

UNIVERSITÉ DE PARIS I
Magistère d'Economie
Cours de Microéconomie
Année universitaire 2025-2026
Exercices de Théorie des jeux

L'équilibre de Nash en stratégie pure

Exercice 1

A. Déterminer tous les équilibres de Nash éventuels des deux jeux suivants:

I/II	A	B	I/II	A	B
C	6,0	0,6	C	0,1	0,2
D	3,2	6,0	D	2,2	0,1

B. Félix et Oscar doivent déterminer le nombre d'heures que chacun d'eux consacre au ménage dans leur appartement commun. Chacun peut choisir de consacrer 3, 6 ou 9 heures. La propreté de l'appartement dépend du nombre total d'heures de ménage: l'appartement reste sale si le nombre d'heures de ménage est strictement inférieur à 9. Il est "habitable" si le nombre d'heures est égal à 9 et il est propre si le nombre d'heures est supérieur ou égal à 12 heures. Un appartement habitable assure un "gain" de 2 aux deux joueurs. Un appartement propre rapporte un gain de 10 à Félix mais de 4 à Oscar. Un appartement sale assure un gain de -10 à Félix et -5 à Oscar. Par ailleurs une heure de ménage est un gain de -1 pour chaque joueur. Déterminer la solution de ce jeu en procédant par élimination itérée des stratégies strictement dominées.

Exercice 2**

Quatre joueurs doivent se rendre du point A au point B (voir graphique ci-joint). Deux itinéraires sont possibles: l'itinéraire "est" ou l'itinéraire "ouest". Chaque itinéraire comprend deux segments. Les temps de trajet pour chaque segment dépendent du nombre de joueurs qui utilisent le segment et sont égaux aux valeurs suivantes (le premier terme de la parenthèse correspond au temps de trajet pour un joueur si un seul joueur utilise le segment, le deuxième terme au temps de trajet pour un joueur si deux joueurs utilisent le segment etc.):

Segment $E1$: (4, 5, 8, 20)

Segment $E2$: (1, 2, 4, 8)

Segment $O1$: (1, 2, 4, 8)

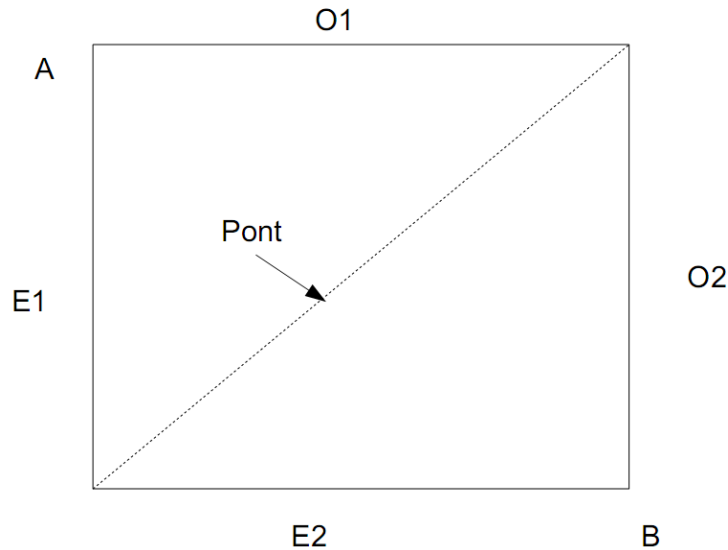
Segment $O2$: (4, 5, 8, 20)

Chaque joueur choisit simultanément son itinéraire. L'objectif d'un joueur est de minimiser le temps de trajet.

1. Déterminer l'équilibre de Nash de ce jeu.

Un pont est construit et permet a priori de raccourcir le temps de trajet. Les temps de trajet sur le pont sont nuls. Le pont est à sens unique et permet donc un nouvel itinéraire: $O1 - pont - E2$.

2. Déterminer le nouvel équilibre de Nash. Que peut-on dire des temps de trajet après construction du pont? Commenter.



"ouest": $O1 - O2$

"est": $E1 - E2$

Exercice 3*

Deux candidats se présentent à une élection. Un nombre m d'électeurs préfèrent B à A et un nombre k d'électeurs préfèrent A à B . Le nombre total d'électeurs est égal à $m + k = n$. Si un électeur vote, le gain en fonction du résultat de l'élection est le suivant: $2 - c$ si son candidat gagne, $-c$ si le candidat adverse gagne et $1 - c$ en cas d'égalité (avec $0 < c < 1$). Si l'électeur s'abstient, le gain est respectivement égal à 2, 0 et 1.

1. Quel est l'équilibre de Nash si $m = k = 1$?
2. Si $k = m$,
 - (i) existe-t-il un équilibre où tous les électeurs votent?
 - (ii) existe-t-il un équilibre où les deux candidats sont à égalité et où tous les électeurs ne votent pas?
 - (iii) existe-t-il un équilibre où un candidat gagne avec une voix d'écart?
 - (iv) existe-t-il un équilibre où un candidat gagne avec deux voix ou plus d'écart?
3. Quel est l'équilibre de Nash si $k < m$?

Exercice 4**

Deux entreprises investissent pour tenter d'emporter un marché dont la valeur est estimée à K euros. Le montant, en euros, de l'investissement de la firme i ($i = 1, 2$) est noté $a_i \geq 0$. La firme qui investit le plus remporte le marché. En cas d'égalité chaque firme remporte la moitié du marché (d'une valeur de $\frac{K}{2}$ euros). Les firmes choisissent simultanément les montants investis.

1. Déterminer les fonctions de meilleure réponse de chacune des deux firmes.

2. En déduire qu'il n'existe pas d'équilibre en stratégie pure.

Les stratégies mixtes

Exercice 1*

On considère le jeu suivant (les points désignent les gains non spécifiés).

I/II	A	B	C
A	.,2	3,3	1,1
B	.,.	0,.	2,.
C	.,4	5,1	0,7

Montrer que les deux stratégies mixtes suivantes constituent un équilibre de Nash: Joueur I : $(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4})$ et Joueur II : $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Exercice 2**

Les feux d'un carrefour sont en panne. N individus passent au carrefour au même moment et constatent la panne. Chaque individu peut alors soit téléphoner au service de voirie soit passer et ne pas téléphoner. Téléphoner a un coût $c > 0$ pour l'individu qui téléphone. Si les feux sont réparés, le bénéfice retiré par chaque individu est égal à $B > c$.

1. Montrer qu'il existe un équilibre en stratégie pure.
2. Déterminer un équilibre en stratégie mixte dans lequel chaque individu téléphone avec une probabilité σ .
3. Calculer la probabilité, à l'équilibre en stratégie mixte, que les services de voirie ne soient pas informés de la panne. Comment varie cette probabilité si N augmente?

Exercice 3**

Déterminer tous les équilibres de Nash des deux jeux suivants:

I/II	A	B	I/II	A	B
C	6,0	0,6	C	0,1	0,2
D	3,2	6,0	D	2,2	0,1

Exercice 4**

Un général A a pour objectif de défendre son territoire protégé par des montagnes. Il dispose de trois divisions.

Un général B souhaite attaquer le territoire du général A . Il dispose pour cela de deux divisions. Deux cols permettent de pénétrer dans le territoire de A . Le général A gagne une bataille à un col s'il aligne au moins autant de division que B et il parvient à défendre son territoire s'il gagne aux deux cols.

1. Expliciter le jeu sous forme stratégique.
2. Montrer que le général A a intérêt à "dispenser" ses armées.

3. En déduire que le général B met une seule division à un col avec probabilité zéro.
4. En déduire que la stratégie d'équilibre de B consiste à concentrer les divisions à un col avec équi-probabilité.
5. Conclure en déterminant un équilibre de Nash.

Exercice 5**

Deux athlètes, $A1$ et $A2$, participent à une épreuve sportive. Deux actions sont possibles: se doper (d) ou ne pas se doper (n). Si un seul athlète se dope, l'athlète dopé est certain de gagner l'épreuve et gagne 1 alors que l'athlète non dopé perd et gagne -1 . Si les deux athlètes se dopent ou si aucun athlète se dope, un athlète n'est pas sûr de gagner et le gain de chaque athlète est de 0.

1. Déterminer l'équilibre de Nash de ce jeu.

Une agence est en charge du contrôle anti-dopage mais ne peut contrôler qu'un seul athlète. Si elle contrôle un athlète positif, elle gagne en réputation et son gain est de 1. Si elle contrôle un athlète négatif, son gain est de 0. Un athlète contrôlé positif perd l'épreuve et son gain est donc de $-(1 + b)$ avec $b > 0$.

2. Déterminer les stratégies d'équilibre des joueurs si l'agence joue une stratégie pure en contrôlant avec probabilité 1 l'athlète Ai avec $i = 1, 2$.

3. L'agence décide d'adopter une stratégie mixte en contrôlant un athlète avec probabilité $\frac{1}{2}$ et l'autre athlète avec probabilité $\frac{1}{2}$. Montrer que les deux athlètes jouent la stratégie n . Montrer que la stratégie mixte de l'agence est une meilleure réponse aux stratégies des athlètes. Conclure.