
Université de Paris I

Magistère d'Economie - Première année Cours de Microéconomie Interrogation de contrôle continu 3

Mercredi 19 novembre 2025

Durée de l'épreuve : 1h15 minutes

Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.

Exercice 1 (5 points)

On considère un agent qui dispose d'une richesse monétaire égale à W . Cet agent a la possibilité d'investir dans un actif sans risque qui rapporte un euro pour un euro placé et un actif risqué qui rapporte, pour un euro placé, $1 + r$ euro avec probabilité p ($\frac{1}{2} < p < 1$) ou $1 - r$ euro avec probabilité $1 - p$. On suppose que $0 < r < 1$. Cet agent a des préférences Espérance d'utilité représentées par une fonction VNM $u(x) = \ln(x)$. Déterminer la part de la richesse placée dans l'actif risqué.

Exercice 2 (10 points)

On considère N agents identiques. Chaque agent fait face à un risque de chômage. L'agent travaille avec probabilité $1 - p$ et perçoit un salaire égal à w et est au chômage avec probabilité p et ne perçoit alors aucun revenu.

Ces agents décident de mettre en place un système d'indemnisation : lorsqu'un agent travaille il paye une cotisation égale à c et lorsqu'il est au chômage il perçoit une allocation égale à a . Au chômage il perçoit donc a et lorsqu'il travaille il perçoit $w - c$. La caisse d'allocation-chômage doit être équilibrée : les cotisations perçues sont égales aux allocations versées. En outre, on suppose que N est grand de sorte que Np agents sont au chômage et $N(1 - p)$ travaillent. Les agents ont tous les mêmes préférences, du type espérance d'utilité, représentées par une fonction de VNM $u(x)$ avec $u(x)$ croissante et concave.

1. Ecrire l'espérance d'utilité d'un agent avec et sans système d'allocation-chômage.
2. Ecrire la relation entre a et c lorsque les comptes de la caisse sont à l'équilibre.
3. En déduire le niveau d'allocation et de cotisation qui maximise l'espérance d'utilité d'un agent. Cet agent préfère-t-il un système avec ou sans allocation-chômage ? Commenter le résultat obtenu.

On suppose à présent qu'une part des agents fait face à un risque de chômage élevé ($p = p_1$) et une part des agents fait face à un risque de chômage faible ($p = p_2 < p_1$). La caisse d'allocation chômage propose deux contrats : $c_i = p_i w$ et $a_i = (1 - p_i)w$ avec $i = 1, 2$.

4. Si chaque agent peut choisir librement le contrat, quel sera le choix effectué ? Que peut-on dire alors de l'équilibre financier de la caisse d'allocation-chômage ?

La caisse d'allocation chômage modifie les contrats et décide de proposer deux contrats :

Contrat 1 : $c_1 = p_1 w$ et $a_1 = (1 - p_1)w$

Contrat 2 : une allocation a_2 et une cotisation c_2 tels que :

(i) $p_2 a_2 = c_2(1 - p_2)$

(ii) un agent avec un risque de chômage faible est indifférent entre les deux contrats proposés.

5. Montrer que les conditions (i) et (ii) impliquent que $c_2 < p_2 w$.
6. Un agent qui fait face à un risque de chômage faible est-il totalement assuré contre le risque de chômage en choisissant le contrat 2 ?
7. Montrer que l'agent avec un risque de chômage élevé préfère le contrat 1 au contrat 2.
8. Que peut-on dire de l'équilibre financier de la caisse d'allocation-chômage ?

Exercice 3 (5 points)

On considère un individu qui dispose d'un revenu égal à 200 et qui fait face à un risque de dommage égal à 100 (avec probabilité $\frac{1}{4}$) et à 140 (avec probabilité $\frac{1}{4}$). Une compagnie d'assurance propose deux contrats. Le contrat A propose un remboursement total avec une franchise de 100. Le contrat B propose un remboursement de 20 quel que soit le dommage.

Les deux contrats exigent une même prime de 15.

Montrer qu'un contrat est préféré à l'autre par un agent qui a de l'aversion pour le risque.

Eléments de correction

Exercice 1 (5 points)

La richesse de l'agent est égale à $W + \alpha W r$ avec probabilité p et $W - \alpha W r$ avec probabilité $1 - p$.

L'agent maximise l'espérance d'utilité de cette richesse par rapport à α .

On trouve :

$$\alpha = \frac{2p - 1}{r}$$

Exercice 2 (15 points)

1. Sans contrat : $pu(0) + (1 - p)u(w)$ et avec contrat $pu(a) + (1 - p)u(w - c)$
2. $pa = (1 - p)c$
3. L'agent maximise $pu(\frac{1-p}{p}) + pu(w - c)$. On en déduit la condition du premier ordre après simplification : $u'(\frac{1-p}{p}) = u'(w - c)$. On en déduit que $c = pw$ et $a = (1 - p)w$. Le contrat permet à l'agent d'être entièrement assuré contre le risque de chômage. On a donc $u((1 - p)w) > pu(0) + (1 - p)u(w)$ par concavité de $u(x)$.
4. On a $c_1 > c_2$ et $a_1 < a_2$. Tous les agents choisissent donc le contrat 2. L'équilibre n'est pas assuré car $p_1 a_2 > (1 - p_1)c_2$.
Remarque : la réplication du contrat optimal trouvé à la question 3 ne fonctionne pas : tous les agents préfèrent le contrat correspondant au faible risque de chômage, ce qui ne permet pas d'équilibrer la caisse. Il faut donc modifier les contrats pour garantir cet équilibre. On pourrait, par exemple, construire un unique contrat calculé sur le risque moyen. Une autre solution consiste à construire deux contrats séparés. C'est l'objet des questions suivantes.
5. L'agent 2 est indifférent entre les deux contrats. On a donc $u((1 - p_1)w) = p_2 u(a_2) + (1 - p_2)u(w - c_2)$. Si $c_2 = p_2 w$ et donc par équilibre de la caisse (condition i) $a_2 = (1 - p_2)w$, on aurait $u((1 - p_1)w) = u((1 - p_2)w)$. Le contrat 2 doit donc faire supporter un risque de revenu à l'agent 2.
6. L'agent de type 2 n'est pas assuré puisque $w - c_2 > (1 - p_2)w > a_2$.
7. On déduit de la question précédente que $a_2 < w - c_2$. On a donc : $p_1 u(a_2) + (1 - p_1)u(w - c_2) < p_2 u(a_2) + (1 - p_2)u(w - c_2) = u(w(1 - p_1))$. On en déduit donc que l'agent 1 préfère le contrat 1 au contrat 2.
8. Par construction des contrats 1 et 2, si l'agent de type 1 choisit le contrat 1 et l'agent de type 2 le contrat 2, la caisse est à l'équilibre.

Conclusion : pour assurer l'équilibre des caisses, on a dû construire un contrat 2 pour les agents avec le risque le moins élevé qui comporte un risque de revenu. Ce contrat risqué n'est pas choisi par l'agent avec le risque le plus élevé.

Barème : un point par question sauf pour les questions 3 et 4 (deux points).

Exercice 3 (5 points) Dans le cas du contrat avec franchise, la distribution du revenu est la suivante : 185 ou 85 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Le deuxième contrat donne le revenu aléatoire : 185 avec probabilité $\frac{1}{2}$, 105 ou 65 avec probabilité $\frac{1}{4}$. Si on ajoute au résultat 185 de la première loterie une loterie qui donne 20 ou -20 avec probabilité $\frac{1}{2}$, on obtient la deuxième loterie. On en déduit que la deuxième loterie est dominée au sens de la DS2 par la première loterie.