

Université de Paris I
Magistère d'Economie
Première année
Cours de Microéconomie
Décision dans le risque - Eléments de correction des exercices 4, 9, 10 et 12
 Année 2025-2026

Exercice 4

1. Le revenu de l'agent est donc: $W - x + x(1 + r_f) = W + xr_f$ si cas favorable et $W - x + x(1 + r_d) = W + xr_d$ si cas défavorable.

2. Rendement attendu pour 1 euro placé: $1 + \pi r_f + (1 - \pi)r_d$.

Espérance d'utilité: $EU(x) = \pi u(W + xr_f) + (1 - \pi)u(W + xr_d)$

On a $EU'(x) = \pi r_f u'(W + xr_f) + (1 - \pi)r_d u'(W + xr_d)$

$EU''(x) = \pi (r_f)^2 u''(W + xr_f) + (1 - \pi)(r_d)^2 u''(W + xr_d) < 0$

3. Le montant x optimal doit maximiser $EU(x)$. La fonction est concave. On a donc x^* tel que $EU'(x^*) = 0$.

On a $x^* > 0$ ssi $EU'(0) > 0$ i. e. ssi $\pi r_f u'(W) + (1 - \pi)r_d u'(W) > 0$

Cette condition est vérifiée ssi $\pi r_f + (1 - \pi)r_d > 0$. Cette condition assure que le rendement net de l'actif risqué est positif.

Application:

On a $EU'(x) = \pi r_f \frac{1}{W + xr_f} + (1 - \pi)r_d \frac{1}{W + xr_d}$.

A l'optimum ($\pi = \frac{1}{2}$):

$$r_f \frac{1}{W + x^* r_f} + r_d \frac{1}{W + x^* r_d} = 0$$

ssi

$$x^* = -\frac{W(r_f + r_d)}{2r_f r_d} = 75000$$

Exercice 10

1. Richesse finale:

$$\begin{cases} w - L + I - (1 + \lambda)pI & \text{avec proba } p \\ w - (1 + \lambda)pI & \text{avec proba } 1 - p \end{cases}$$

d'où le programme:

$$\text{Max } pu(w - L + I - (1 + \lambda)pI) + (1 - p)u(w - (1 + \lambda)pI)$$

$$\text{CPO: } p(1 - (1 + \lambda)p)u'(w - L + I - (1 + \lambda)pI) - (1 + \lambda)p(1 - p)Lu'(w - (1 + \lambda)pI) = 0$$

2. (i) cas où $u(x) = -e^{-\alpha x}$: $I^* = L - \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{(1-p)(1+\lambda)}{1-p(1+\lambda)} \right)$. On retrouve l'assurance complète si $\lambda = 0$ (prime neutre). I^* ne dépend pas de w car l'aversion au risque ne dépend pas de la richesse.

(ii) cas où $u(x) = x^b$:

$$I^* = \frac{KL - w(K - 1)}{K(1 - (1 + \lambda)p) + (1 + \lambda)p}$$

$$\text{avec } K = \left(\frac{(1-p)(1+\lambda)}{1-p(1+\lambda)} \right)^{\frac{1}{1-b}} > 1$$

Plus la richesse augmente et moins l'agent souhaite s'assurer: normal puisque l'aversion au risque diminue avec la richesse.

3. Exemple: une entreprise peut subir un dommage de type incendie (dommage X) et subir dans le même temps un risque de baisse d'activité pour lequel elle ne peut s'assurer (risque Y).

Il existe 4 états de la nature:

Dommage	0	$L + M$	L	M
Proba	$1 - p - q + r$	r	$p - r$	$q - r$

D'où le programme de l'agent:

$$\text{Max}_I ru[w - L - M - (1 + \lambda)pI + I]$$

$$+ (p - r)u[w - L - (1 + \lambda)pI + I]$$

$$+ (q - r)u[w - M - (1 + \lambda)pI]$$

$$+ (1 - p - q + r)u[w - (1 + \lambda)pI]$$

Appelons $f(I)$ cette fonction. On vérifie qu'elle est concave.

La condition du premier ordre s'écrit:

$$r(1 - (1 + \lambda)p)u'[w - L - M - (1 + \lambda)pI + I]$$

$$+ (p - r)(1 - (1 + \lambda)p)u'[w - L - (1 + \lambda)pI + I]$$

$$- (q - r)(1 + \lambda)pu'[w - M - (1 + \lambda)pI]$$

$$- (1 - p - q + r)(1 + \lambda)pu'[w - (1 + \lambda)pI] = 0$$

4. Si $r > pq$, les dommages sont positivement corrélés. En effet on a : $p(Y = M/X = L) > p(Y = M)$

avec $p(Y = M/X = L) = \frac{r}{p}$.

Pour $\lambda = 0$, on a $f'(I = L) = (r - qp)u'(w - M - pL) + (pq - r)u'(w - pL) > 0$.

Donc $I^* > L$. (sur-assurance).

Donc si $f'(I)$ décroît si λ augmente, il existe un $\lambda > 0$ tel que $f'(L) = 0$. Dans ce cas, pour $\lambda > 0$, l'assurance complète peut être optimale.

Résultat intuitif: pour s'assurer contre le risque Y (non assurable) corrélé au risque X l'agent se "sur-assure".

On peut avoir de l'assurance totale même si la prime est chargée ($\lambda > 0$) ce qui n'est jamais le cas s'il n'y a qu'un seul risque.

Exercice 12

A. L'individu maximise $pu(W - S + (1 - b)I) + (1 - p)u(W - bI)$

Pour $u(x) = \ln x$, on obtient:

$$I = S \cdot \frac{1-p}{1-b} - W \cdot \frac{b-p}{b(1-b)}.$$

Une augmentation de W réduit l'aversion au risque et donc réduit la demande d'assurance pour $b > p$. Explication: l'indice absolu d'aversion pour le risque est une fonction décroissante de la richesse.

On a $I < S$ ssi $b > p$.

B.

1. Une hausse de la qualité réduit la probabilité de dommage.

2 et 3. L'individu maximise en e :

$$p(e)u(W - S - \frac{1}{2}e^2) + (1 - p(e))u(W - \frac{1}{2}e^2)$$

4. L'individu maximise en I :

$$p(e)u(W - S - I(1 - (1 + \lambda)p(e)) - \frac{1}{2}e^2) + (1 - p(e))u(W - (1 + \lambda)p(e)I - \frac{1}{2}e^2)$$

Si $\lambda = 0$, l'agent fait face à un contrat avec prime neutre et un revenu égal à $W - \frac{1}{2}e^2$. Il choisit donc l'assurance totale: $I = S$.

Le choix de e est obtenu par la maximisation de l'espérance d'utilité qui s'écrit donc:

$u(W - p(e)S - \frac{1}{2}e^2)$. La fonction u est croissante. L'agent maximise donc $W - p(e)S - \frac{1}{2}e^2$.

La CPO de ce programme concave est donc: $-p'(e)S = e$. On a donc $e^* > 0$ puisque $-p'(0) > 0$.

On a donc un individu qui choisit de s'assurer et d'investir dans une alarme incendie. Les deux instruments sont des compléments.

C.

1. La richesse est égale à $W - S - cL$ en cas d'incendie et à $W - cL$ en l'absence d'incendie.

Le paramètre c mesure le coût d'un euro de réduction du dommage. Il s'apparente au paramètre b de la partie A.

Par analogie on trouve donc $L = I = S \cdot \frac{1-p}{1-c} - W \frac{c-p}{c(1-c)}$.

2 et 3. La protection et l'assurance sont des substituts parfaits. L'agent choisit le moyen le moins onéreux de réduire le dommage en fonction de la comparaison de b et c .

Exercice 9

A. La richesse de l'entrepreneur est $\underline{p}f(l) - wl + I - (1 - q)I$ avec probabilité $1 - q$ et $\bar{p}f(l) - wl - (1 - q)I$ avec probabilité q .

La CB de l'entrepreneur, en notant $\bar{y}$ son revenu si le prix est haut et $\underline{y}$ si le prix est bas, est donc: $q(\bar{p}f(l) - wl) + (1 - q)(\underline{p}f(l) - wl) = (1 - q)\underline{y} + q\bar{y}$.

L'entrepreneur choisit donc de demander à la firme de maximiser l'espérance de profit.

L'assurance permet de séparer l'objectif de l'entrepreneur (maximiser l'espérance d'utilité) de l'objectif de la firme.

On a donc l_c tel que $f'(l_c) = \frac{w}{q\bar{p} + (1-q)\underline{p}}$.

B. 1. L'objectif de l'entrepreneur est de maximiser son espérance d'utilité $qu(\bar{p}f(l) - wl) + (1 - q)u(\underline{p}f(l) - wl)$. On donc l_u tel que

$$q(\bar{p}f'(l) - w)u'(\bar{p}f(l) - wl) + (1 - q)(\underline{p}f'(l) - w)u'(\underline{p}f(l) - wl) = 0$$

$$2. \quad p f'(l(p)) = w$$

3. Le prix p_u est le prix fictif certain qui aurait conduit à la même espérance d'utilité que dans le risque.

La concavité de u assure que:

$$qu(\bar{p}f(l_u) - wl_u) + (1 - q)u(\underline{p}f(l_u) - wl_u) < u((q\bar{p} + (1 - q)\underline{p})f(l_u) - wl_u)$$

On a par ailleurs $(q\bar{p} + (1 - q)\underline{p})f(l_u) - wl_u \leq (q\bar{p} + (1 - q)\underline{p})f(l(q\bar{p} + (1 - q)\underline{p})) - wl(q\bar{p} + (1 - q)\underline{p})$.

$$\text{Donc } (q\bar{p} + (1 - q)\underline{p})f(l(q\bar{p} + (1 - q)\underline{p})) - wl(q\bar{p} + (1 - q)\underline{p}) > p_u f(l(p_u)) - wl(p_u)$$

On en déduit $p_u < q\bar{p} + (1 - q)\underline{p}$

Le risque réduit le prix perçu.

4. Si on prend la dérivée de l'espérance d'utilité en $l(q\bar{p} + (1-q)\underline{p}) = l_c$, on a:

$$q(\bar{p}f'(l_c) - w)u'(\bar{p}f(l_c) - wl_c) + (1-q)(\underline{p}f'(l_c) - w)u'(\underline{p}f(l_c) - wl_c) \\ < u'(\underline{p}f(l_c) - wl_c) [q(\bar{p}f'(l_c) - w) + (1-q)(\underline{p}f'(l_c) - w)] = 0$$

On en déduit donc que $l_u < l_c$