élevée.

Exemples de transformation concave

- $u(w) = \ln w, v(w) = \sqrt{w}$
- transformation $f(x) = \ln(x^2)$ est une fonction concave.
- $u(w) = w^\alpha, v(w) = w^\beta$ avec $0 < \alpha < \beta \leq 1$
- transformation $f(x) = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ est une fonction concave.

Mesure de risque d'Arrow-Pratt

- Arrow et Pratt (1963, 1964) calculent la prime de risque quand le risque devient "petit"
- Soit ω la richesse certaine d'un individu.
- On considère une loterie z d'espérance nulle $Ez = 0$ et telle que la loterie soit "petite", c'est à dire les valeurs $z_1, \dots, z_m$ tendent vers 0.
- En supposant que la prime de risque π est petite, on a l'approximation:

$$u(\omega - \pi) \sim u(\omega) - \pi u'(\omega).$$

Mesure de risque d'Arrow Pratt

- De plus, comme les valeurs $z_1, \dots, z_m$ tendent vers 0, pour tout i

$$u(\omega + z_i) \sim u(\omega) + z_i u'(\omega) + \frac{1}{2} z_i^2 u''(\omega)$$

- En prenant l'espérance

$$\sum_i p_i u(\omega + z_i) \sim \sum_i p_i u(\omega) + \sum_i p_i z_i u'(\omega) + \frac{1}{2} \sum_i p_i z_i^2 u''(\omega).$$

Mesure de risque d'Arrow Pratt

- Comme $\sum_i p_i = 1$, $\sum_i p_i z_i = Ez = 0$ et $\sum_i p_i z_i^2 = V(z)$,

$$Eu(\omega + z_i) \sim u(\omega) + \frac{1}{2} V(z) u''(\omega).$$

- Par définition de la prime de risque, $Eu(\omega + z_i) = u(\omega - \pi)$.
Donc

$$\pi \sim -\frac{V(z) u''(\omega)}{2u'(\omega)}.$$

- La quantité $A(\omega) = -\frac{u''(\omega)}{u'(\omega)}$ s'appelle le **coefficient d'aversion au risque d'Arrow Pratt**

Mesure de risque d'Arrow-Pratt

- Le coefficient d'aversion au risque d'Arrow Pratt mesure le degré de concavité de la fonction $u(\cdot)$, $u''(\cdot)$
- Comme cette quantité n'est pas indépendante des transformations affines positives, on divise par $u'(\cdot)$
- Comme la fonction $u(\cdot)$ est croissante et concave, $u'(\cdot) > 0$ et $u''(\cdot) < 0$ on doit donc ajouter un signe $-$ pour obtenir un coefficient positif.

Le théorème de Pratt

Theorem

Soient deux individus riscophobes A et B avec des fonctions d'utilité de Bernoulli u et v . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

- 1 La fonction u est une transformation strictement croissante et strictement concave de la fonction v*
- 2 Quelle que soit la richesse aléatoire W , la prime de risque de l'individu A est plus élevée que la prime de risque de B.*
- 3 En n'importe quel point w , le coefficient d'Arrow Pratt de l'individu A est supérieur au coefficient d'Arrow Pratt de l'individu B.*

Risque multiplicatif

- Jusqu'à présent, on a toujours considéré que le risque s'ajoutait à la richesse certaine:

$$W = \omega + X,$$

- C'est ce qu'on appelle **le risque additif**
- Mais on peut aussi supposer que le risque est calculé en pourcentage de la richesse certaine:

$$W = \omega(1 + Y),$$

- C'est ce qu'on appelle **le risque multiplicatif**

Prime de risque relatif

- Par exemple, supposons un individu dont la richesse est $\omega = 200$ et qui peut baisser de 25% avec probabilité 0.4 et augmenter de 50% avec probabilité 0.6.
- Il a une fonction d'utilité $u(x) = \sqrt{x}$.
- Cet exemple est identique à une loterie $(150, 300; 0.4, 0.6)$, et on peut calculer l'équivalent certain $w^* = 233,82$, la prime de risque $\pi = 6.18$, le prix de vente $p_v = 33.82$.

Prime de risque relatif

- Il est plus naturel d'exprimer ces valeurs en fonction du taux de rendement:
 - L'espérance du taux de rendement est $E(Y) = 20\%$
 - Le taux de rendement équivalent certain est
$$y^* = \frac{33.82}{200} = 16.91\%$$
 - La prime de risque relatif est donnée par
$$\pi' = E(Y) - y^* = 20 - 16.91 = 3.09\%$$
- Plus généralement on définit le taux de rendement équivalent certain comme la solution de

$$Eu(\omega(1 + Y)) = u(\omega(1 + y^*)),$$

- Et la prime de risque relatif:

$$u(\omega(1 + E(Y) - \pi')) = Eu(\omega(1 + Y)).$$

Prime de risque relatif et prime de risque absolu

- On distingue maintenant la prime de risque relatif π' de la prime de risque (absolu) π .
- On a

$$E(W) - \pi = E(W) - \omega\pi',$$

- Et donc

$$\pi = \omega\pi'.$$

- Les deux primes de risque ont donc le même signe:
 - π et π' sont positives si l'individu est riscophobe
 - π et π' sont nulles si l'individu est neutre au risque
 - π et π' sont négatives si l'individu est riscophile

Coefficient d'aversion au risque relatif et absolu

- On distingue entre le coefficient d'aversion au risque relatif et absolu:
- Coefficient relatif:

$$A_r(w) = -\frac{wu''(w)}{u'(w)}$$

- Coefficient absolu:

$$A_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

Richesse et aversion absolue au risque

- Un individu plus riche est prêt à prendre des paris plus risqués
- Plus une entreprise a de fonds propres, plus elles d'assure elle même..
- **L'aversion absolue au risque diminue avec la richesse:**

$$\frac{\partial A_a}{\partial w} < 0.$$

Richesse et aversion relative au risque

- Si on différencie $A_r(w) = wA_a(w)$ par rapport à w :

$$\frac{\partial A_r}{\partial w} = A_a + w \frac{\partial A_a}{\partial w}.$$

- Si l'individu est riscophile, $A_a < 0$ et donc $\frac{\partial A_r}{\partial w} < 0$:
l'aversion relative au risque décroît avec la richesse.
- Si l'individu est riscophobe, $A_a > 0$, et le signe est ambigu.
- Si w augmente, la variance augmente au taux w^2 . On suppose d'habitude que cet effet (effet risque) fait augmenter A_a à un taux plus rapide que $w \frac{\partial A_a}{\partial w}$
- On suppose donc que l'aversion relative au risque augmente avec la richesse:

$$\frac{\partial A_r}{\partial w} \geq 0.$$

Fonctions d'utilité linéaires

- Les fonctions s'écrivent

$$v(w) = aw + b,$$

avec $a > 0$.

- On considère la représentation:

$$u(w) = w.$$

- Cette fonction d'utilité correspond aux individus neutres au risque.
- $A_a = A_r = 0$.
- A_a n'est pas décroissante

Fonctions d'utilité logarithmiques

- Les fonctions s'écrivent

$$v(w) = a \log_b(w) + b,$$

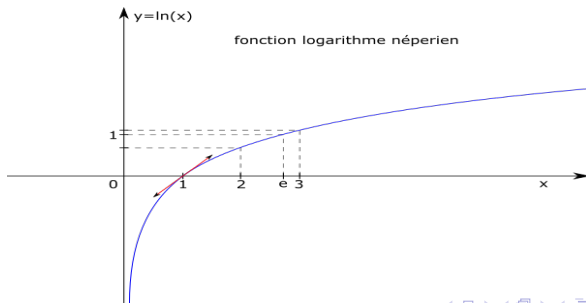
avec $a > 0, b > 0$.

- On considère la représentation:

$$u(w) = \ln w.$$

- non définie si $w = 0$
- $u''(w) = -\frac{1}{w^2} < 0$ donc **aversion au risque**
- $A_a(w) = \frac{1}{w}$ est décroissante
- $A_r(w) = 1$ est constante.

Fonction d'utilité logarithmique



Fonctions d'utilité quadratiques

- Les fonctions s'écrivent

$$v(w) = aw^2 + bw + c,$$

avec $a < 0$. Cette fonction n'est définie que pour $w < \frac{-b}{2a}$

- On considère la représentation:

$$u(w) = w - \alpha w^2 \text{ pour } \alpha > 0, 0 \leq w < \frac{1}{2\alpha}.$$

Fonction d'utilité quadratique

- On calcule

$$u'(w) = 1 - 2\alpha w, u''(w) = -2\alpha.$$

- On satisfait bien la monotonie si $w < \frac{1}{2\alpha}$ et la concavité
- **aversion au risque**
- $A_a = \frac{2\alpha}{1-2\alpha w}$ est **croissante en w**
- $A_r = \frac{2\alpha w}{1-2\alpha w}$ est croissante en w .

Fonction d'utilité quadratique et fonction de Markowitz

- Comme $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$,
- On peut écrire:

$$\begin{aligned}U(W) &= E(W) - \alpha E(W^2), \\&= E(W) - \alpha V(W) - \alpha E(W)^2 \\&= E(W) - \alpha E(W)^2 - \alpha V(W)\end{aligned}$$

- La fonction d'utilité espérée peut donc s'écrire comme une fonction qui ne dépend que de $E(W)$ et de $V(W)$.
- Comme $E(W) \leq \frac{1}{2\alpha}$, la fonction est bien croissante en $E(W)$ et décroissante en $V(W)$
- La fonction d'utilité de Bernoulli quadratique conduit donc à une fonction d'utilité espérée de Markowitz.

Fonctions d'utilité puissances

- Les fonctions s'écrivent

$$v(w) = aw^\alpha,$$

- On considère la représentation:

$$u(w) = \frac{w^\alpha}{\alpha}.$$

Fonctions d'utilité puissances

- On a $u'(w) = w^{\alpha-1} > 0$
- On a $u''(w) = (\alpha - 1)w^{\alpha-2}$. On a donc **aversion au risque** si $\alpha < 1$, **neutralité au risque** si $\alpha = 1$, **goût pour le risque** si $\alpha > 1$.
- On a $A_a = \frac{1-\alpha}{w}$, qui est bien décroissante avec w
- On a $A_r = 1 - \alpha$, **indépendant de la richesse**
- Fonctions CRRA (Constant Relative Risk Aversion)

Fonctions d'utilité exponentielles négatives

- On considère la fonction:

$$u(w) = -e^{-\alpha w}.$$

- $u'(w) = \alpha e^{-\alpha w} > 0$
- $u''(w) = -\alpha^2 e^{-\alpha w}$ On a toujours *aversion au risque*
- $A_a = \alpha$. **L'aversion au risque absolue est constante, égale à α**
- $A_r w \alpha$, croissante en w
- Fonctions CARA (Constant Absolute Risk Aversion)

Fonctions d'utilité exponentielles et loi normale

- Quand la richesse suit une loi normale, alors

$$E(-e^{-\alpha W}) = -e^{-\alpha E(W) + 0.5\alpha^2 V(W)}$$

- Le programme d'un agent qui maximise son espérance d'utilité est alors

$$\min e^{-\alpha E(W) + 0.5\alpha^2 V(W)},$$

ou de façon équivalente

$$\max E(W) - \frac{1}{2}\alpha V(W).$$

- **Il s'agit donc d'une fonction d'utilité espérée de Markowitz linéaire.**

Fonction d'utilité exponentielle et prime de risque

- $E(-e^{-\alpha W}) = -e^{-\alpha(E(W)-\pi)}$ où π est la prime de risque.
- Si la distribution de richesse est normale,
 $E(-e^{-\alpha W}) = -e^{-\alpha E(W)+0.5\alpha^2 V(W)}$
- Donc

$$-\alpha(E(W) - \pi) = -\alpha E(W) + \alpha^2 \frac{1}{2} V(W),$$

- Et

$$\pi = \frac{\alpha V(W)}{2},$$

- La prime de risque est proportionnelle à la variance
- Ce résultat rappelle le résultat d'Arrow-Pratt, mais pour tous les risques, pas uniquement pour les petits risques.

Tableau récapitulatif

fonction	attitude risque	aversion absolue	aversion relative
$u(w) = w$	neutre	constante 0	constante 0
$u(w) = \ln w$	averse	décroissante	constante 1
$u(w) = w - \alpha w^2$	averse	croissante	croissante
$u(w) = w^\alpha$	averse si $\alpha < 1$	décroissante	constante $1 - \alpha$
$u(w) = -e^{-\alpha w}$	averse	constante α	croissante

Risque d'une loterie

- Quand on compare deux loteries $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ qui ont la même espérance, quand peut-on dire qu'une loterie est plus *risquée* qu'une autre?
- Quand tous les individus riscophobes préfèrent la loterie $\mathcal{L}'$ à la loterie $\mathcal{L}$
- Une possibilité est de classer les loteries selon leur **variance**

Avantage de la variance

- Facile à calculer
- Formule d'approximation de la prime de risque:

$$\pi \simeq \frac{V(W)}{2} A_a.$$

- Fonctions d'utilité de Markowitz: la variance est l'unique mesure de risque quand $E(W) = E(W')$.

Problème avec la variance

- On considère les deux loteries:
 - $\mathcal{L} = (0, 4; 0.5, 0.5)$
 - $\mathcal{L}' = (1, 9; \frac{7}{8}, \frac{1}{8})$
- Un individu a une fonction d'utilité de Bernoulli $u(w) = \sqrt{w}$
- On trouve: $E(\mathcal{L}) = E(\mathcal{L}') = 2$, $V(\mathcal{L}) = 4 < V(\mathcal{L}')$ mais $E(\sqrt{\mathcal{L}}) = 1 < E(\sqrt{\mathcal{L}'}) = 1.25$

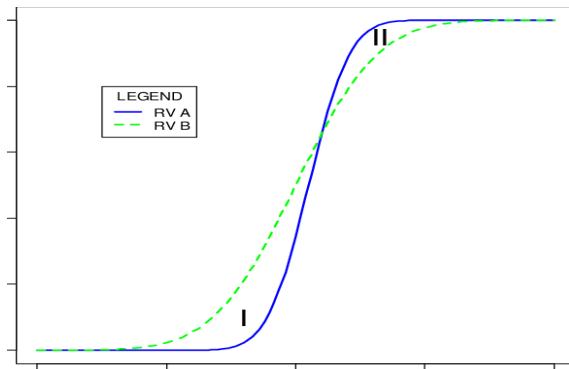
Dominance stochastique d'ordre 2

Definition

La distribution F domine stochastiquement d'ordre 2 la distribution G si et seulement si, pour tout x

$$\int_{-\infty}^x F(t)dt \leq \int_{-\infty}^x G(t)dt.$$

Dominance stochastique d'ordre 2



Dominance stochastique d'ordre 2

Theorem

Tous les individus riscophobes préfèrent la distribution F à la distribution G si et seulement si F domine stochastiquement à l'ordre 2 la distribution G

Dominance stochastique à espérance égale

- On suppose que les deux loteries $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ ont la même espérance, $E\mathcal{L} = E\mathcal{L}'$.
- **Si $\mathcal{L}$ domine stochastiquement $\mathcal{L}'$ à l'ordre 2, alors $V(\mathcal{L}) < V(\mathcal{L}')$**
- La condition est nécessaire car un individu avec fonction d'utilité quadratique préfère toujours la distribution dont la variance est plus faible
- La condition n'est pas suffisante (voir l'exemple plus haut d'un individu riscophobe qui préfère une distribution avec variance plus élevée.)

L'ajout de bruits blancs

- On compare
 - $\mathcal{L} = (1, 5, 10; 0.2, 0.6, 0.2)$
 - $\mathcal{L}' = (1, 4, 6, 10; 0.2, 0.3, 0.3, 0.2)$
- On peut écrire $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon$, avec
- $\epsilon = (-1, 1; 0.5, 0.5)$

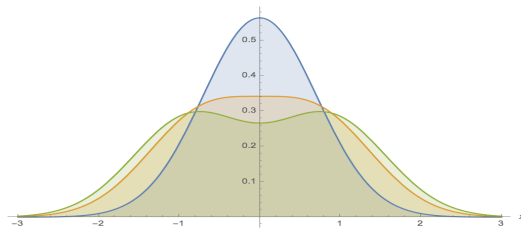
L'ajout de bruits blancs

- ϵ est un *bruit blanc*: une variable aléatoire d'espérance nulle
- Si $\mathcal{L}'$ est obtenu de $\mathcal{L}$ par l'ajout de bruits blancs, l'espérance de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{L}'$ sont égales
- **Si $\mathcal{L}'$ est obtenu de $\mathcal{L}$ par l'ajout de bruits blancs, alors $\mathcal{L}$ domine stochastiquement à l'ordre 2 $\mathcal{L}'$.**

Le transfert de poids

- Par transfert de poids ("mean preserving spread"), on entend qu'on prend du poids au "centre" de la distribution pour le déplacer aux extrémités tout en conservant la même moyenne
- **Si la distribution G est obtenue d'une distribution F par transfert de poids, alors F domine stochastiquement à l'ordre 2 la distribution G**

Transfert de poids



Distributions normales

- Soient F et G sont des distributions normales de même moyenne
- Si G a une variance plus élevée que F , alors G peut être obtenue de F par un transfert de poids.
- **Donc F domine stochastiquement à l'ordre 2 G si G a une variance plus élevée que F .**