

Chapitre 1 : Croissance et accumulation

Jean-Olivier Hairault (PSE)

23 février 2026

Le modèle de Solow

La croissance résulte de l'augmentation continue des facteurs de production accumulables. Les économistes classiques (Adam Smith, David Ricardo et Karl Marx) privilégiaient ainsi l'accumulation du capital physique comme facteur de croissance. Le premier modèle de croissance néoclassique, proposé par Robert Solow en 1956, s'inscrivait également dans cette logique, mais montrait la nécessité de prendre en compte une amélioration continue de la qualité des biens d'équipement, sous le jeu du progrès technique, pour comprendre la pérennité de la croissance.

Le modèle de Solow

- ▶ Quel rôle jouent les comportements d'accumulation de capital physique ? Peuvent-ils expliquer les disparités entre pays ?
- ▶ Le modèle de Solow en 1956 souligne que la source de croissance basée sur cette forme d'accumulation peut se tarir en raison de la décroissance de la productivité du capital.
- ▶ A terme, il ne reste plus que la dynamique du progrès technique pour assurer la pérennité de la croissance du revenu moyen.

Le modèle de Solow

- ▶ Le modèle proposé par Robert Solow en 1956 est considéré comme fondateur de la théorie néoclassique de la croissance.
- ▶ Alors que l'accumulation du capital physique est centrale, la modélisation des choix d'épargne reste cependant sommaire et il faudra attendre le modèle de David Cass en 1965 pour une présentation mieux fondée des choix individuels en matière d'accumulation.

Les hypothèses du modèle de Solow

- ▶ Le modèle de Solow constitue une économie extrêmement simplifiée. Il a pour ambition de fournir une représentation des mécanismes essentiels au coeur du phénomène de la croissance.
- ▶ Il s'agit d'une économie déjà développée où les ressources naturelles, en premier lieu la terre, n'apparaissent pas parmi les facteurs de production. Ces derniers correspondent uniquement au capital physique et au travail.

Les hypothèses du modèle de Solow (les entreprises)

- ▶ Le travail H est assimilé à la dimension quantitative des heures travaillées.
- ▶ K_t est le stock des biens d'investissement dont les entreprises disposent au début de la période t .
- ▶ Ce stock résulte des investissements effectués dans le passé, nets de la dépréciation qui se produit au taux δ .
- ▶ A chaque période, les entreprises investissent pour augmenter leur stock de capital disponible à la période suivante :

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

Les hypothèses du modèle de Solow (les entreprises)

- ▶ Les biens de consommation et les biens d'investissement ne sont pas distingués : il n'existe qu'un seul type de bien pouvant servir à la fois à des fins de consommation et d'investissement.
- ▶ Le capital physique est supposé parfaitement réversible, dans le sens où il peut être utilisé à des fins de consommation, même lorsqu'il a été installé et utilisé à des fins de production.

Les hypothèses du modèle de Solow (les entreprises)

- ▶ La production est réalisée à partir de la combinaison de capital physique et de travail dont l'efficacité croît au cours du temps du fait de l'existence d'un progrès technique A_t :

$$Y_t = F(K_t, A_t H_t)$$

- ▶ Le progrès technique A porte sur le facteur travail (neutralité au sens de Harrod). Il permet d'augmenter l'efficacité du facteur de production non accumulable. Il est supposé exogène et croître à un taux égal à g .

$$A_t = (1 + g)^t A_0$$

- ▶ Le modèle de Solow n'a pas pour ambition d'expliquer les causes de l'existence d'un progrès technique. Il analyse uniquement ses implications.

Les hypothèses du modèle de Solow (les entreprises)

- ▶ La fonction de production F est supposée continue et deux fois dérivable.

$$\frac{\partial F}{\partial K} = F'_K > 0, \frac{\partial F}{\partial H} = F'_H > 0$$

et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = F''_K < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial H^2} = F''_H < 0$$

- ▶ Les productivités marginales F'_H et F'_K sont naturellement positives : l'ajout d'une unité supplémentaire d'un facteur de production augmente la quantité de biens produits.
- ▶ En revanche, ces productivités marginales sont supposées décroissantes.

Les hypothèses du modèle de Solow (les entreprises)

- ▶ On ajoute des conditions aux bornes, les conditions d'Inada :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} F'_K = \lim_{H \rightarrow \infty} F'_H = 0$$

et

$$\lim_{K \rightarrow 0} F'_K = \lim_{H \rightarrow 0} F'_H = +\infty$$

- ▶ Nous considérerons par la suite une fonction de production Cobb-Douglas parmi l'ensemble des fonctions satisfaisant les conditions précédentes :

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t H_t)^{1-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1$$

Les hypothèses du modèle de Solow (les entreprises)

- Les entreprises expriment à chaque période des demandes de travail et de capital qui maximisent leur profit. Comme elles sont supposées identiques, nous raisonnerons sur une entreprise représentative. A une période t quelconque, son profit est égal à :

$$\pi_t = Y_t - W_t H_t - I_t$$

Ce profit est exprimé en termes réels.

- L'investissement engendre une dépense courante et permet dans le futur de produire plus.

Les hypothèses du modèle de Solow (les entreprises)

- ▶ Une première remarque s'impose : l'accumulation du capital physique est un acte intertemporel dans le sens où il fait intervenir le présent et le futur.
- ▶ Les anticipations sont donc au coeur de ce comportement. Le degré d'incertitude sur la période future en constitue potentiellement une dimension importante.
- ▶ Nous supposerons par la suite, pour simplifier l'analyse, que l'environnement des acteurs économiques est parfaitement connu.

Les hypothèses du modèle de Solow (les entreprises)

- ▶ Quelle est le niveau d'investissement optimal ? Raisonnons sur la dernière unité (en termes réels) investie.
- ▶ Son coût est égal au taux d'intérêt réel r_t . En effet, il s'agit du coût de l'argent (taux débiteur) si l'entreprise emprunte ou du coût d'opportunité de ne pas placer sur les marchés financiers (taux créditeur) si elle s'autofinance. Nous supposons ici que les entreprises ont accès à un marché financier parfait où taux d'intérêt créditeur et débiteur sont égaux et où il n'existe pas de rationnements quantitatifs.

Les hypothèses du modèle de Solow (les entreprises)

- ▶ Quel est le rapport (marginal) de cette unité investie ? Cette unité permettra d'obtenir un supplément de biens produits en quantité donnée par la productivité du capital en $t + 1$, $\frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_{t+1}}$, auquel il faut retrancher la proportion usée δ de l'unité investie et utilisée en $t + 1$.
- ▶ Le montant optimal de l'investissement est tel que la productivité marginale du capital nette de la dépréciation est égalisée au taux d'intérêt.

Les hypothèses du modèle de Solow (les entreprises)

- On peut dériver plus explicitement cette condition du programme d'optimisation de l'entreprise :

$$\max_{\dots H_t, K_{t+1} \dots} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{Y_t - w_t H_t - (K_{t+1} - (1 - \delta)K_t)}{\prod_{j=-1}^{t-1} (1 + r_j)} \right)$$

- Les intérêts composés $\prod_{j=-1}^{t-1} (1 + r_j)$ servent de facteur d'actualisation des flux de profits futurs. Comme, par convention, on se situe à l'origine en $t = 0$, K_0 est donné et le facteur d'actualisation est égal à 1 pour cette période, ce qui implique que r_{-1} , le taux d'intérêt entre la période -1 et 0, soit égal à zéro. W est le salaire réel. Les entreprises sont supposées en concurrence parfaite et prennent en conséquence ces prix comme donnés.

Les hypothèses du modèle de Solow (les entreprises)

- L'investissement I_t permet d'ajuster le stock de capital existant K_t à son niveau désiré K_{t+1} . La condition d'optimalité obtenue en dérivant par rapport K_{t+1} , qui intervient à deux périodes successives t et $t + 1$ est :

$$\frac{\frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_{t+1}} + (1 - \delta)}{\prod_{j=-1}^t (1 + r_j)} = \frac{1}{\prod_{j=-1}^{t-1} (1 + r_j)}$$

- On retrouve la condition d'optimalité obtenue par le raisonnement intuitif sur deux périodes :

$$\frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_{t+1}} - \delta = r_t$$

Les hypothèses du modèle de Solow (les entreprises)

- ▶ Il faut souligner que le taux d'intérêt r_t est fixé à la période t et est donc connu parfaitement au moment de la décision d'investissement, tandis que la productivité marginale du capital est une grandeur future.
- ▶ On peut définir le coût du capital z comme la somme du taux d'intérêt et du taux de dépréciation :

$$z_{t+1} = r_t + \delta$$

C'est le coût d'usage d'une unité de biens investie dans une unité de capital.

Les hypothèses du modèle de Solow (les entreprises)

A l'inverse le comportement de demande de travail est purement statique, déterminée par l'égalisation de la productivité marginale du travail au salaire réel :

$$\frac{\partial Y_{t+1}}{\partial H_{t+1}} = W_{t+1}$$

Les hypothèses du modèle de Solow (les ménages)

- ▶ Les ménages offrent du travail, demandent des biens de consommation et épargnent. Ils sont supposés identiques et nous pourrions raisonner là encore sur un ménage représentatif.
- ▶ Une fraction θ de la population de taille N offre de façon inélastique h unités de temps. Le volume d'heures offertes de la période t est donc égal à :

$$H_t^s = \theta N_t h$$

- ▶ Comme h et θ sont des variables bornées, et ne peuvent donc pas rendre compte de la croissance, nous supposons dorénavant, pour simplifier, que :

$$H_t^s = N_t$$

- ▶ La population est supposée croître de façon exogène au taux démographique n :

$$N_t = N_0(1 + n)^t$$

L'offre de travail croît donc de façon exogène au taux n .

Les hypothèses du modèle de Solow (les ménages)

- ▶ L'épargne est fonction du revenu, conformément à la loi psychologique fondamentale de Keynes :

$$S_t = Y_t - C_t = Y_t - cY_t = (1 - c)Y_t = sY_t \quad 0 < s < 1$$

- ▶ Le taux d'épargne s est exogène et ne dérive pas explicitement d'une logique de choix intertemporels dans le modèle de Solow. Il faudra attendre le modèle de croissance optimale proposé par David Cass (1965) pour proposer des fondements plus solides à la logique de l'épargne.

Les hypothèses du modèle de Solow (l'équilibre macroéconomique)

- ▶ Modèle de Solow : les motivations des comportements d'épargne, d'offre de travail, les sources du progrès technique (les comportements d'innovation) ne sont pas explicitées. On étudie leurs implications.
- ▶ Seuls les comportements de demande de travail et de capital sont endogènes. Ils sont compatibles avec l'épargne et l'offre de travail exogènes par l'ajustement du salaire et du taux d'intérêt à l'équilibre macroéconomique.

Les hypothèses du modèle de Solow (l'équilibre macroéconomique)

- ▶ Le salaire est supposé parfaitement flexible et permet d'égaliser à chaque période l'offre et la demande de travail $H_t^d = H_t^s = H_t$. La demande de travail s'ajuste ainsi au niveau de l'offre exogène :

$$H_t = N_t \quad \forall t$$

Grâce à l'ajustement à chaque période du salaire, toute l'offre de travail est employée dans l'économie : il n'y a pas de chômage.

- ▶ De façon analogue, le taux d'intérêt permet d'égaliser l'épargne et l'investissement. Par la flexibilité du taux d'intérêt, épargne et investissement coïncident à chaque période. Plus précisément, l'investissement s'ajuste au niveau de l'épargne qui est déterminé indépendamment du taux d'intérêt :

$$I_t = S_t \quad \forall t$$

La dynamique du modèle de Solow

- ▶ Le modèle de Solow prend en compte trois sources d'évolution temporelle de la production.
- ▶ La première réside dans la croissance démographique qui se traduit par l'augmentation continue des heures travaillées grâce à l'ajustement du salaire réel.
- ▶ La seconde est imputable au progrès technique qui permet de produire plus pour une même quantité de travail utilisé.
- ▶ Enfin, la troisième repose sur l'accumulation du capital. Si les deux premières sources “tombent du ciel” de façon déterministe et exogène, la dernière est au coeur de la dynamique endogène de l'économie.

La dynamique du modèle de Solow

- ▶ De façon générale, la production évolue de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\log Y_{t+1} - \log Y_t &= \alpha(\log K_{t+1} - \log K_t) + (1 - \alpha)(\log A_{t+1} - \log A_t) \\ &+ (1 - \alpha)(\log N_{t+1} - \log N_t)\end{aligned}$$

- ▶ On peut donc en déduire la relation suivante entre les taux de croissance de ces variables :

$$\gamma_{t+1}^Y = \alpha\gamma_{t+1}^K + (1 - \alpha)(\gamma^A + \gamma^N)$$

- ▶ Le taux de croissance de la production varie dans le temps en fonction de l'intensité de l'accumulation du stock de capital. En effet, seul le taux de croissance de stock de capital est sujet à des variations temporelles :

$$\gamma_{t+1}^Y = \alpha\gamma_{t+1}^K + (1 - \alpha)(g + n) \quad (1)$$

La dynamique du modèle de Solow

- Or le taux de croissance du capital est déterminé par le niveau de l'investissement rapporté au stock de capital :

$$\gamma_{t+1}^K = \frac{I_t - \delta K_t}{K_t} = \frac{I_t}{K_t} - \delta$$

- Le taux de croissance du capital est égal au taux d'investissement I/K net de la dépréciation : le flux supplémentaire de capital rapporté au stock existant, auquel il faut enlever la fraction du capital qui est usagée, détermine en effet le taux d'accroissement du capital.

La dynamique du modèle de Solow

- ▶ C'est parce que l'épargne et l'investissement entraînent une accumulation du capital que la production et le revenu augmentent, ce qui alimente en retour l'accumulation.
- ▶ La particularité du modèle de Solow est en effet de lier l'investissement directement au niveau de la production par l'intermédiaire du comportement d'épargne et de la flexibilité du taux d'intérêt :

$$\gamma_{t+1}^K = \frac{sY_t}{K_t} - \delta \quad (2)$$

La dynamique du modèle de Solow

- L'expression du taux de croissance de la production est donnée pour une période quelconque, en combinant les équations (1) et (2), par l'expression suivante :

$$\gamma_{t+1}^Y = \alpha \frac{sY_t}{K_t} - \alpha\delta + (1 - \alpha)(g + n)$$

- Existe-t-il une limite à cette accumulation du capital qui fait croître l'économie à un rythme supérieur à celui impulsé par les facteurs exogènes que sont le progrès technique et la démographie ?

Le sentier de croissance à taux constant (stationnaire)

- ▶ Vers quelle situation converge-t-on à long terme ? Une certaine régularité finit-elle par s'imposer à terme ? En particulier, existe-t-il une croissance régulière à taux constant ?
- ▶ On remarque que le taux de croissance du produit γ^Y est constant si la production et le capital croissent à un taux identique. En effet, la variation du taux de croissance du produit s'écrit :

$$\Delta \gamma_{t+1}^Y = \alpha s \left(\frac{Y_t}{K_t} - \frac{Y_{t-1}}{K_{t-1}} \right)$$

Le sentier de croissance à taux constant (stationnaire)

- Cette variation est nulle si :

$$\frac{Y_t}{K_t} = \frac{Y_{t-1}}{K_{t-1}} \Leftrightarrow \frac{Y_t}{Y_{t-1}} = \frac{K_t}{K_{t-1}}$$

- Il existe donc une évolution particulière du produit qui se fait à un taux constant. Lorsque production et capital croissent au même taux, alors la croissance est régulière. On parle de sentier de croissance à taux constant ou régulière ou stationnaire.

Le sentier de croissance à taux constant (stationnaire)

- ▶ Sur ce sentier, de l'équation (1) on déduit que le taux de croissance est égal à $g + n$ et la croissance est équilibrée : tous les agrégats macroéconomiques croissent à ce taux. En effet, l'investissement, l'épargne ($I = S = sY$) et la consommation ($C = cY$) croissent au taux de la production.
- ▶ En revanche, le salaire réel ($w = (1 - \alpha)Y/H$) croît au taux g , tandis que le taux d'intérêt ($r = \alpha Y/K$) a un taux de croissance nul.
- ▶ Remarquons que les agrégats par tête croissent alors au taux du progrès technique. Le modèle de Solow est ainsi capable de reproduire les faits stylisés mis en évidence par Kaldor.

Le sentier de croissance à taux constant (stationnaire)

- ▶ Comme les variables macroéconomiques croissent sur ce sentier au taux $n + g$, déflavons l'ensemble des variables par le facteur de croissance exogène AN pour se ramener à des variables constantes sur ce sentier.
- ▶ De façon générale, pour une variable X quelconque, on peut définir la variable intensive $x = \frac{X}{AN}$.
- ▶ Ainsi, comme $(\frac{K}{AN})^\alpha (\frac{AN}{AN})^{1-\alpha} = \frac{Y}{AN}$, on en déduit la relation suivante entre variables intensives :

$$y = F(k, 1) = f(k) = k^\alpha$$

Le sentier de croissance à taux constant (stationnaire)

- Comme sur le sentier de croissance régulière, les taux de croissance de la production et du capital sont identiques et égaux à $n + g$, on en déduit, à partir de l'équation (2), que :

$$\frac{s\bar{y}}{\bar{k}} - \delta = n + g$$

- La valeur du capital et du produit en termes intensifs sur le sentier de croissance régulière en découle :

$$\bar{k} = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3)$$

et

$$\bar{y} = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (4)$$

Sur le sentier de croissance régulier, l'ensemble des variables macroéconomiques évoluent à un taux constant donné par les sources de croissance exogène.

La dynamique du modèle de Solow

- ▶ Si production et capital croissent au même taux alors la croissance est régulière.
- ▶ Cependant rien n'assure a priori que cette situation se réalisera effectivement.
- ▶ Pour comprendre les propriétés de la dynamique de la production, il faut donc étudier l'accumulation du capital qui est la seule source de croissance endogène. Comment évolue le stock de capital en termes intensifs ? Converge-t-il vers sa valeur stationnaire ?

La dynamique du modèle de Solow

- ▶ Comme $k = \frac{K}{AN}$, on en déduit l'équation dynamique qui régit son évolution :

$$\log k_{t+1} - \log k_t = (\log K_{t+1} - \log K_t) - (\log A_{t+1} - \log A_t) - (\log N_{t+1} - \log N_t)$$

ce qui implique en termes de taux de croissance :

$$\frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = \frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} - (n + g) = \frac{I_t}{K_t} - (n + g + \delta)$$

- ▶ Cette équation indique que le capital en termes intensifs augmente si le taux de croissance du capital dépasse le rythme du progrès technique et de la démographie. C'est le cas si le taux d'investissement I/K dépasse $n + g$ auquel il faut ajouter la dépréciation δ .

La dynamique du modèle de Solow

- ▶ En effet, le travail efficace croît de façon exogène sous la double influence de la croissance démographique et du progrès technique.
- ▶ L'intensité capitaliste k augmente par conséquent si le taux de croissance du capital et donc le taux d'investissement sont suffisamment élevés. Comme $I_t = S_t = sY_t$:

$$\frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = \frac{sY_t}{K_t} - (n + g + \delta) = \frac{sf(k_t)}{k_t} - (n + g + \delta)$$

La dynamique du modèle de Solow

- ▶ Il est alors facile d'en déduire la variation du capital intensif :

$$k_{t+1} - k_t = sf(k_t) - (n + g + \delta)k_t \quad (5)$$

- ▶ Cette égalité est généralement qualifiée d'équation fondamentale du modèle de Solow, dans le sens où elle résume toute la dynamique des équilibres macroéconomiques qui s'enchaînent de périodes en périodes.
- ▶ Elle signifie que l'intensité capitaliste augmente dans l'économie lorsque l'investissement est suffisant pour compenser les taux de croissance de l'efficacité du travail et de l'emploi auquel il faut ajouter le taux de dépréciation du capital.

La dynamique du modèle de Solow

- ▶ Il existe un niveau de capital tel que le supplément d'investissement entraîne une accumulation du capital juste identique à ce qui est requis pour compenser la croissance du travail efficace et la dépréciation du capital. Dans ce cas, le capital en termes intensif est constant ($k_{t+1} = k_t$).
- ▶ On retrouve ainsi la situation de croissance régulière qui correspond à une stationnarité de k :

$$k_{t+1} = k_t = \bar{k} = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

La dynamique du modèle de Solow

- ▶ L'équation fondamentale de Solow permet d'étudier toute la dynamique du capital, pas seulement le sentier de croissance régulier.
- ▶ On constate que le capital intensif croît (décroît) si son niveau est inférieur (supérieur) à sa valeur stationnaire :

$$k_{t+1} - k_t > 0 \Leftrightarrow k_t < \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \bar{k}$$

$$k_{t+1} - k_t < 0 \Leftrightarrow k_t > \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \bar{k}$$

- ▶ Ainsi, l'économie converge vers le sentier de croissance régulière.

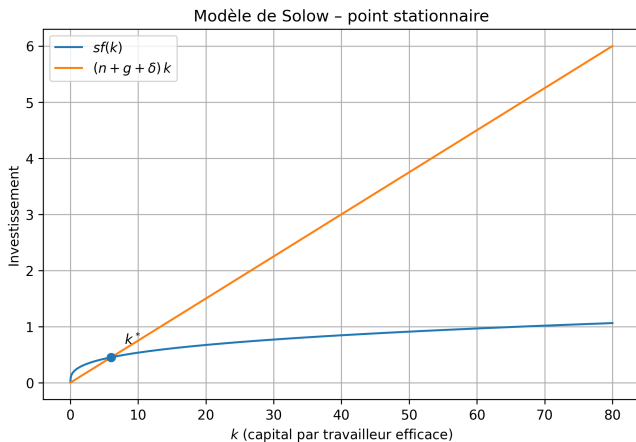
La dynamique du modèle de Solow

- ▶ Avant que le stock de capital n'atteigne ce sentier de croissance de long terme, il croît à un rythme supérieur, ce qui insuffle aussi une croissance plus forte de la production et des autres variables macroéconomiques.
- ▶ Cette croissance plus élevée est d'ailleurs la condition de l'augmentation du stock de capital intensif au cours du temps.
- ▶ Cependant, le rythme de croissance du capital décroît au fur et à mesure que l'accumulation se produit, en raison de la concavité de la fonction f :

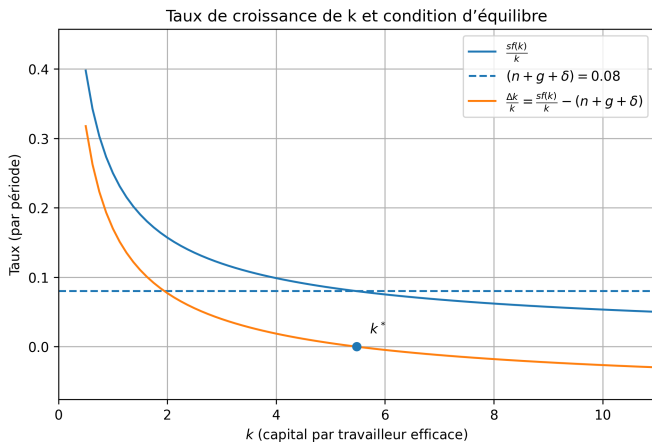
$$\frac{\partial \gamma^k}{\partial k} = \frac{s}{k} \left(f'(k) - \frac{f(k)}{k} \right) < 0$$

Cette situation traduit l'hypothèse de décroissance de la productivité du capital.

Graphique 1 : capital stationnaire



Graphique 2 : capital stationnaire



La dynamique du modèle de Solow

Le graphique 1 permet de comprendre intuitivement le rôle des conditions d'Inada dans l'existence d'un sentier stationnaire. Il est crucial pour qu'un point d'intersection existe que la courbe $f(k)$ "parte au-dessus" de la droite $(n + g + \delta)k_t$ puis finisse par la couper. Pour cela, il suffit que la courbe est une pente supérieure à celle de la droite à l'origine et qu'elle tende vers une pente nulle à terme. Il s'agit exactement des implications des conditions d'Inada.

L'épuisement de la composante endogène de la croissance

- ▶ Ainsi, le rythme de la croissance du revenu par tête est donné à terme par le progrès technique. Le surplus de croissance dû à l'accumulation du capital dans la phase de convergence vers le sentier régulier tend à s'essouffler pour finalement disparaître. Comment expliquer cette situation ?
- ▶ Considérons le cas d'une entreprise particulière. Le fait, par exemple, de pouvoir disposer d'un nombre d'ordinateurs plus important augmente la production horaire de son personnel. Cependant, au fur et à mesure que le nombre d'ordinateurs augmente, le surcroît de production tend à diminuer si le nombre d'employés reste constant. Il ne sert à (presque) rien de doter chaque employé de plusieurs ordinateurs.
- ▶ Ce raisonnement particulier vaut au niveau de l'ensemble de l'économie. La productivité du capital par travailleur tend à diminuer au fur et à mesure de l'accumulation du capital, ce qui introduit une limite à la croissance de la production.

L'épuisement de la composante endogène de la croissance

- ▶ C'est ce que traduit les propriétés de la fonction de production : lorsqu'un facteur de production augmente par rapport à l'autre, sa productivité diminue.
- ▶ Le taux de croissance de l'intensité capitalistique dépend en effet de la productivité du capital :

$$\gamma_{t+1}^k = s \left(\frac{Y_t}{K_t} \right) - (n + g + \delta)$$

$\frac{Y_t}{K_t}$ la productivité moyenne du capital est égale à $\left(\frac{1}{k_t} \right)^{1-\alpha}$ et décroît donc avec k .

- ▶ La décroissance de la productivité du capital est donc centrale dans le résultat de convergence vers un rythme de croissance exogène égal à $n + g$.

L'épuisement de la composante endogène de la croissance

- ▶ Si l'économie croît dans un premier temps à un rythme supérieur, c'est en raison d'une productivité du capital relativement élevée. Au fur et à mesure de l'accumulation, la productivité diminue car le ratio K/AH augmente : moins de facteur travail est utilisé par unité de capital, ce qui diminue la production par unité de capital, et par conséquent l'épargne et l'investissement par unité de capital (I/K). Le taux de croissance du capital diminue donc.
- ▶ Finalement, il vient se caler sur celui du travail efficace AH qui est exogène. A partir d'un certain niveau d'accumulation, l'investissement permet juste de compenser la dépréciation, de doter les nouveaux travailleurs du même montant de capital et de s'adapter à la croissance technologique.

L'épuisement de la composante endogène de la croissance

- ▶ Ainsi, sans progrès technique ($g = 0$), il n'existerait pas de croissance durable de la production par tête.
- ▶ Cette convergence, apparemment inéluctable, vers un état stationnaire est au coeur des prédictions des classiques (Smith, Ricardo et Marx).
- ▶ Elle est liée à l'existence d'un facteur non accumulable et essentiel dans le processus de la production qui peut bloquer la croissance.
- ▶ Dans une société agricole comme celle du début du dix-neuvième siècle, David Ricardo privilégiait la terre comme facteur "bloquant" principal.

L'épuisement de la composante endogène de la croissance

- ▶ Dans une économie industrielle, c'est le taux de croissance du facteur travail, déterminé sur longue période par la croissance démographique, qui fixe une limite à l'accumulation du capital physique.
- ▶ Sans autre source de croissance qui augmente la qualité du facteur fixe, l'accumulation du capital n'est pas suffisante pour assurer la pérennité de la croissance de la production par tête. C'est la conclusion du modèle de croissance néoclassique de Solow.

L'épuisement de la composante endogène de la croissance

- ▶ La majorité des économistes, à la suite de Solow, considère que seule une amélioration continue de la qualité des biens d'équipement sous le jeu du progrès technique est susceptible d'inverser cette tendance à la baisse la productivité du capital par tête au cours du processus d'accumulation.
- ▶ Le pessimisme des Classiques tient précisément à la sous-estimation du rôle du progrès technique qui porte à l'époque essentiellement sur la terre dans ces sociétés pré-industrielles.
- ▶ Rien dans le modèle de Solow ne permet toutefois de contrer de façon définitive ce pessimisme, le progrès technique étant exogène, ce qui laisse ouvert la question de sa pérennité.

L'épuisement de la composante endogène de la croissance

- ▶ Une autre façon de souligner l'importance de la décroissance de la productivité du capital dans le processus de convergence vers une croissance exogène est de considérer le cas-limite, et donc artificiel, d'une constance de cette productivité.
- ▶ Etudions les implications de la fonction de production modifiée $Y_t = \mathcal{A}K_t$ dans le cas où il n'existe plus de progrès technique, ni croissance démographique. $\mathcal{A}$ est une constante qui fixe l'échelle de la productivité du capital désormais constante.

L'épuisement de la composante endogène de la croissance

- ▶ Le taux de croissance sur le sentier stationnaire équilibré ne peut plus être calculé à partir de l'équation (1). Il peut être directement obtenu à partir de celui du stock de capital (équation (2)) :

$$\gamma_{t+1}^Y = \gamma_{t+1}^K = s \frac{Y_t}{K_t} - \delta = s\mathcal{A} - \delta$$

- ▶ Il existe dans ce cas une croissance auto-entretenu par l'accumulation du capital. La productivité du capital est en effet constante et le taux d'investissement est constant.
- ▶ la production par tête croît au taux $s\mathcal{A} - \delta$ qui dépend du taux d'épargne s entre autres.

L'épuisement de la composante endogène de la croissance

- ▶ Ce cas ne doit pas toutefois être considéré comme une explication de la croissance de long terme. Il souligne uniquement l'importance de la décroissance de la productivité du capital physique dans l'épuisement de la croissance endogène.
- ▶ Il permet de préciser les conditions d'une croissance "endogène" : la productivité du facteur accumulable doit être constante. Les rendements d'échelle dans les facteurs accumulables doivent être constants.
- ▶ K doit être considéré comme le stock agrégé de tous les facteurs accumulables, comprenant également le capital humain et les connaissances en général. C'est en fait l'interprétation qu'il faut donner à ce cas qui est connu dans la littérature sur la croissance comme le modèle AK .
- ▶ une croissance démographique ferait croître le taux de croissance à taux constant.... Irréaliste....

La dynamique du modèle de Solow

- ▶ Retour au modèle de Solow
- ▶ En linéarisant l'équation fondamentale de Solow, on peut étudier plus formellement la dynamique autour du point stationnaire. On procède à un développement de Taylor à l'ordre 1 en $\bar{k}$ du membre de droite de l'équation (5).

$$k_{t+1} - k_t = (sf(\bar{k}) - (n+g+\delta)\bar{k}) + (\alpha s \bar{k}^{\alpha-1} - (n+g+\delta))(k_t - \bar{k})$$

- ▶ En utilisant la valeur de $\bar{k}$ donnée par l'équation (3), on obtient l'équation dynamique linéaire suivante :

$$k_{t+1} - k_t = -(1 - \alpha)(n + g + \delta)(k_t - \bar{k})$$

- ▶ Le stock de capital croît à un taux supérieur à celui de long terme tant qu'il est au-dessous de son sentier stationnaire.

La dynamique du modèle de Solow

- Soit $\hat{k} = k - \bar{k}$ l'écart du capital à sa valeur stationnaire. On en déduit l'équation (homogène) qui régit l'évolution de l'écart à l'état stationnaire :

$$\hat{k}_{t+1} = (1 - \lambda)\hat{k}_t$$

avec $\lambda = (1 - \alpha)(n + g + \delta)$, d'où

$$\hat{k}_t = (1 - \lambda)^t \hat{k}_0$$

- Comme $0 < \lambda < 1$, $\hat{k}_t$ converge vers zéro, et k_t vers $\bar{k}$, quelle que soit la situation initiale de l'économie.

La dynamique du modèle de Solow

- L'écart à l'état stationnaire se résorbe à une vitesse donnée par λ :

$$k_t - \bar{k} = (1 - \lambda)^t (k_0 - \bar{k})$$

Plus λ est élevé, plus la convergence est rapide.

- Combien de périodes T sont nécessaires pour réduire de moitié un écart initial donné ?

$$k_T - \bar{k} = 0.5(k_0 - \bar{k}) \Leftrightarrow (1 - \lambda)^T = 0.5$$

Le nombre de périodes T est donc égal à $\frac{\log 0.5}{\log(1-\lambda)}$.

- Si l'on considère que la dépréciation atteint 5% l'an, la croissance de la population 1% et le rythme du progrès technique 2%, alors la variable k rattrape chaque année 5,6% de l'écart qui le sépare de son état stationnaire. La moitié de cet écart est éliminée au bout de 12 années.

Substitution technique et flexibilité des prix

- ▶ L'économie converge vers une situation de croissance régulière équilibrée. En revanche, dans la transition, le capital croît à un taux supérieur à celui du revenu et des autres variables macroéconomiques. Ainsi, le coefficient de capital $v = K/Y$ évolue-t-il au cours de la phase de transition. De même, la productivité du travail se déforme dans cette phase.
- ▶ Il se produit en effet une substitution du capital au travail dans la transition.
- ▶ Cette substitution est techniquement possible, compte tenu de la fonction de production à facteurs substituables supposée,
- ▶ et économiquement désirée par les agents étant donné l'évolution des prix des facteurs.

Substitution technique et flexibilité des prix

- ▶ Une épargne relativement plus abondante du fait de la croissance de la production va être investie par les entreprises du fait de la baisse du taux d'intérêt. Tant que l'accumulation de l'épargne se poursuit, le taux d'intérêt réel diminue, ce qui assure l'accumulation du capital.
- ▶ De façon symétrique, la productivité du travail augmentant au cours de l'accumulation, la demande de travail s'élève, ce qui se traduit par une augmentation continue du salaire réel.
- ▶ La flexibilité des prix est donc essentielle dans la transition, comme la substitution technique du capital au travail.

Substitution technique et flexibilité des prix

- Sachant que $v = \frac{K}{Y} = k^{1-\alpha}$, il est facile de suivre la dynamique du coefficient de capital :

$$\frac{\Delta v_{t+1}}{v_t} = (1 - \alpha) \frac{\Delta k_{t+1}}{k_t}$$

d'où :

$$\Delta v_{t+1} = (1 - \alpha) \left(s k_t^{\alpha-1} - (g + n + \delta) \right) v_t = (1 - \alpha) (s - (g + n + \delta) v_t)$$

soit finalement :

$$\Delta v_{t+1} = (1 - \alpha) s - (1 - \alpha)(g + n + \delta) v_t$$

- La solution stationnaire de cette équation de récurrence linéaire du premier ordre en v est $\bar{v} = \frac{s}{g+n+\delta}$.

Substitution technique et flexibilité des prix

- ▶ On remarque que, sur le sentier de croissance régulier, plus le taux d'épargne est élevé, plus l'économie est capitaliste. La solution (générale) de cette équation dynamique est donnée par l'expression suivante :

$$v_t = \bar{v} + (v_0 - \bar{v})(1 - \lambda)^t$$

avec $\lambda = (1 - \alpha)(g + n + \delta)$.

- ▶ On retrouve la même racine que pour l'évolution des autres grandeurs du modèle. Il y a bien convergence vers la valeur stationnaire $\bar{v} = \frac{s}{g+n+\delta}$.
- ▶ Ainsi, c'est le coefficient de capital qui s'adapte aux niveaux exogènes des autres paramètres s , δ , g et n . Sa constance sur longue période n'implique pas une rigidité technologique, mais résulte d'une convergence vers une valeur d'équilibre stationnaire.

Substitution technique et flexibilité des prix

- Pour souligner cette caractéristique, considérons au contraire une technologie à facteurs complémentaires :

$$Y = \min(K/v, AH/x)$$

avec v et x des paramètres exogènes caractérisant la technologie disponible.

- Si le stock de capital est excédentaire, alors le taux de croissance Y est donné par $g + n$, tandis qu'il est égal à $s/v - \delta$ si le travail en termes efficace est excédentaire.
- L'existence d'un sentier de croissance équilibré ne se produit que si le travail est excédentaire. Dans ce cas, l'économie n'est cependant pas au plein-emploi.

Substitution technique et flexibilité des prix

- ▶ Le coefficient de capital ne peut s'ajuster de façon endogène pour garantir une croissance régulière de plein-emploi. Cette dernière ne peut être obtenue que pour une configuration très particulière des paramètres. Cette condition sur le fil du rasoir est naturellement :

$$s/v - \delta = g + n$$

ou

$$v = \frac{s}{g + n + \delta}$$

On retrouve ici le pessimisme des analyses post-keynésiennes de Harrod et Domar sur le caractère exceptionnel d'une croissance équilibrée de plein-emploi.

- ▶ Cette situation est en revanche nécessairement satisfaite dans le modèle de Solow sur le sentier de croissance régulier grâce au caractère substituable des facteurs de production, mais également à la flexibilité des prix, hypothèses plus pertinentes sur longue période.

Le rôle du taux d'épargne

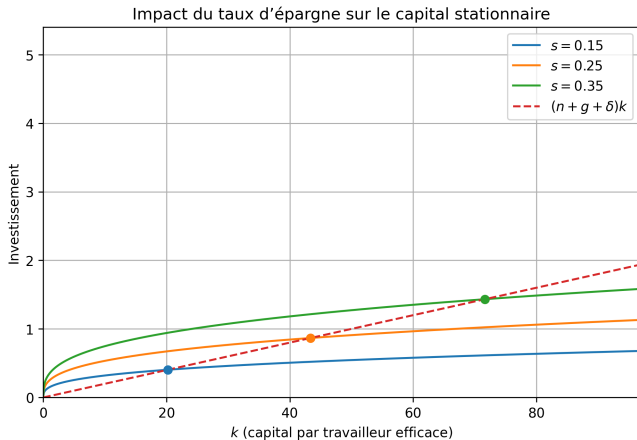
- ▶ Le taux d'épargne détermine le niveau stationnaire du capital physique (équation (3)). Plus d'épargne par unité de revenu implique une plus forte accumulation du capital. L'élasticité du capital ϵ_k^s par rapport au taux d'épargne est égale à $\frac{1}{1-\alpha}$.
- ▶ Comme $y = \frac{s}{n+g+\delta} \frac{\alpha}{1-\alpha}$, il est facile de déterminer l'élasticité ϵ_y^s de la production par rapport au taux d'épargne :

$$\epsilon_y^s = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

et comme $y = Y/AN$:

$$\epsilon_Y^s = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Graphique 3 : Impact du taux d'épargne sur le capital stationnaire



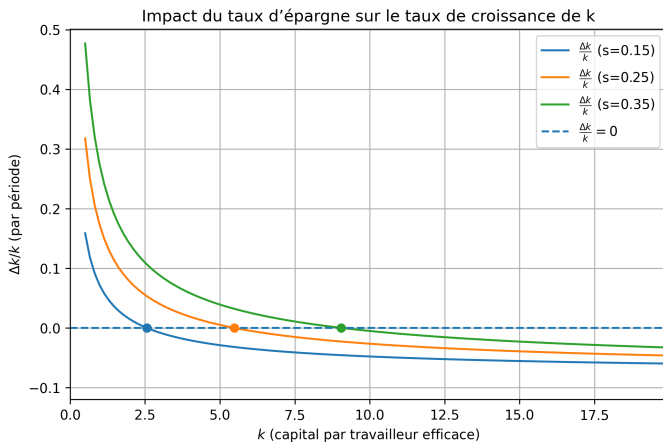
Le rôle du taux d'épargne

- ▶ Comme le capital est rémunéré à sa productivité marginale, α correspond à la part du capital dans la valeur ajoutée, considérée comme étant autour de 0.3.
- ▶ On peut donc chiffrer l'effet d'une hausse du taux d'épargne sur la production tel qu'il est prédit par le modèle de Solow.
- ▶ Si le taux d'épargne augmente de 1%, la production de long terme s'élève de 0.5%. La production est relativement peu sensible à cette variation du taux d'épargne dans la mesure où l'élasticité de la production par rapport au capital α est relativement faible (égale à 0.3).

Le rôle du taux d'épargne

- ▶ Si une modification permanente du taux d'épargne a une influence durable sur le niveau des variables macroéconomiques, elle n'a aucune incidence sur le taux de croissance de long terme.
- ▶ Cependant, une augmentation accroît transitoirement le taux de croissance de l'économie, puisque ce dernier dépend de l'écart entre le capital et son niveau de long terme.
- ▶ Supposons que le taux d'épargne augmente alors que l'économie avait atteint son état stationnaire précédent $\bar{k}$. L'économie est donc en-deçà de son nouvel état stationnaire $\bar{k}'$ et le capital et le revenu croissent transitoirement à un taux supérieur à $n + g$, leur taux de long terme.

Graphique 4 : Impact du taux d'épargne sur le taux de croissance



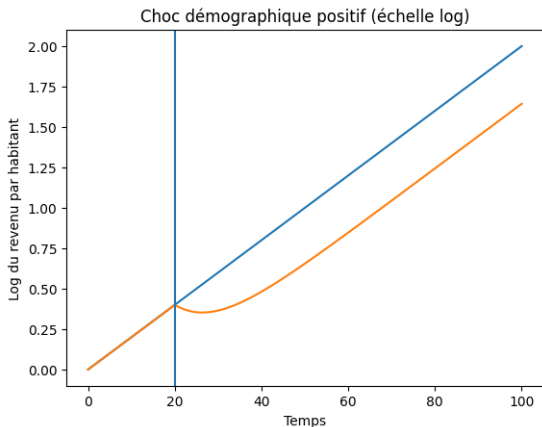
Le rôle du taux de croissance de la population

- ▶ En revanche, une augmentation du taux croissance démographique laisse moins de revenu pour chaque habitant puisque la production par tête est calculée sur une population plus importante.
- ▶ Un taux de croissance démographique plus élevé diminue le capital par travailleur et le revenu par travailleur.
- ▶ Si la population augmente, alors il y a instantanément moins de capital par travailleur, ce qui diminue la production par travailleur. Le taux d'investissement n'est plus suffisant pour maintenir le capital par travailleur.
- ▶ Le taux de croissance de k est négatif, l'économie croît à un taux inférieur à $n + g$. Les variables par tête à un taux inférieur à n .
- ▶ Comme le nombre de travailleur a augmenté, la productivité du capital augmente et donc le taux d'investissement s'élève pour venir se caler sur le nouveau niveau de $n + g + \delta$.
L'accumulation du K augmente mais s'arrête à un niveau de k inférieur par rapport à son niveau avant le choc

Le rôle du taux de croissance de la population

- ▶ Quand la population croît plus vite : il faut investir davantage simplement pour maintenir le même capital par tête, donc une plus grande part de l'investissement sert à équiper les nouveaux travailleurs, il reste moins d'investissement net pour augmenter le capital par travailleur.
- ▶ D'une certaine façon, il existe une dilution de l'accumulation du capital. Le taux de croissance du revenu par tête diminue tant que le stock de capital n'a pas augmenté suffisamment pour compenser l'augmentation du capital "requis".
- ▶ Là encore, une modification permanente du taux de croissance démographique n'a qu'une influence transitoire sur les taux de croissance, mais permanente sur les niveaux.

Graphique 5 : Impact du taux de croissance démographique



Le rôle du taux de croissance de la population

Considérons un modèle sans progrès technique avec une population endogène : un modèle malthusien



$$y_t = f(k_t) \quad k_t = \frac{K_t}{N_t}$$



$$N_{t+1} = (1 + n(c_t))N_t,$$

où $n(\cdot)$ est continue, strictement croissante, et il existe un revenu de subsistance $c^S > 0$ tel que

$$n(c^S) = 0, n(c) > 0 \text{ si } c > c^S, n(c) < 0 \text{ si } c < c^S$$

Le rôle du taux de croissance de la population

- ▶ Tout état stationnaire vérifie :

$$\frac{sf(\bar{k})}{\bar{k}} = n(\bar{c}) + \delta$$

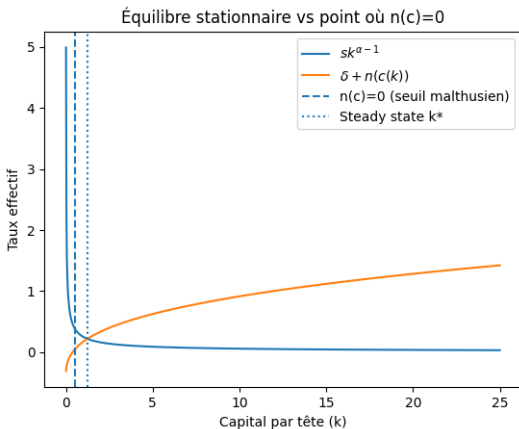
avec $\bar{c} = (1 - s)f(\bar{k})$. d'où

$$s\bar{k}^{\alpha-1} = n(\bar{c}) + \delta$$

- ▶ Si le taux d'épargne augmente, alors n monte, et comme k décroît avec n , l'impact de s est plus faible sur $\bar{k}$.
- ▶ $s \uparrow$ permet une population d'équilibre plus élevée tout en augmentant le niveau de vie stationnaire.

Graphique 6 : Equilibre stationnaire avec $n > 0$

La courbe $sk^{\alpha-1}$ représente le rendement effectif de l'épargne. La courbe $\delta + n(c(k))$ représente la dilution du capital. Leur intersection définit le steady state $\bar{k}$. La ligne verticale en pointillés longs correspond au point où $n(c) = 0$ (seuil malthusien).



Le rôle du taux de croissance de la population

- ▶ Tout état stationnaire malthusien vérifie :

$$n = 0 \Leftrightarrow \bar{c}^M = c^S$$

et

$$\frac{sf(\bar{k}^M)}{\bar{k}^M} = \delta \Rightarrow \bar{k}^M = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- ▶ Cette équilibre n'existe que si $c^S = (1-s)f(\bar{k}^M) = (1-s)\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$
- ▶ $s \uparrow$ peut permettre d'élever le niveau de vie au dessus du niveau de subsistance. L'accumulation du capital reste la clef du niveau de vie malgré la force de dilution (endogène) de la croissance démographique.

Le rôle du taux de croissance de la population

Considérons un modèle sans accumulation du capital et avec de la Terre comme facteur de production



$$Y_t = A_t N_t^{1-\alpha} T^\alpha$$

avec T le facteur terre en quantité fixe normalisé à 1 pour simplifier.

► d'où :

$$y_t = A_t N_t^{-\alpha}$$



$$N_{t+1} = N_t \left(\frac{C_t}{C^S} \right)^\phi,$$

$$n(C_t) = \phi \log(C_t/C^S)$$

$$n(C^S) = 0, n > 0 \text{ si } C > C^S, n < 0 \text{ si } C < C^S$$

Le rôle du taux de croissance de la population

- ▶ le taux de croissance de la population dépend du niveau de développement de l'économie.
- ▶ $\gamma_{t+1}^y = g - \alpha n(C_t)$
- ▶ le PT est source de croissance mais la croissance de la population tire vers le bas en retour au fur et à mesure que le revenu et donc la population augmentent.
- ▶ Tout état stationnaire malthusien vérifie : $\gamma_{t+1}^y = 0$ donc $\log\left(\frac{\bar{C}^M}{c^S}\right) = \frac{g}{\alpha\phi}$
- ▶ on converge vers ce état stationnaire car la croissance du revenu par tête fait croître la population qui tend alors à conduire vers l'état stationnaire.
- ▶ le PT fait croître la population et non la production par tête. Mais il permet de s'écarter du revenu de subsistance.

Le rôle du taux de croissance de la population

- ▶ si $g = 0$ alors le revenu par tête coïncide avec le revenu de subsistance. Comme si $\phi \rightarrow \infty$
- ▶ Tout progrès technique crée une croissance de la population qui atténue les effets sur le revenu par tête. Ceci est d'autant plus vrai que ϕ est fort, ie que la population croît rapidement.
- ▶ Si la croissance de la fertilité diminue à partir d'un certain stade ($n(.)$ peut être bornée supérieurement).... transition démographique vers un monde de croissance stationnaire, si la borne est atteinte lorsque le revenu par tête croît.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Des variations du taux d'épargne et du taux démographique peuvent entraîner des variations transitoires du taux de croissance des économies.
- ▶ On tient ainsi une explication possible de l'instabilité des taux de croissance dans le temps, mais aussi dans l'espace, même si le taux de croissance stationnaire est identique.
- ▶ Le modèle de Solow permet-il de donner une explication satisfaisante du rôle de l'accumulation du capital physique et du taux d'épargne ?

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Des comparaisons entre pays peuvent se révéler particulièrement intéressantes. Des différences observées de s se traduisent-elles par des écarts de revenu par tête ?
- ▶ Des pays en retard initialement dans leur processus d'accumulation ont-ils enregistré des taux de croissance (transitoirement) plus élevés ?
- ▶ Peut-elle rendre compte totalement de la co-existence de pays riches et de pays pauvres ?

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Existe-t-il des preuves empiriques de ces relations ? Autrement dit, le revenu par tête est-il plus élevé dans les pays possédant un taux d'épargne plus élevé et une croissance démographique plus faible ?
- ▶ MANKIW/ROMER/WEIL en 1992 dans Quaterly Journal of Economics ont approfondi cette question en procédant à une estimation économétrique sur un panel de pays de cette relation telle qu'elle est suggérée par le modèle de Solow.
- ▶ Etant donné l'équation (4), l'expression du logarithme du revenu en termes intensifs s'écrit à l'état stationnaire :

$$\log \bar{y} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \log s - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \log(n + g + \delta)$$

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

Sachant que $\mathcal{Y}_t = y_t A_0 (1 + g)^t$, on peut écrire l'expression du revenu par tête sur le sentier de croissance régulier, à une période T arbitraire :

$$\log \bar{\mathcal{Y}}_T = \log A_0 + gT + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \log s - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \log(n + g + \delta)$$

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Si l'on considère un ensemble de pays i , les écarts de revenu par tête l'année T peuvent s'expliquer par des différences de taux d'épargne s_i et de croissance démographique n_i .
- ▶ g et δ sont en revanche supposés identiques dans tous les pays.
- ▶ A_0 est supposé prendre en compte non seulement la technologie mais aussi les institutions, le climat,... ; c'est pourquoi il existe un terme spécifique ϵ_i pour chaque pays : $\log A_0 = a + \epsilon_i$.
- ▶ Le revenu par tête d'un pays i s'écrit alors à une période donnée de la façon suivante :

$$\log \bar{Y}_i = a + b(\log s_i - \log(n_i + g + \delta)) + \epsilon_i$$

avec $b = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ dans le modèle (structurel) de Solow.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ MANKIW/ROMER/WEIL proposent une estimation économétrique de cette équation sur 75 pays pour l'année 1985.
- ▶ $\mathcal{Y}$ est mesuré par le PIB réel par personne en âge de travailler en 1985, s par la part moyenne de l'investissement réel privé et public dans le PIB réel (période 1960-1985) et n par le taux de croissance moyen de la population en âge de travailler.
 $g + \delta$ est fixé de façon arbitraire à 0.05, quel que soit le pays.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ a et b sont estimés respectivement à 6,87 et 1,48.
- ▶ Cette régression linéaire sur 75 pays explique une part importante des différences de revenu ($\overline{R}^2 = 0,59$).
- ▶ Ces résultats confirment le rôle du taux d'épargne et du taux de croissance démographique dans les disparités de revenu par tête entre pays, sans avoir à invoquer des différences dans le rythme du progrès technique.

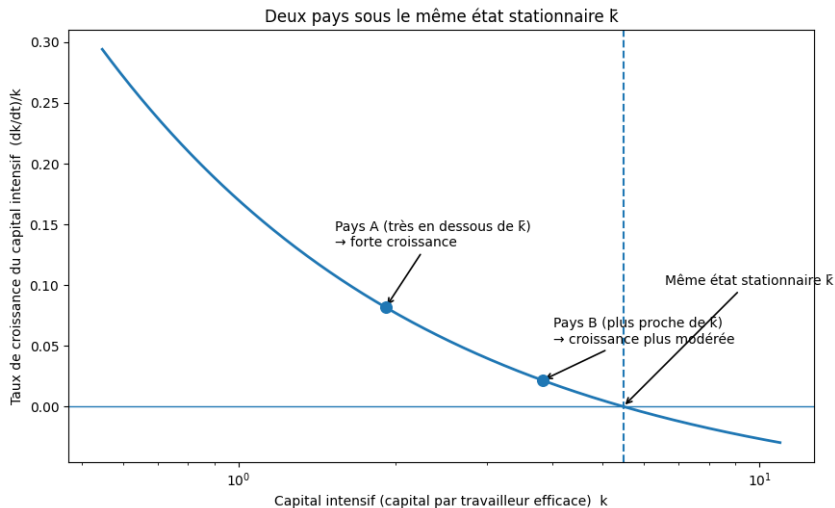
Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Cependant, la valeur de b estimée implique une valeur de α égale à 0,60 ($\alpha = \frac{b}{b+1}$), ce qui est incompatible avec la valeur observée de la part du capital dans la production.
- ▶ ce n'est qu'en surestimant l'élasticité du capital sur la production que l'on peut expliquer les différences de niveau de production par les différences de taux d'épargne et de démographie
- ▶ ce qui semble indiquer que l'accumulation du capital physique ne peut seule expliquer les expériences de croissance.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ L'analyse précédente a été conduite comme si les pays se situaient sur leur sentier de croissance régulier, ce qui n'est pas forcément le cas.
- ▶ Le revenu d'un pays à une période t dépend certes des grandeurs s et n , mais aussi de son écart par rapport à son état stationnaire.
- ▶ Considérons deux pays ayant le même sentier de croissance régulier, l'un (le pays A) étant en retard.
- ▶ Il a un niveau de production plus faible, mais également un taux de croissance plus élevé.

Graphique 7 : Rattrapage au bout de la convergence



Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- L'équation dynamique de Solow sous sa forme linéarisée permet d'écrire plus formellement cette dépendance transitoire par rapport aux conditions initiales :

$$\begin{aligned}\log k_t &= \log \bar{k} + (1 - \lambda)^t (\log k_0 - \log \bar{k}) \\ &= (1 - \lambda)^t \log k_0 + (1 - (1 - \lambda)^t) \frac{1}{1 - \alpha} (\log s - \log(n + g + \delta))\end{aligned}$$

- Sachant que $\log y_t = \alpha \log k_t$, $\forall t$, on peut donc en déduire l'évolution de la production en termes intensifs :

$$\log y_t = (1 - \lambda)^t \log y_0 + (1 - (1 - \lambda)^t) \frac{\alpha}{1 - \alpha} (\log s - \log(n + g + \delta))$$

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ En termes de revenu par tête, cette équation peut être réécrite à la période $t = T$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\log \mathcal{Y}_T &= (1 - (1 - \lambda)^T) \log A_0 + gT + (1 - \lambda)^T \log \mathcal{Y}_0 \\ &+ (1 - (1 - \lambda)^T) \frac{\alpha}{1 - \alpha} (\log s - \log(n + g + \delta))\end{aligned}$$

- ▶ Si les économies n'ont pas convergé (T suffisamment proche de la période $t = 0$), la prise en compte des écarts de revenu initiaux $\mathcal{Y}_0$ peut expliquer des disparités de revenu entre pays ($\lambda < 1$).

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Cette propriété implique des différences de taux de croissance entre pays dans la phase dans la transition.

$$\begin{aligned} \log \mathcal{Y}_T - \log \mathcal{Y}_0 &= (1 - (1 - \lambda)^T) \log A_0 + gT - (1 - (1 - \lambda)^T) \log \mathcal{Y}_0 \\ &+ (1 - (1 - \lambda)^T) \frac{\alpha}{1 - \alpha} (\log s - \log(n + g + \delta)) \end{aligned} \quad (6)$$

- ▶ Considérons deux pays **par ailleurs identiques** dont le revenu initial diffère. Le taux de croissance du pays initialement le plus pauvre est supérieur à celui du plus riche, le premier finissant par rattraper le second.
- ▶ Cette situation est à relier à la propriété de décroissance de la productivité du capital qui implique que le taux de croissance est supérieur pour les économies ayant un stock de capital plus faible.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Assiste-t-on dans les faits à ce phénomène de rattrapage absolu (convergence absolue) ? Le niveau initial de revenu par tête plus faible implique-t-il un taux de croissance plus élevé **quel que soit le niveau d'état stationnaire ; quelles que soient les valeurs de s et n ?**
- ▶ Il est possible de tester cette hypothèse de rattrapage de façon plus formelle sur la base d'une estimation économétrique par les moindres carrés ordinaires de l'équation (trop !) simplifiée suivante :

$$\log \mathcal{Y}_{iT} - \log \mathcal{Y}_{i0} = a + c \log \mathcal{Y}_{i0} + \epsilon_i \quad (7)$$

avec $c = -(1 - (1 - \lambda)^T)$.

- ▶ Un coefficient c négatif irait dans le sens d'un effet de rattrapage.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Sur séries longues, BAUMOL en 1986 a obtenu une influence négative et significative du revenu par tête à la fin du 19^{ième} siècle sur le taux de croissance moyen de différents pays au cours du 20^{ième} siècle : c est significativement différent de 0 et négatif.
- ▶ L'échantillon sélectionné inclut 16 pays parmi les plus riches actuellement, ce qui crée un biais d'échantillon, seuls étant considérés les pays qui ont convergé vers des revenus par tête relativement proches aujourd'hui.
- ▶ Si on ajoute dans l'échantillon des pays moins riches actuellement alors DE LONG montre qu'il y a plus d'effet de rattrapage systématique : c n'est plus significativement différent de 0.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

Sur des séries plus courtes mais sur la base d'un plus grand nombre de pays et de données de meilleure qualité,
MANKIW/ROMER/WEIL/ retrouvent des résultats cohérents avec ceux de DE LONG.

Table – Test de convergence absolue

	98 pays	22 pays
constante	-0,266 (0,380)	3,69 (0,68)
c	0,0943 (0,0496)	-0,341 (0,079)
$\lambda = 1 - (c + 1)^{1/25}$	-0,00360 (0,00219)	0,0167 (0,0023)
$\overline{R}^2$	0,03	0,46

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ La valeur estimée de c dans le tableau 1 indique que les pays les plus pauvres ne croissent pas plus vite que les plus riches lorsque l'on considère un nombre important de pays (98).
- ▶ Il n'existe pas de phénomène de rattrapage dans les faits, ce qui est conforme à l'observation directe des évolutions des revenus par tête d'un ensemble très large de pays.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ En revanche, en restreignant l'échantillon à 22 pays de l'OCDE, MANKIW/ROMER/WEIL mettent en évidence une influence négative du revenu initial sur le taux de croissance futur.
- ▶ Il existe un phénomène de rattrapage lorsque l'on restreint l'échantillon à un nombre de pays particuliers, retrouvant en cela les résultats obtenus par Baumol en 1986.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Ainsi, les résultats sont relativement robustes : il existe des forces qui poussent au rattrapage au sein du groupe des pays les plus riches, tandis qu'au contraire l'inclusion de pays sous-développés se traduit par une disparition empirique de ce phénomène.
- ▶ Des pays similaires aujourd'hui ont été marqués par des expériences de croissance sur le 20^{ième} siècle différentes selon leur niveau de revenu par tête au début de ce siècle. C'était d'ailleurs une condition de leur rattrapage.
- ▶ Cependant, tous les pays en retard au début de ce siècle n'ont pas connu des taux de croissance plus élevés qui leur aurait permis de combler une partie de la distance avec les pays les plus riches initialement.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

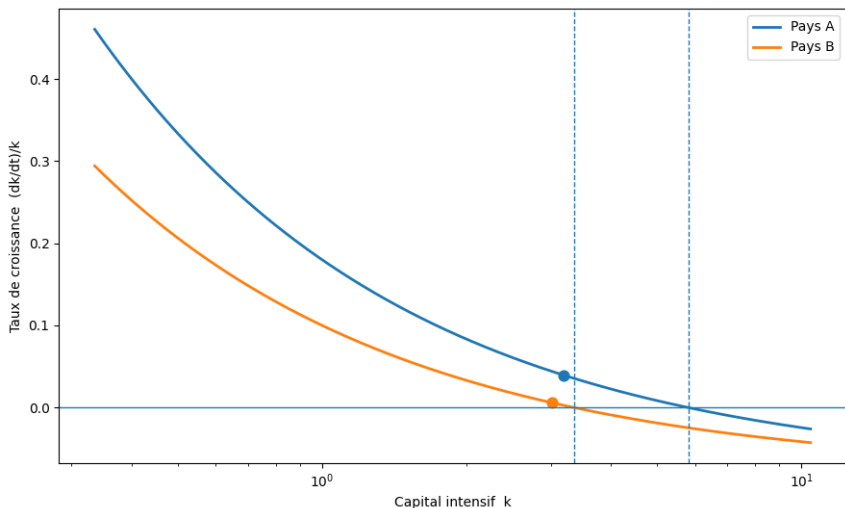
- ▶ Faut-il en conclure que le modèle de Solow et son hypothèse de convergence sont remis en cause par les faits ?
- ▶ Alors que l'on serait tenter de répondre par l'affirmative, une analyse plus attentive de l'équation (6) incite à la prudence.
- ▶ En effet, le rattrapage du fait de l'influence négative de la condition initiale ne vaut que toutes choses égales par ailleurs : cela n'est vrai que si les paramètres structurels s, n, g, α et δ sont identiques et impliquent un même état stationnaire.
- ▶ Un rattrapage se produit si les économies sont structurellement identiques, si elles appartiennent à un même club de convergence.
- ▶ Ainsi le graphique 7 correspond bien à deux pays différents par leur niveau initial, mais par ailleurs identiques.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Le modèle de Solow admet ainsi une propriété de convergence conditionnelle, et non de convergence absolue qui impliquerait que les pays pauvres croissent plus vite que les pays riches inconditionnellement.
- ▶ Une économie croît d'autant plus vite qu'elle est éloignée de son état stationnaire, cette situation résultant de la décroissance de la productivité marginale du capital.

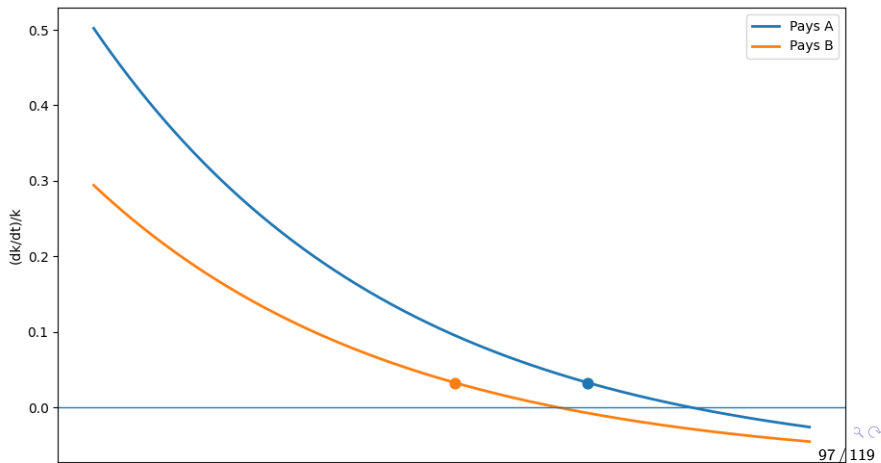
Graphique 8 : Non-rattrapage

Un pays A en avance sur un pays B peut croître plus vite s'il est plus éloigné de son état stationnaire (graphique 8).



Graphique 9 : Distance à l'état stationnaire et taux de croissance

Un pays A peut croître au même taux qu'un pays B pourtant en retard car ils sont à la même distance de leur état stationnaire (graphique 9).



Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Il reste à tester l'hypothèse de convergence conditionnelle en incluant dans l'équation (7) les paramètres structurels des économies qui peuvent rendre compte des écarts observés de taux de croissance entre pays.
- ▶ MANKIW/ROMER/WEIL ont repris leur estimation sur le même échantillon de pays et sur la même périodicité, mais en procédant à cette inclusion :

$$\log \mathcal{Y}_{i,1985} - \log \mathcal{Y}_{i,1960} = a + b_1 \log s_i - b_2 \log(n_i + g + \delta) + c \log \mathcal{Y}_{i,1960} + \epsilon_i \quad (8)$$

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

Les résultats reportés dans le tableau 2 confirment l'hypothèse de convergence conditionnelle : le coefficient c est significativement négatif et le pouvoir explicatif de l'estimation augmente considérablement.

Table – test de convergence conditionnelle

	tous les pays	22 pays
constant	1,93 (0,830)	2,19 (1,18)
c	-0,141 (0,052)	-0,351 (0,066)
b_1	0,647 (0,087)	0,392 (0,176)
b_2	-0,299 (0,304)	-0,753 (0,341)
λ	0,0060 (0,00182)	0,0173 (0,0019)
$\overline{R}^2$	0,38	0,62

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Une valeur relativement faible du revenu par tête initial implique une croissance relativement forte.
- ▶ Cependant, cela n'implique pas nécessairement qu'un pays initialement en retard croisse inconditionnellement plus vite. Cela dépend uniquement de l'écart relatif entre les conditions initiales et l'état stationnaire.
- ▶ Une valeur significativement positive des coefficients b_1 et b_2 est une implication de cet état de convergence qui n'est que conditionnel.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Les disparités structurelles empêchent une convergence absolue.
- ▶ Des pays en retard initialement peuvent ne receler qu'un faible potentiel de croissance car ils sont déjà relativement proches de leur état stationnaire.
- ▶ C'est pourquoi il n'existe pas de corrélation entre le niveau initial du produit par tête et son taux de croissance.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Cependant, les résultats économétriques reportés dans le tableau 2 montrent également les limites du modèle de Solow, malgré la validation de la propriété de convergence conditionnelle.
- ▶ En effet, la valeur estimée du coefficient c relatif à $\log \mathcal{Y}_{1960}$ implique une valeur de $\lambda (= 1 - (1 + c)^{1/25})$ plus faible que celle qui est cohérente avec le modèle de Solow pour une valeur réaliste des paramètres structurels (0.056).
- ▶ Les économies semblent converger beaucoup moins rapidement que ne le suggère le modèle de Solow.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

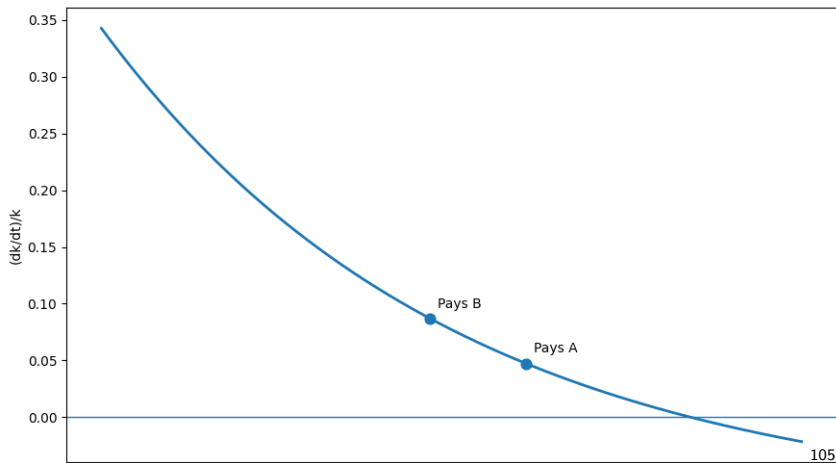
- ▶ Certains épisodes historiques semblent également valider l'hypothèse de convergence conditionnelle.
- ▶ La période des trente Glorieuses pourrait ainsi n'être que la conséquence de la deuxième guerre mondiale qui a détruit une partie importante du stock de capital physique : ces pays se sont retrouvés au sortir de la guerre loin de leur état stationnaire.

Le modèle de Solow et les expériences de croissance

- ▶ Cette interprétation est renforcée si l'on considère que tous les pays n'ont pas souffert de façon équivalente de la guerre (en termes économiques naturellement).
- ▶ Les destructions massives de capital en Allemagne et au Japon de façon concomitante avec les taux de croissance connus après la seconde guerre mondiale vont dans le sens de la convergence conditionnelle : ils se sont retrouvés au sortir de la guerre plus loin de l'état stationnaire.

Graphique 10 : Destruction de capital et taux de croissance

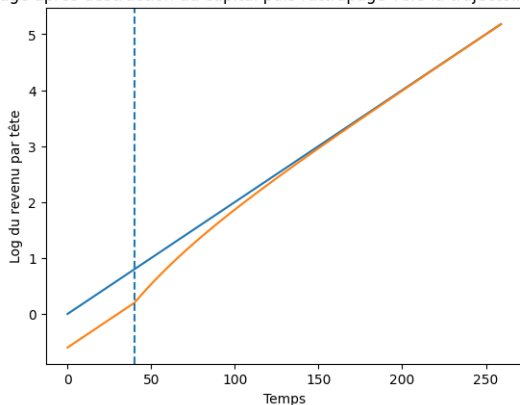
Un pays B (Japon, Allemagne) croît plus vite qu'un pays A (E-U) car il est plus éloigné de leur même état stationnaire (graphique 10).



Graphique 10 : Destruction de capital et taux de croissance

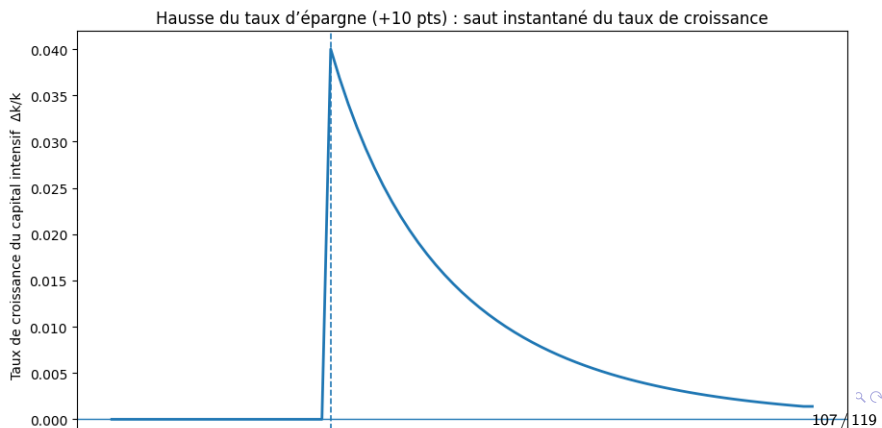
une destruction du capital fait croître plus vite pour rattraper le sentier stationnaire inchangé

Décrochage après destruction du capital puis rattrapage vers la trajectoire tendancielle



Graphique 11 : Hausse du taux d'épargne et taux de croissance

L'accélération de la croissance des dragons asiatiques peut également s'interpréter dans le cadre du modèle de Solow, par une hausse de l'accumulation du capital, et non par un progrès technique plus intense (graphique 11).



La prise en compte de l'accumulation du capital humain

- ▶ MANK/ROME/WEIL ont proposé une version du modèle de Solow prenant en compte le capital humain. L'ensemble des hypothèses décrites précédemment reste valable.
- ▶ La fonction de production macroéconomique inclut dorénavant le capital humain $\mathcal{H}$:

$$Y_t = K_t^\alpha \mathcal{H}_t^\beta (A_t H_t)^{1-\alpha-\beta}$$

β est compris entre 0 et 1 et nous supposons que les rendements d'échelle sur les facteurs accumulables sont décroissants, ie. $\alpha + \beta < 1$. Le progrès technique A_t porte sur le facteur non accumulable, les heures travaillées.

La prise en compte de l'accumulation du capital humain

- ▶ Le stock de capital humain est supposé s'accumuler en fonction d'un investissement spécifique. Ce dernier correspond nécessairement à une certaine partie des ressources prélevées pour financer un secteur d'éducation/formation.
- ▶ On suppose qu'une fraction s_H du revenu total est affecté à l'accumulation du capital humain dans l'économie :

$$\mathcal{H}_{t+1} - \mathcal{H}_t = s_H Y_t - \delta \mathcal{H}_t$$

La prise en compte de l'accumulation du capital humain

- ▶ De façon traditionnelle, en supposant pour simplifier un taux de dépréciation δ identique, l'accumulation du capital physique s'écrit, en notant maintenant s_K la part de l'épargne dévolue à ce type de capital :

$$K_{t+1} - K_t = s_K Y_t - \delta K_t$$

- ▶ Les décisions microéconomiques à l'origine de la détermination des valeurs respectives de s_H et de s_K ne sont pas précisées ; seules nous intéressent ici leurs implications sur la dynamique macroéconomique.

La prise en compte de l'accumulation du capital humain

- L'accumulation du capital humain vient en effet s'ajouter à celle du capital physique pour expliquer de façon endogène le taux de croissance de la production.

$$\begin{aligned}\log Y_{t+1} - \log Y_t &= \alpha(\log K_{t+1} - \log K_t) + \beta(\log \mathcal{H}_{t+1} - \log \mathcal{H}_t) \\ &+ (1 - \alpha - \beta)(\log A_{t+1} - \log A_t) + (1 - \alpha - \beta)(\log H_{t+1} - \log H_t)\end{aligned}$$

- De façon générale, le taux de croissance de K et de H se définissent de la façon suivante :

$$\gamma_{t+1}^K = \frac{s_K Y_t}{K_t} - \delta$$

et

$$\gamma_{t+1}^{\mathcal{H}} = \frac{s_H Y_t}{\mathcal{H}_t} - \delta$$

La prise en compte de l'accumulation du capital humain

- ▶ Sur le sentier de croissance régulier, production, capital physique et capital humain croissent nécessairement au même taux. Cela implique que le taux de croissance régulier soit égal à $g + n$.
- ▶ A long terme, production, capital physique et capital humain croissent au même taux, donné par la croissance démographique et le progrès technique, comme dans le modèle de Solow.
- ▶ Les sources de croissance endogènes liées à l'accumulation du capital s'éteignent à long terme. Là encore, on retrouve la loi des rendements décroissants dans l'accumulation du capital ($\alpha + \beta < 1$).

La prise en compte de l'accumulation du capital humain

- ▶ Notons h le capital humain déflaté par le terme de croissance exogène : $h = \mathcal{H}/AN$. On en déduit la relation qui relie les variables intensives :

$$y = f(k, h) = k^\alpha h^\beta$$

- ▶ Sur le sentier de croissance régulier, on peut en déduire que :

$$\frac{s_K \bar{y}}{\bar{k}} = n + g + \delta$$

et

$$\frac{s_H \bar{y}}{\bar{h}} = n + g + \delta$$



$$\bar{y} = \left(\frac{s_K^\alpha s_H^\beta}{(n + g + \delta)^{\alpha + \beta}} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha - \beta}}$$

La prise en compte de l'accumulation du capital humain

- On peut donc en déduire l'expression du logarithme du revenu en termes intensifs :

$$\log \bar{y} = \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \log s_K + \frac{\beta}{1 - \alpha - \beta} \log s_H - \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha - \beta} \log(n + g + \delta)$$

- On constate que le taux d'accumulation du capital humain affecte dorénavant le revenu par tête à long terme, ce qui pourrait expliquer des différences au niveau international. En outre, les élasticités de la production par rapport au taux d'épargne et au taux de croissance démographique sont modifiées à la hausse.

La prise en compte de l'accumulation du capital humain

- ▶ Pour les déterminer précisément, il faudrait connaître la valeur de β . On considère généralement que β peut prendre une valeur comprise entre $1/3$ et $1/2$.
- ▶ Les élasticités de la production de long terme par rapport à ces déterminants augmentent donc considérablement par rapport aux valeurs trouvées dans le cadre du modèle de Solow. Elles sont égales à 0.75 et à -1.5 respectivement pour les taux d'épargne et pour le taux démographique dans le cas plausible où $\beta = \alpha = 0.3$.
- ▶ Une hausse du taux d'investissement en capital physique en augmentant le revenu élève le capital humain, ce qui pousse encore le revenu à la hausse.
- ▶ En revanche, une augmentation de n implique une baisse plus forte du revenu moyen car le capital humain introduit une source supplémentaire d'accumulation qu'il faut maintenir stationnaire.

La prise en compte de l'accumulation du capital humain

- ▶ Elles peuvent même atteindre 1.5 pour s_K , 2.5 pour s_H et 4 pour n dans le cas où $\beta = 0.5$. Sous cette hypothèse, des différences de revenu par tête très importantes peuvent être expliquées.
- ▶ Si les taux d'accumulation dans un pays sont deux fois plus élevés que dans un autre et $(n + g + \delta)$ plus faible de 20%, alors son revenu par tête peut être 39 fois plus élevé. Ce résultat est à comparer avec le facteur 1.5 qui aurait été obtenu uniquement avec l'accumulation du capital physique. Notons toutefois qu'une valeur de β plus réaliste de 0.40 implique seulement un multiple de 8.5.

La prise en compte de l'accumulation du capital humain

- ▶ Comme dans le modèle de Solow, le surplus de croissance alimenté par l'accumulation du capital tend à disparaître au fur et à mesure de la convergence vers le sentier régulier.
- ▶ Lorsque $\alpha + \beta < 1$, doubler à la fois le stock de capital physique et le stock de capital humain aboutit à une augmentation moins que proportionnelle de la production si le travail efficace enregistre une multiplication inférieure.
- ▶ Cette situation est au coeur de la dynamique de convergence qui voit diminuer les taux d'investissement dans les deux stocks de capital.

La prise en compte de l'accumulation du capital humain

- ▶ Là encore, le cas-limite de rendements d'échelle constants dans les facteurs accumulables ($\alpha + \beta = 1$) permet de comprendre cette convergence, à défaut de fournir une représentation réaliste de la croissance.
- ▶ Supposons qu'il n'y ait aucune source de croissance exogène : $g = n = 0$. La fonction de production se réécrit :

$$Y_t = \mathcal{A} K_t^\alpha \mathcal{H}_t^{1-\alpha}$$

- ▶ Sur le sentier de croissance régulier, les deux stocks de capital croissent au même taux, d'où :

$$\frac{K_t}{\mathcal{H}_t} = \frac{s_K}{s_H}$$

La prise en compte de l'accumulation du capital humain

- On en déduit le taux de croissance sur le sentier régulier :

$$\gamma_H = \gamma_K = \frac{s_K Y}{K} - \delta = \mathcal{A} s_K^\alpha s_H^{1-\alpha} - \delta$$

- Le taux de croissance régulier est déterminé par les taux d'investissement dans les différents types de capital.
- L'accumulation croisée capital physique + capital humain se renforce et est suffisante pour maintenir la croissance sans progrès technique = croissance endogène.

La prise en compte de l'accumulation du capital humain

- ▶ Dans ce cas, il n'y a pas de convergence dans le niveau des revenus par tête des pays partageant pourtant les mêmes paramètres structurels.
- ▶ Un pays en retard initialement le restera, puisqu'il croît au même taux que celui initialement en avance.
- ▶ En outre, des différences dans ces taux d'investissement impliquent des taux de croissance indéfiniment divergents.