

Monotonie des quotients F_{2n+1}/F_{2n} et F_{2n}/F_{2n-1}

Rappelons la récurrence des nombres de Fibonacci

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Définissons pour tout $n \geq 0$ le quotient

$$r_n := \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad (n \geq 1),$$

et observons la relation simple obtenue en divisant la récurrence par F_n :

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}.$$

Nous poserons ensuite

$$x_n := r_{2n} = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} = a_n, \quad y_n := r_{2n-1} = \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} = b_n.$$

A l'aide de $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$ nous avons

$$\begin{aligned} x_{n+1} = r_{2n+2} &= 1 + \frac{1}{r_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{r_{2n}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_n}} = 1 + \frac{x_n}{x_n + 1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 1}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \geq 1$ on a l'itération explicite

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 1} = f(x_n). \tag{1}$$

où f est la fonction qui à un réel t positif associe $f(t) = \frac{2t+1}{t+1}$

On peut vérifier que la fonction f est strictement croissante (pour $t > 0$).

Or $x_1 = \frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$ et $x_2 = \frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} < x_1$.

Donc $x_3 = f(x_2) < f(x_1) = x_2$, et de proche en proche on voit en appliquant la fonction croissante f que $x_{n+1} < x_n$ pour tout $n > 1$. La suite x est donc décroissante.

Rappelons que $y_n = r_{2n-1}$. En utilisant la relation $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$ nous obtenons

$$y_{n+1} = r_{2n+1} = 1 + \frac{1}{r_{2n}} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

Comme (x_n) est strictement décroissante, $\frac{1}{x_n}$ est croissante et donc y_n aussi.