

L'identité de Cassini

Les termes de la suite de Fibonacci sont définis par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et, si $n > 0$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Ainsi $F_2 = 0 + 1 = 1$, $F_3 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5, \dots$. On veut montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Initialisation : cas $n = 1$. $F_2F_0 - F_1^2 = 1 \cdot 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$.

Hérédité Supposons maintenant que l'identité soit vraie pour un entier $n \geq 1$, c'est-à-dire

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Nous allons montrer qu'elle est vraie pour $n + 1$, autrement dit :

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

Calculons l'expression de gauche en utilisant la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$:

$$\begin{aligned} F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2 \\ &= -(F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2). \end{aligned}$$

Or $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) - F_n^2$ et, d'après la relation de récurrence réarrangée $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$, on obtient

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2.$$

Ainsi

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = -(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2).$$

D'après l'hypothèse de récurrence la parenthèse vaut $(-1)^n$, d'où

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

Cela termine la récurrence et prouve l'identité pour tout $n \geq 0$. □