
Chapitre 6 : Analyse des interférences et tables d'extinction multiple

1. Généralisation sur la notion de table
2. Événements perturbateurs et événements concurrents
3. Présentation des événements concurrents / perturbateurs
4. Estimation d'une probabilité « nette » et d'une probabilité « brute ».
5. Construction et application des tables combinées pour analyser des événements concurrents
6. Construction des tables épurées « nettes » (supposant l'absence des événements concurrents)
7. Tables associées à une seule cause de sortie (de décès)
8. Table de mortalité comme un modèle de survie en continu



Généralisation sur les tables

Principe de la table appliquée à n'importe quelle cohorte C :

- S_x = ensemble des personnes dans le même état
- d_x = nombre de personnes ayant connu l'événement E
- q_x = probabilité de connaître l'événement E
- p_x = probabilité de ne pas connaître l'événement E

Deux catégories de taux d'incidence d'un événement E sur une période :

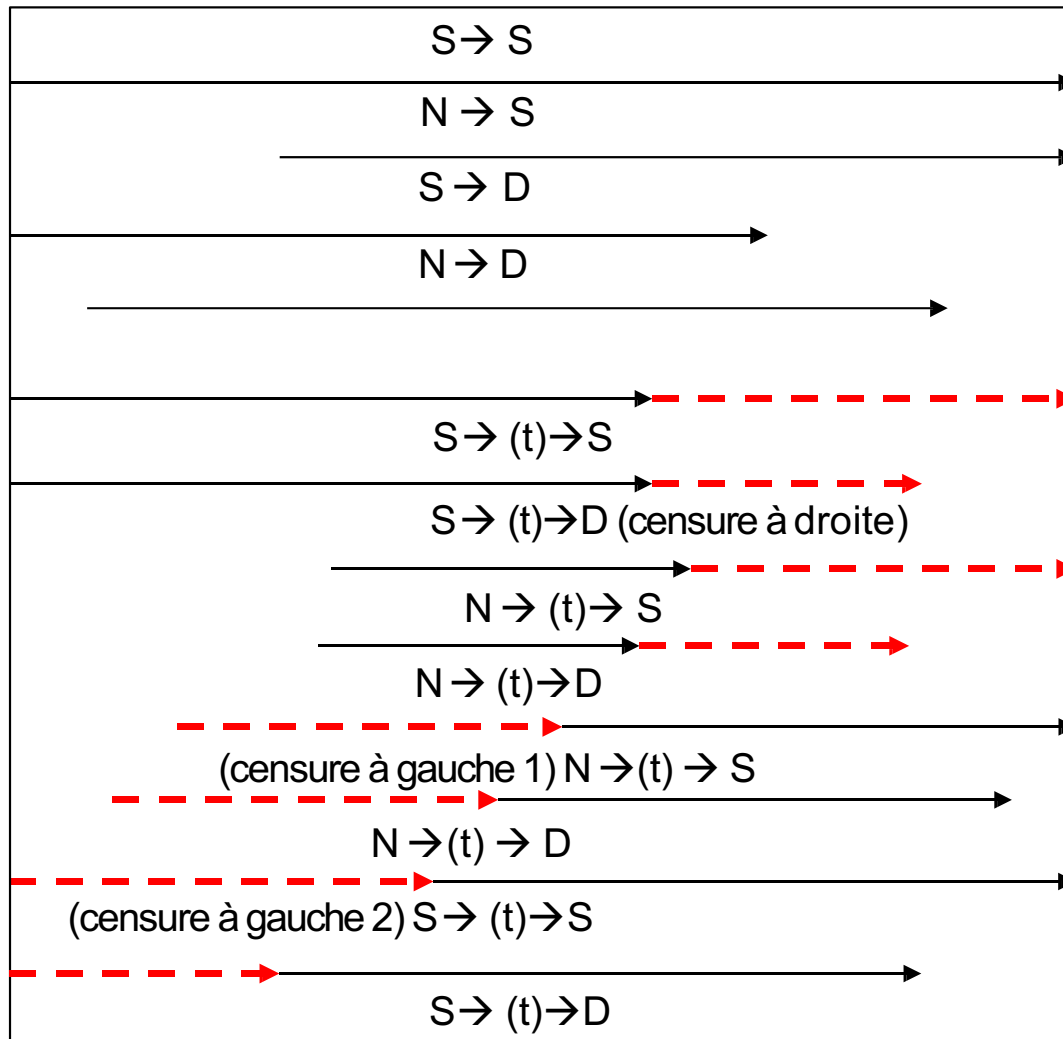
- Taux de première catégorie : nombre d'événement E rapporté à la population n'ayant pas encore connu cet événement (événements non renouvelables)
- Taux de deuxième catégorie : nombre d'événement E rapportés à l'ensemble des individus de la cohorte (événements réduits)

Généralisation sur les tables

Exemple : quotient, taux de 1ere catégorie et taux de 2eme catégorie dans le cas d'un événement observé dans une cohorte dont 90% des individus ont connu l'événement en question au bout de 4 ans (première naissance après le mariage en l'absence de mortalité)

x	S_x	N_x	q_x	m_x^1	m_x^2
0	100	10	0,100	0,105	0,100
1	90	20	0,222	0,250	0,200
2	70	35	0,500	0,666	0,350
3	35	25	0,714	1,111	0,250
4	10	–	–	–	–
Somme	–	90	(1,536)	(2,132)	0,900

Notion de table à extinction multiple : mortalité et migration



États / évènements à considérer :

S – survie

N – naissance

D – décès

t – migration d'une population à une autre

Quatre transitions sont possibles sans perturbateur

$S \rightarrow S$ (un survivant survie)

$S \rightarrow D$ (un survivant décède)

$N \rightarrow S$ (un nouveau-né survie)

$N \rightarrow D$ (un nouveau-né décède)

Avec un phénomène perturbateur

(migration) le nombre de transition possibles s'augmente à **douze**

$S \rightarrow (t) \rightarrow S$ (survivant part et survie ailleurs)

Événements concurrents versus perturbateurs

Les événements concurrents :

On s'intéresse aux deux et l'arrivée E_1 empêche E_2 de se produire

- Décès par cause
- Divorce et veuvage
- Sortie du célibat : mariage et décès

Les événements perturbateurs :

On ne s'intéresse qu'à l'arrivée de E_2 qui peut être empêchée par E_1

- Décès et émigration
- Mariage et émigration
- Divorce ou veuvage empêche avoir une naissance dans le mariage

Probabilité brute et probabilité nette

Risques concurrents : la survenue de l'un empêche la survenue des autres => une seule cause de sortie

Probabilité brute :

- proba d'un événement A réellement observée en présence des autres causes
- Quelle est la probabilité de sortir de la table par l'événement A avant les autres événements ?

Probabilité nette :

- proba contra-factuelle d'un événement A si les autres causes n'existaient pas
- Quelle est la probabilité de sortir de la table par l'événement A si il n'y en avait pas d'autre ?

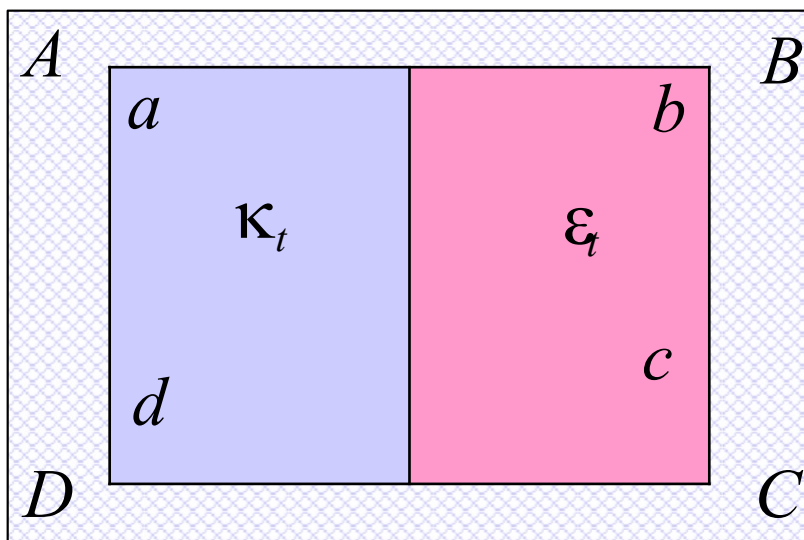
La probabilité nette > la probabilité brute

On peut passer de la proba brute à la proba nette en faisant l'hypothèse d'indépendance des causes

Les probabilités d'événements indépendants = probabilités « brutes »

Soit

$$k_t = \frac{D_t}{P_t} \quad \text{– probabilité de mourir} \qquad \varepsilon_t = \frac{E_t}{P_t} \quad \text{– probabilité de partir}$$



Soit

S la surface du rectangle $ABCD$ représentant l'univers d'une expérience aléatoire (toutes les issues possibles)

s la surface du rectangle $abcd$ représentant les issues (les événements) de sortir de l'observation en raison du décès (κ) ou du départ (ε) qui sont mutuellement exclusives (disjoints) $\kappa \cup \varepsilon \in s$;

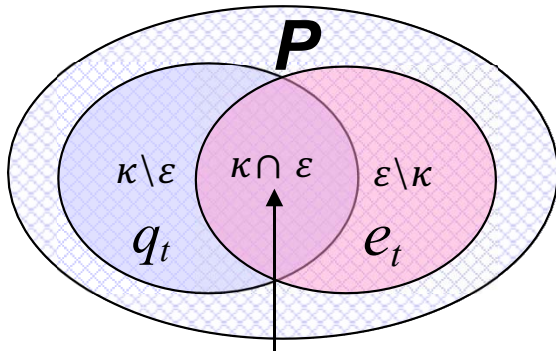
– $s = S - s$ surface (que l'on considère comme « anti s » réunissant l'ensemble des issues qui ne sont ni κ , ni ε)

$$s = \frac{D_t}{P_t} + \frac{E_t}{P_t} = \frac{D_t + E_t}{P_t} \rightarrow \text{probabilité de sortir de la table}$$

Les probabilités brutes sont additives

(cf. Les tirages aléatoires avec remise).

Les événements indépendants et concurrents (probabilités « nettes »)



Interférence entre κ et ε
 $\kappa \cap \varepsilon \in s_t$;

« formule » de Berkson¹⁾

$$q_t = \frac{D_t}{P_t - 0,5 \cdot E_t} \rightarrow \text{probabilité de mourir en absence de l'émigration}$$

$$e_t = \frac{E_t}{P_t - 0,5 \cdot D_t} \rightarrow \text{probabilité de partir en absence de la mortalité}$$

Les probabilités nettes ne sont pas additives, mais leurs compléments sont conditionnels (cf. les expériences aléatoires sans remise) : $1 - s_t = (1 - q_t) (1 - e_t)$

la probabilité de rester dans la table est égale la probabilité de ne pas mourir multipliée par la probabilité de ne pas partir.

donc $s_t = 1 - (1 - q_t) (1 - e_t) \rightarrow$

$$s_t = q_t + e_t - q_t \cdot e_t$$

Exemple : construction d'une table combinée de nuptialité et de mortalité

Age	Nombre de célibataires survivants à l'âge x	Nombre de décès des célibataires dans l'intervalle d'âge $[x, x+n)$	Nombre de mariage dans l'intervalle d'âge $[x, x+n)$	Nombre de sorties de la table dans l'intervalle d'âge $[x, x+n)$	Probabilité de mourir célibataire dans l'intervalle d'âge $[x, x+n)$	Probabilité de se marier dans l'intervalle d'âge $[x, x+n)$	Probabilité de quitter l'état de célibat dans l'intervalle d'âge $[x, x+n)$	Années vécues dans l'état de célibat dans l'intervalle d'âge $[x, x+n)$	Nombre de célibataire à l'âge x qui éventuellement termineront le célibat par décès	Nombre de célibataire à l'âge x qui éventuellement termineront le célibat par mariage
x	l_x	${}_n d_x^D$	${}_n d_x^M$	${}_n d_x = {}_n d_x^D + {}_n d_x^M$	$q_x^D = \frac{{}_n d_x^D}{l_x}$	$q_x^M = \frac{{}_n d_x^M}{l_x}$	$q_x = q_x^D + q_x^M$	${}_n L_x$	l_x^D	l_x^M
0	10	1	0	1	1/10	0	1/10+0=1/10	9,07	4	6
1	9	1	0	1	1/9	0	1/9	32,2	3	6
5	8	0	0	0	0	0	0	40,0	2	6
10	8	1	3	4	1/8	3/8	4/8	70,88	2	6
20	4	0	3	3	0	3/4	3/4	23,36	1	3
30	1	0	0	0	0	0	0	10,00	1	0
40	1	0	0	0	0	0	0	10,00	1	0
50	1	1	0	1	1/1	0	1/1	9,60	1	0
60	0								0	0

On ne s'intéresse pas aux taux, mais plutôt aux nombres d'années vécues dans l'état de célibat

Table combinée pour une période :

Hypothèse de base → les événements sont indépendants et complémentaires ,
donc les probabilités sont additives

On calcule les taux et la probabilité de sortie comme dans une table de mortalité pour une génération :

le taux ${}_n m_x^i = \frac{{}_n d_x^i}{{}_n L_x}$ et le quotient (probabilité) ${}_n q_x^i = \frac{{}_n d_x^i}{l_x}$ sur l'intervalle $x, x+n$

sachant que ${}_n d_x^i = {}_n m_x^i \cdot {}_n L_x$ et $l_x = \frac{1}{n} [{}_n L_x + (n - a_x) d_x]$

ou bien $\frac{{}_n L_x}{l_x} = {}_n p_x \cdot n + {}_n q_x \cdot a_x$; la conversion des taux en probabilité nous donne:

$${}_n q_x^i = \frac{n \cdot {}_n m_x^i}{1 + (n - a_x) \cdot {}_n m_x^i}$$

Calculs d'une table combinée d'extinction multiple

$${}_n q_x^i = \frac{n \cdot {}_n m_x^i}{1 + (n - {}_n a_x) \cdot {}_n m_x^i} \quad \text{en divisant } {}_n q_x^i \text{ par } {}_n q_x \text{ on obtient}$$

$$\frac{{}_n q_x^i}{{}_n q_x} = \frac{{}_n m_x^i}{{}_n m_x} = \frac{{}_n d_x^i}{{}_n d_x} \quad \longrightarrow \quad {}_n q_x^i = {}_n q_x \cdot \frac{{}_n m_x^i}{{}_n m_x} = {}_n q_x \cdot \frac{{}_n d_x^i}{{}_n d_x}$$

Si nous acceptons une hypothèse que:

$${}_n m_x^i = {}_n M_x^i \quad \text{et} \quad {}_n m_x = {}_n M_x$$

où M – taux observé

$${}_n q_x^i = {}_n q_x \cdot \frac{{}_n M_x^i}{{}_n M_x} = {}_n q_x \cdot \frac{{}_n D_x^i}{{}_n D_x}$$

A partir d'une table de mortalité et de la distribution des décès par cause et par âge on peut calculer **facilement** la table d'extinction multiple

$$1) \quad {}_n q_x^i = {}_n q_x \cdot \frac{{}_n D_x^i}{{}_n D_x}$$

$$2) \quad {}_n d_x^i = {}_n q_x^i \cdot l_x$$

$$3) \quad l_x^i = \sum_{a=x}^{\infty} {}_n d_x^i$$

l_x^i → Le nombre de survivant à l'âge x qui mourront par cause i

Table associée à un seul facteur de risque dans un processus d'extinction multiple (« table nette ») : un exemple d'étude sur la mortalité de pilotes de Formule 1

- Facteur de risque : l'âge¹⁾
- Événements d'intérêt : un décès (en et hors compétition)
- Événements concurrents : décès en compétitions et décès hors compétition

NB : dans le cas de cette étude on peut très bien imaginer soit une absence totale de la mortalité associée au risque d'un décès en compétition (les pilotes sont comme tous les autres); soit une absence de la mortalité hors compétition pour estimer le risque de décès net associé à la compétition.

- Événements perturbateurs :
 - les entrées en observation (troncature à gauche : on ne peut devenir un pilote qu'en étant vivant) ;
 - les sorties de l'observation (troncature à droite : on peut décéder hors compétition après avoir quitté la carrière de pilote de F1)

Table « nette » : mortalité des pilotes

1. Données (entrées échelonnées, sorties multiples):

Age	Entrées	Sorties	Décès	Décès en compétition	Décès hors compétition
x	e(x;x+5)	s(x;x+5)	d(x;x+5)	d ^c (x;x+5)	d ^a (x;x+5)
20(-24)	10	0	0	0	0
25(-29)	100	20	4	4	0
30(-34)	206	18	9	8	1
35(-39)	10	40	7	6	1
40(-44)	0	136	4	3	1
45(+)	0	88	0	0	0

2. Table de mortalité générale (toutes causes confondues)

x	P _x	P _{x+5}	Population pour calculer ${}_5q_x$ P_x^{PR}	${}_5D_x$	${}_5q_x$ x1000	${}_5d_x$	l_x
20	0	10	(0+10/2-0/2)= 5	0	0.0	0	1000
25	10	86	(10+100/2-20/2)=50	4	80.0	80	1000
30	86	265	(86+206/2-18/2)=180	9	50.0	46	920
35	265	228	250	7	28.0	24.5	874.0
40	228	88	160	4	25.0	21.2	849.5
45	88	0	44	0	0.0	0.0	828.3

Exemple emprunté de Leridon, Toulemon, 1997, p.103-107

Analyse originale cf. J.-L.Rallu, (1991) « Sélection, âge et performance des coureurs de formule 1 » *Population*, 46,6, p.1711-1733

Condition d'analyse :

Population à la fin de l'intervalle (P_{x+5}):

$$P_{x+5} = P_x + e_x - s_x - d_x$$

Hypothèse 1 :

la densité de risque (hasard) est uniforme à l'intérieur de chaque intervalle d'âge

Hypothèse 2 :

la moitié d'événements concurrents se font en début et l'autre moitié à la fin de l'intervalle.

Alors la population initiale au risque (P_x^{PR}) :

$$P_x^{PR} = P_x + 0,5 \cdot e_x - 0,5 s_x$$

$${}_5q_x = \frac{{}_5D_x}{P_x + 0,5 \cdot e_x - 0,5 s_x}$$

$${}_5d_x = l_x \cdot {}_5q_x \quad l_{x+5} = l_x - {}_5d_x$$

La probabilité de décéder (toutes causes confondues) durant la carrière d'un pilote de formule 1 est :

$${}_25q_{20} = 1 - (828,3 / 1000) = 0,1717$$

3. Table de mortalité associée aux décès en compétition

x	P_x	P_{x+5}	Population initiale estimée (P_x^R)	nD_x^C	nq_x^C	nd_x^C	l_x^C
20	0	10	5	0	0.0	0.0	1000
25	10	86	$(10+100/2-20/2-0/2)=50$	4	80.0	80.0	1000
30	86	265	179.5	8	44.6	41.0	920.0
35	265	228	249.5	6	24.0	21.1	879.0
40	228	88	159.5	3	18.8	16.1	857.9
45	88	0	44	0	0.0	0.0	841.7

$${}_{25}q_{20}^C = 1 - (841,7 / 1000) = 0,1583$$

$$P_x^R = P_x + 0,5 \cdot ({}_5e_x - {}_5s_x - {}_5d_x^A)$$

la population à risque est ajustée aux décès hors compétitions (qui sont exclus)

$${}_5q_x^C = \frac{{}_5d_x^C}{P_x + 0,5({}_5e_x - {}_5s_x - {}_5d_x^A)}$$

$${}_5d_x^C = l_x^C \cdot {}_5q_x^C$$

$$l_{x+5}^C = l_x^C - {}_5d_x^C$$

4. Table de mortalité associée aux décès hors compétition

x	P_x	P_{x+5}	P^R	nD_x^A	nq_x^A	nd_x^A	l_x^A
20	0	10	5	0	0.0	0.0	1000
25	10	86	48	0	0.0	0.0	1000
30	86	266	176	1	5.7	5.7	1000
35	265	229	247	1	4.0	4.0	994.3
40	228	89	158.5	1	6.3	6.2	990.3
45	88	0	44	0	0.0	0.0	984.0

$${}_{25}q_{20}^A = 1 - (984 / 1000) = 0,01600$$

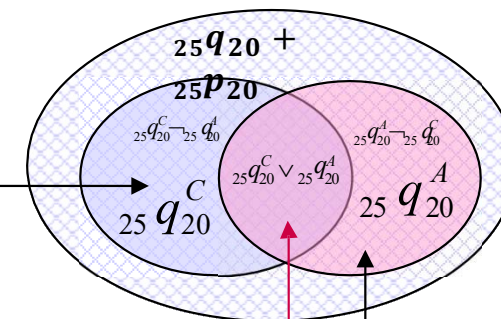
$$P_x^R = P_x + 0,5 \cdot ({}_5e_x - {}_5s_x - {}_5d_x^C)$$

la population au risque est ajustée aux décès en compétitions

$${}_5q_x^A = \frac{{}_5d_x^A}{P_x + 0,5 \cdot ({}_5e_x - {}_5s_x - {}_5d_x^C)}$$

$${}_5d_x^A = l_x^A \cdot {}_5q_x^A$$

$$l_{x+5}^A = l_x^A - {}_5d_x^A$$



La probabilité complète :

$${}_{25}q_{20} = {}_{25}q_{20}^C + {}_{25}q_{20}^A - {}_{25}q_{20}^C \cdot {}_{25}q_{20}^A = 0,1717$$

Pour passer de deux tables associées à une table combinée, il faudra distribuer la probabilité associée à la disjonction $C \vee A$ entre ${}_{25}q_{20}^C$ et ${}_{25}q_{20}^A$ soit en parties égales, soit proportionnellement aux nombre d'événements. Cet A

Exemple: Mortalité de tumeurs (homme, France, 1999 données modifiées)

Age exact	Décès total	Décès de cancer	l_x	${}_n q_x$	${}_n q_x^i$	${}_n d_x^i$	l_x^i
x	${}_n D_x$	${}_n D_x^i$					
0	1 841	22	100 000	0.00494	0.00006	6	32 504
1	403	73	99 506	0.00110	0.00020	20	32 498
5	266	48	99 397	0.00071	0.00013	13	32 478
10	349	31	99 326	0.00089	0.00008	8	32 465
15	1 446	130	99 238	0.00358	0.00032	32	32 457
20	2 126	159	98 883	0.00566	0.00042	42	32 425
25	2 419	181	98 323	0.00574	0.00043	42	32 383
30	2 806	281	97 759	0.00658	0.00066	64	32 341
35	3 981	796	97 116	0.00925	0.00185	180	32 276
40	6 506	1 952	96 218	0.01545	0.00464	446	32 096
45	9 944	4 176	94 731	0.02337	0.00982	930	31 650
50	12 940	6 276	92 517	0.03355	0.01627	1505	30 720
55	12 934	6 273	89 413	0.04683	0.02271	2031	29 215
60	18 688	9 344	85 226	0.06917	0.03458	2948	27 184
65	27 814	12 516	79 331	0.10548	0.04747	3766	24 237
70	35 939	15 094	70 963	0.15774	0.06625	4701	20 471
75	43 859	15 351	59 769	0.23979	0.08393	5016	15 770
80	27 999	8 400	45 437	0.36668	0.11001	4998	10 754
85	62 504	12 501	28 776	1.00000	0.20000	5755	5 755
Total	274 764	93 605				32 504	

$$1) {}_n q_x^i = {}_n q_x \cdot \frac{{}_n D_x^i}{{}_n D_x}$$

$$2) {}_n d_x^i = {}_n q_x^i \cdot l_x$$

$$3) l_x^i = \sum_{a=x}^{\infty} {}_n d_a^i$$

Proportion de nouveaux qui mourront éventuellement de tumeur:
32 504/100 000=32,5%

Proportion d'homme survécus jusqu'à l'âge de 75 ans qui mourront éventuellement de tumeur:
15 770/59 769=26,4%

Pour savoir + sur la mortalité en France :

MORTALITÉ

En raison d'un changement de méthode de codage d'enregistrement des cas, les données de mortalité actualisées ne sont pas disponibles.

Table de la mortalité générale

Part de la mortalité générale associée aux tumeurs

Table des risques combinées : un exemple d'étude de la mortalité intra-utérine



Une étude suivie (*follow up study*) des grossesses sur l'île Kauai pendant 4 ans de 1953 à 1956

- Données :
 - Période d'observation = 4 ans
 - Nombre de grossesses suivies (nombre de femmes enceintes) = 3083
 - Nombre de fausses couches (décès intra-utérines) = 273
 - Nombre de naissances vivantes = 2777
 - Nombre d'observations rompues (censure à droite) = 33
- Événement d'intérêt : un décès intra-utérin (fausse couche)
- Objectif d'étude : évaluation du risque (fréquence de décès intra-utérine)
- Facteur de risque : la durée de grossesse
- Événement concurrent : une naissance vivante
 - NB : dans le cas de cette étude il est difficile à imaginer une situation dans laquelle risque d'un événement pourrait se réaliser en absence du risque d'un événement concurrent (une population où il n'y a que des fausses couches) et inversement (une population où il n'y a pas de risque de fausse couche)
- Événements perturbateurs :
 - les entrées en observation (troncature à gauche : une femme avec une durée de grossesse quelconque ne peut entrer en observation que si elle n'a pas eu une fausse couche) ;
 - les sorties de l'observation (troncature à droite : si une femme est sortie de l'observation, on ne pourra pas connaître comment sa grossesse se termine)

Table des risques combinées : étude de la mortalité intra-utérine (+ un effet de troncature ou des données censurées)

Événements concurrents : naissances et fausses couches (décès intra-utérine)

Événement perturbateur : entrée en observation (troncature à gauche) et sortie de l'observation (troncature à droite)

Semaines	Entrées	Fausses couches (décès)	Sorties	Naissances vivantes	Grossesses en cours au début de l'intervalle	Effectifs exposés au risque pour calculer les quotients	Quotients		Table de mortalité		
							Naissances vivantes	Décès	Survivants	Décès	Nais. vivantes
t	Et	Dt	St	Nt	(Et-Dt-St-Nt)= G_{t+1}	Gt+(Et-St)/2= P_R	v(t)	q(t)	S(t)	d(t)	n(t)
4-8	592	32	0	0	0	0+(592-0)/2=296	0	0.1081	1 000.0	108.11	0
8-12	941	72	1	0	592-32-0-0=560	1030	0	0.0699	891.9	62.346	0
12-16	585	77	2	0	1428	1719.5	0	0.0448	829.5	37.147	0
16-20	337	28	2	0	1934	2101.5	0	0.0133	792.4	10.558	0
20-24	248	20	9	1	2241	2360.5	0.0004	0.0085	781.8	6.6244	0.3312
24-28	175	8	6	4	2459	2543.5	0.0016	0.0031	774.9	2.4372	1.2186
28-32	98	8	4	25	2616	2663	0.0094	0.003	771.2	2.3169	7.2402
32-36	67	8	6	72	2677	2707.5	0.0266	0.003	761.7	2.2506	20.255
36-40	40	9	3	1074	2658	2676.5	0.4013	0.0034	739.2	2.4855	296.61
40 +	0	11	0	1601	1612	1612	0.9932	0.0068	440.1	3.003	437.07
Total	3083	273	33	2777	Risques basés sur les décès de table →					237.28	762.72
Nb de grossesses observées = 3050 (2777+273)				Risque d'une fausse couche à partir ses observations « directes » (273 : 3050 = 0,0895)→ sous-estimation de la probabilité de fausse-couche de 2.6 fois						8.95%	91.05%

Cet exemple a été utilisé dans Leridon, Toulemon, 1997, p.108-109

[Analyse originale F.E.French, J.E.Bierman \(1962\) « Probability of foetal mortality » Public Health Reports, 77 \(10\) p.835-847](#)

données tirées de la table 5 sur la page 841, les résultats de l'analyse de survie (table de mortalité) dans la table 6, page 842 (une copie est disponible sur l'EPI)

Table de mortalité avec les relations dans les termes de la continuité : passage d'un intervalle défini $[x, x+n]$ au voisinage d'un point x .

+ on n'a pas besoin d'hypothèse sur la distribution des décès ou de la force de mortalité sur les intervalles d'âge $(x, x+n)$ puisque $n \rightarrow 0$ par conséquent :

$$(1) \quad S(x) = S(a) \cdot e^{-\int_a^x \mu(y) dy} \quad \text{pour } x > a \Rightarrow \quad {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{S(x) e^{-\int_x^{x+n} \mu(a) da}}{S(x)} = e^{-\int_x^{x+n} \mu(a) da}$$

$$(2) \quad {}_n p_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu(a) da}$$

$$(3) \quad {}_n d_x = \int_{a=x}^{x+n} S(a) \cdot \mu(a) da = \int_x^{x+n} S(x) e^{-\int_x^a \mu(y) dy} \cdot \mu(a) da = S(x) \cdot \int_x^{x+n} e^{-\int_x^a \mu(y) dy} \cdot \mu(a) da$$

$$(4) \quad {}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n l_x} = \frac{S(x) \cdot \int_x^{x+n} e^{-\int_x^a \mu(y) dy} \cdot \mu(a) da}{S(x)} = \int_x^{x+n} e^{-\int_x^a \mu(y) dy} \cdot \mu(a) da$$

$$(5) \quad T_x = \int_x^{\infty} S(a) da = S(x) \cdot \int_x^{\infty} e^{-\int_x^a \mu(y) dy} da$$

Dans la formule (1)
 la limite inférieure de l'intégration = a .
Dans la formule (5)
 la limite inférieure de l'intégration = x .

$$(6) \quad e_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{\int_x^{\infty} S(a) da}{S(x)} = \frac{S(x) \cdot \int_x^{\infty} e^{-\int_x^a \mu(y) dy} da}{S(x)} = \int_x^{\infty} e^{-\int_x^a \mu(y) dy} da$$

$\mu(x)$ – la fonction de la « force de mortalité » dans le point x ;

On voit que toutes les fonctions d'une TM sont définies par $\mu(x)$ et seulement par $\mu(x)$

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x$$

Taux de mortalité est un estimateur de $\mu(y)$ force de mortalité moyenne sur l'intervalle $(x, x+n]$

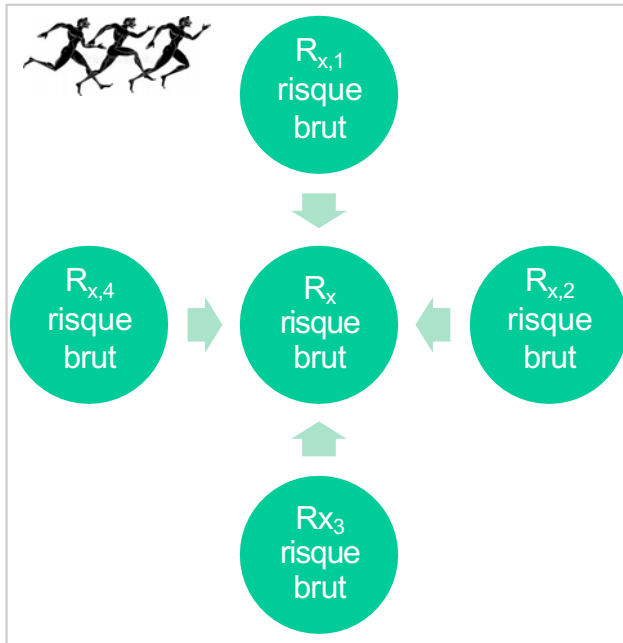
Pouvez-vous déduire la formule pour ${}_n L_x$ et ${}_n m_x$ sachant que

$${}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x}$$

Notions de risque brut, net (épuré) et brut partiel (partiellement épuré)

Modèle 1 :

tous les risques combinés



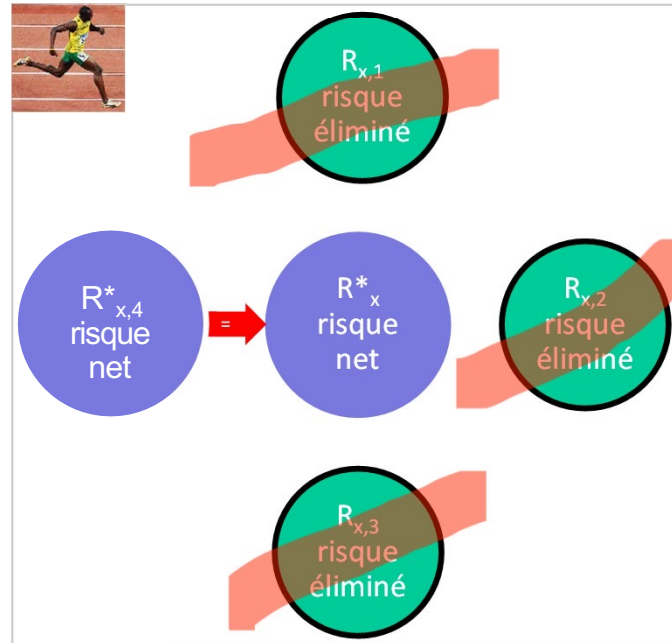
Tous les risques $R_{x,i}$ associés à des causes i ($i=1; 2; \dots; n$) et à l'âge x sont pris en compte. Modèle de survie basé sur une table des risques combinés.

$$R_x = \sum_i R_{x,i}$$

Que le plus rapide gagne !

Modèle 2 :

tous les risques éliminés sauf un



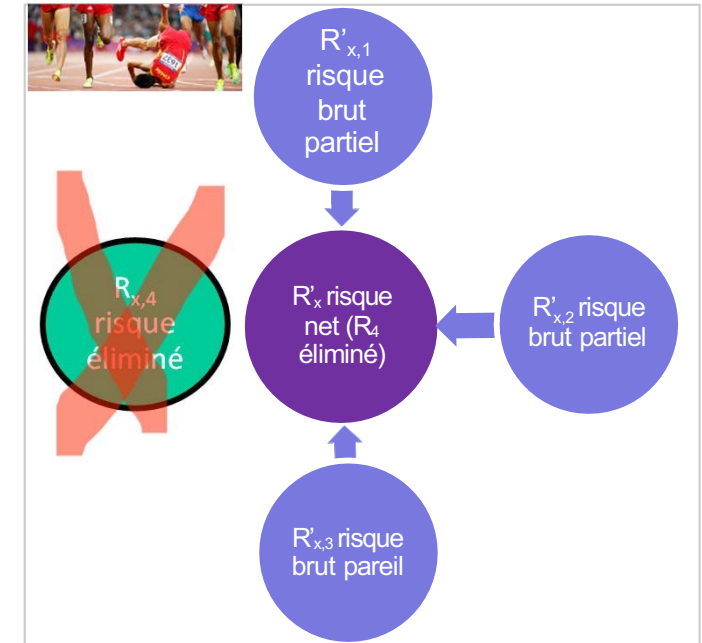
Un seul risque $R_{x,\delta}$ associé à une cause δ est pris en compte. Modèle de survie basé sur une table de risque net associée à une seule cause de décès

$$R_x \neq R_x^* = R_{x,\delta}^* > R_{x,\delta}$$

Sans concurrence un seul est toujours gagnant, qu'il soit le plus rapide le plus lent ?

Modèle 3 :

un seul risque éliminé



Un seul risque $R_{x,\delta}$ associé à une cause δ est éliminé tous les autres sont pris en compte. Modèle de survie basé sur une table de risque net une cause éliminée

$$R_x \neq R'_x = \sum_{i \neq \delta} R'_{x,i}; R'_{x,i} > R_{x,i}$$

Un est tombé, les autres ont plus de chance ! Sont-ils plus rapides ?

Table (nette) associée à un seul facteur dans un processus d'extinction multiple

Les questions qui se posent sont suivant :

1. Quelle sera la table de mortalité s'il n'existe qu'une seule et unique cause de décès? (la table nette de la mortalité d'une cause, ou la table associée à une cause de décès)
2. Quelle sera la table de mortalité en absence totale d'une des causes de décès? ('cause-deleted table' / « table-une-cause-éliminée »)

Definitions (cf. Chin L. CHANG. *Introduction in stochastic Processes in Biostatistics*. 1968. p.242-243):

1. **The crude probability.** The probability of death from a specific cause in presence of all other risks acting in population, or

$Q_{i\delta} = \Pr\{\text{an individual alive at time } x_i \text{ will die in the interval } (x_i, x_{i+1}) \text{ from cause } R_\delta \text{ in presence of all other risks in the population}\}$ (p.242/p.243)

2. **The net probability.** The probability of death if the specific risk is the only risk in effect in the population or, conversely, the probability of death if a specific risk is eliminated from the population.

$q_{i\delta} = \Pr\{\text{an individual alive at time } x_i \text{ will die in the interval } (x_i, x_{i+1}) \text{ if the cause } R_\delta \text{ is the only risk acting on the population}\}$

$q_{i-\delta} = \Pr\{\text{an individual alive at time } x_i \text{ will die in the interval } (x_i, x_{i+1}) \text{ if } R_\delta \text{ is eliminated as a risk of death}\}$

3. **The partial crude probability.** The probability of death from a specific cause when another risk (or risks) is eliminated from the population.

$Q_{i\delta-1} = \Pr\{\text{an individual alive at time } x_i \text{ will die in the interval } (x_i, x_{i+1}) \text{ from } R_\delta \text{ if } R_1 \text{ is eliminated as a risk of death}\}$

$Q_{i\delta-1,-2} = \Pr\{\text{an individual alive at time } x_i \text{ will die in the interval } (x_i, x_{i+1}) \text{ from } R_\delta \text{ if } R_1 \text{ and } R_2 \text{ is eliminated as a risk of death}\}$

Table associée à un seul facteur de décroissance : les bases mathématiques

Dans un processus d'extinction multiple chaque facteur de décroissance « i » est associé à une fonction de la force de décroissance (mortalité à l'occurrence) $\mu^i(x) = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n m_x^i$

Comme les causes de décès sont indépendantes, \rightarrow ${}_n m_x^1 + {}_n m_x^2 + \dots + {}_n m_x^k = {}_n m_x$

\rightarrow par conséquent $\mu^1(x) + \mu^2(x) + \dots + \mu^k(x) = \mu(x)$

Sachant que ${}_n p_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu(y) dy}$ (diapositive 18, formule 2) on peut réécrire:

$${}_n p_x = e^{-\int_x^{x+n} [\mu_y^1 + \mu_y^2 + \dots + \mu_y^k] dy} = e^{-\int_x^{x+n} \mu_y^1 dy} \cdot e^{-\int_x^{x+n} \mu_y^2 dy} \cdot \dots \cdot e^{-\int_x^{x+n} \mu_y^k dy}$$

puisque probabilité de survie sont conditionnelles (i.e. pour survivre il faut ne pas mourir des causes 1, 2, ...k): ${}_n p_x = {}_x p_x^* \cdot {}_x p_x^* \cdot \dots \cdot {}_x p_x^*$ où ${}_n p_x^i = e^{-\int_x^{x+n} \mu^i(y) dy}$

(1)

« * » signifie une fonction relative à extinction unique, ou associée à une seule cause dans le processus d'extinction multiple

Construction des tables associées à une seule cause de sortie

L'expression (1) représente la probabilité de survivre dans les conditions de présence d'une seule cause (*i*) de sortie de l'état (un seul facteur de décroissance).

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad {}_n d_x &= \left[S(x) \cdot \int_x^{x+n} e^{-\int_x^a \mu(y) dy} \mu(a) da \right] \\
 \text{(b)} \quad {}_x^* d_x^i &= \left[{}^* S^i(x) \cdot \int_x^{x+n} e^{-\int_x^a \mu^i(y) dy} \mu^i(a) da \right] \\
 \text{(c)} \quad {}_x d_x^i &= \left[S(x) \cdot \int_x^{x+n} e^{-\int_x^a \mu^i(y) dy} \mu^i(a) da \right]
 \end{aligned}$$

Par conséquent on peut appliquer un algorithme classique de construction d'une table de mortalité à partir des taux ou des quotients

[f] l'expressions dans parenthèses rectangulaires sont les formules pour passer de la fonction continue $S(x)$ à des valeurs discrètes sur les intervalles $(x; x + n)$: ${}_n L_x$ respectivement dans les tables de mortalité

- a) toutes causes confondues;
- b) associées à une cause unique dans le processus d'extinction multiple;
- c) multiples causes combinées]

Cependant, on ne peut aucunement observer directement $\mu^i(x)$ ni ${}_n^* m_x^i$



Transcription des formules (*il faut vivre pour mourir*) :

$S(x)$ – le nombre de survivants à l'âge exact x = valeur de la fonction dans le point, multiplié par la probabilité de mourir sur l'intervalle $x, x+n$ qui est une intégrale du produit de la fonction $p(x)$ = probabilité de vivre à l'âge « a » et de la force de mortalité à l'âge « a » = $\mu(a)$ – cf. *diapositive 18, formule 4*

Méthode (approche) 1 :

On néglige une différence possible entre ${}_n^*m_x^i$ et ${}_n m_x^i$

Hypothèse : taux de mortalité à cause de i restera inchangé, si toutes autres causes de décès sont éliminées (voir la diapositive 10 sur l'indépendance des taux et la dépendance de la probabilité)

Dans ce cas ${}_n^*m_x^i = {}_n M_x^i = {}_n m_x^i$ et puisque ${}_n m_x^{-i} = 0$

on obtient ${}_n q_x^i = \frac{n \cdot {}_n m_x^i}{1 + (n - {}_n^*a_x^i) \cdot {}_n m_x^i}$ (voir F2, sur ch. 6, diapositive 10)

Il reste un problème d'estimation correcte de ${}_n^*a_x^i$



Plus la force de mortalité est élevée, moins la vie moyenne est longue : dans le cas d'une seule cause de décès il est difficile d'imaginer que l'âge moyen au décès est indifférent à la durée d'intervalle, quoique une telle hypothèse soit acceptable dans le cas de la multitude des causes et de leur compensation mutuelle...

Méthode (approche) 2

Si (c'est une hypothèse) la force de la décroissance associée au facteur i est constante (et intégrable) sur l'intervalle $x, x+n$,

$$\text{alors } {}_n^*P_x^i = e^{-\int_x^{x+n} m_x^i dx} = e^{-n M_n^i x}$$

$$\text{et } {}_n^*L_x^i = \frac{{}_x^*l^i - {}_{x+n}^*l^i}{{}_n M_x^i} = \frac{{}_n^*d_x}{{}_n M_x^i}$$

pour calculer la durée de vie on n'a pas donc besoin de « a_x »
(qui résulte de notre hypothèse)

C'est une méthode est logique et simple, mais les résultats ne sont bons que si l'intervalle n est suffisamment court, *et la plus souvent ce n'est pas le cas...*

Méthode 3 (risques proportionnels)

cf. Chin Long CHIANG (1968) *An Introduction to Stochastic Processes in Biostatistic*. NY : Wiley¹⁾

Soit le risque associé à une cause i proportionnel au risque total : $\mu^i(a) = R^i \cdot \mu(a)$

on peut donc exprimer la probabilité de survie associée à un seul facteur d'extinction sur un intervalle $x < a \leq x+n$ dans un processus d'extinction multiple (cf. équation 1, diapositive 21) :

$${}_n^*P_x^i = e^{-\int_x^{x+n} \mu^i(a) da} = e^{-\int_x^{x+n} R^i \mu(a) da}$$

et puisque R^i est une constante : $\rightarrow {}_n^*P_x^i = e^{-R^i \int_x^{x+n} \mu(a) da} = \left[e^{-\int_x^{x+n} \mu(a) da} \right]^{R^i}$

$$\boxed{{}_n^*P_x^i = \left({}_n P_x \right)^{R^i}} \quad (2)$$

Il ne reste qu'estimer R^i 😊

1) Une démonstration un peu différente est présentée par Rolland Pressat (1995) *Éléments de la démographie mathématique*, p.83-88

Estimation du multiplicateur R^i

Soit $N(a)$ est une population exposée au risque, alors :

$$\frac{{}_n D_x^i}{{}_n D_x} = \frac{\int_x^{x+n} N(a) \cdot R^i \cdot \mu(a) da}{\int_x^{x+n} N(a) \cdot \mu(a) da} = R^i$$

et la substitution dans l'équation (2) donne : ${}_n P_x^* = {}_n P_x \left(\frac{{}_n D_x^i}{{}_n D_x} \right)$

Pour construire une table de mortalité avec « une ou plusieurs causes de décès éliminées », on remplace R^i par R^{-i} :

$${}_n P_x^* = {}_n P_x R^{-i} = {}_n P_x \left(\frac{{}_n D_x - {}_n D_x^i}{{}_n D_x} \right)$$

Méthodes de l'estimations de « ${}_n a_x^i$ » dans une table de mortalité associée à la cause i

1. Hypothèse de l'équivalence pour toute les causes i ,

$$\rightarrow {}_n^* a_x^i = a_{n x}$$

il est cependant évident qu'une table avec une force de mortalité $\mu^i(a)$ plus élevée a une distribution des années vécues **plus jeune** et par conséquent les valeurs de ${}_n^* a_x^i$ plus petites

2. Calibrage de ${}_n^* a_x^i$ (N.Keifitz, 1966, « A Life table that argrees with the Data » *Journal of American Statistical Association*, 63 (324): 1252-68)
voir Chap.5 diapo. 31

$${}_n^* a_x^i = \frac{-\frac{n}{24} \cdot {}_n^* d_{x-5}^i + \frac{n}{2} \cdot {}_n^* d_x^i + \frac{n}{24} \cdot {}_n^* d_{x+5}^i}{{}_n^* d_x^i} \quad (3)$$

+ on calcule ${}_n^* d_x^i$ directement sans recours à ${}_n^* a_x^i$ (voir méthodes 2 et 3, diapos 24-25)

– ne convient pas aux intervalles initiaux et final

Suite : méthodes de l'estimations de « ${}_n a_x^i$ » pour les intervalles inégaux et terminaux

3. Interpolation entre deux situations extrêmes :

1 – il n'y pas de décès d'une cause i dans l'intervalle $x, x+n \rightarrow$ alors la durée de vie dans l'intervalle de la table associée à la cause i est égale à n

2 – tous les décès dans l'intervalle sont causés par i , \rightarrow alors ${}_n^* a_x^i = {}_n a_x$

Respectivement dans ces situations extrêmes soit $R^i = 0$, soit $R^i = 1$,

entre ces deux cas la durée de vie dans un intervalle

d'une table associée est **une moyenne entre ${}_n e_x$ et n pondérée par R^i** $\Rightarrow \frac{{}_n^* L_x^i}{{}_n^* l_x^i} = n(1 - R_x^i) + R_x^i \cdot \frac{{}_n L_x}{{}_n l_x}$

dont le regroupement nous donne $\frac{{}_n^* L_x^i}{{}_n^* l_x^i} = n - R_x^i \left(n - \frac{{}_n L_x}{{}_n l_x} \right) = (\text{la durée d'intervalle}) - (\text{la part des années perdues, attribué à la cause } i)$ (4)

Puisque dans toutes les tables de mortalité: $\frac{{}_n L_x}{{}_n l_x} = n \cdot {}_n p_x + {}_n a_x \cdot {}_n q_x = n - (n - {}_n a_x) \cdot {}_n q_x$

On peut donc transformer l'équation (4) ${}_n^* a_x^i = n + R_x^i \cdot \frac{{}_n q_x}{{}_n^* q_x^i} \cdot ({}_n a_x - n)$ (5)†

Pour le dernier (ω) intervalle : ${}_{\infty}^* a_{\omega}^i = {}_{\infty}^* e_{\omega}^i = \frac{e_{\omega}}{R_{\infty}^i}$ (6)

† cette démonstration est en annexe (à la fin de cette présentation)

Example: France, hommes 1999, tumeurs

$l_x, {}_n p_x, {}_n a_x, e_x$ = les fonctions de la table-maître ; $R^{-i} = \frac{{}_n D_x - {}_n D_x^i}{{}_n D_x}$; ${}_n p_x^* = ({}_n p_x)^{R_x^{-i}}$; ${}^* l_{x+n}^{-i} = {}^* l_x^{-i} \cdot {}_n p_x^{-i}$
 ${}^* a_x^{-i} = \frac{-\frac{n}{24} \cdot {}^* d_{x-5}^{-i} + \frac{n}{2} \cdot {}^* d_x^{-i} + \frac{n}{24} \cdot {}^* d_{x+5}^{-i}}{{}_n d_x^i}$ pour $x=5$ à 75 ; ${}^* a_x^{-i} = n + R^{-i} \cdot \frac{{}_n q_x}{{}_n q_x^{-i}} ({}_n a_x - n)$ pour $x=0, 1, 80$; ${}^* a_{85}^{-i} = {}^* e_{85}^{-i} = \frac{e_{85}^0}{R_{85}^{-i}}$

Table de mortalité-maître

Table de mortalité associée à une cause éliminée

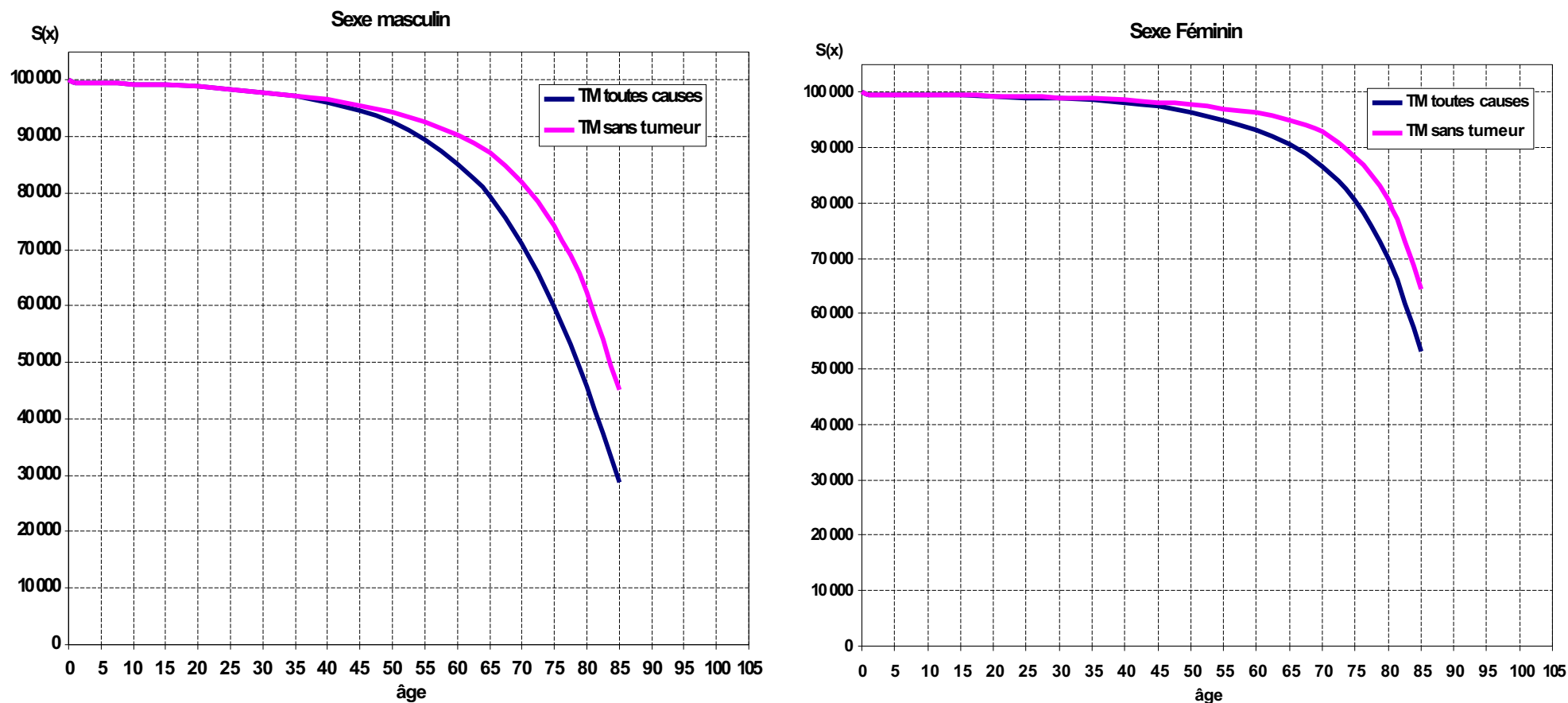
n	Age	l_x	R^{-i}	${}_n p_x$	${}_n a_x$	e_x	${}_n^* p_x$	${}^* l_x$	${}_n^* a_x$	${}_n^* L_x$	${}_n^* T_x$	${}^* e_x$
1	0	100 000	0.98800	0.9951	0.06000	74.98	0.99512	100 000	0.060028	99 541	7 997 751	79.978
4	1	99 506	0.82000	0.9989	1.60000	74.36	0.99910	99 512	1.600237	397 833	7 898 210	79.369
5	5	99 397	0.82000	0.9993	2.31000	70.44	0.99941	99 423	2.466803	496 909	7 500 377	75.439
5	10	99 326	0.91000	0.9991	2.86000	65.48	0.99919	99 364	3.189157	496 618	7 003 468	70.483
5	15	99 238	0.91000	0.9964	3.00000	60.54	0.99674	99 284	2.782548	495 835	6 506 850	65.538
5	20	98 883	0.92500	0.9943	2.50000	55.75	0.99476	98 961	2.580033	493 655	6 011 014	60.741
5	25	98 323	0.92500	0.9943	2.48000	51.05	0.99469	98 442	2.524454	490 948	5 517 359	56.047
5	30	97 759	0.90000	0.9934	2.57000	46.33	0.99408	97 920	2.571240	488 164	5 026 412	51.332
5	35	97 116	0.80000	0.9908	2.68000	41.62	0.99260	97 340	2.635233	484 950	4 538 247	46.623
5	40	96 218	0.70000	0.9845	2.72000	36.98	0.98916	96 619	2.615577	480 619	4 053 297	41.951
5	45	94 731	0.58000	0.9766	2.64000	32.52	0.98638	95 572	2.595153	474 754	3 572 678	37.382
5	50	92 517	0.51500	0.9664	2.62000	28.24	0.98258	94 270	2.621506	467 399	3 097 924	32.862
5	55	89 413	0.51500	0.9532	2.59000	24.13	0.97560	92 627	2.641882	457 762	2 630 525	28.399
5	60	85 226	0.50000	0.9308	2.63000	20.18	0.96480	90 368	2.691543	444 336	2 172 762	24.044
5	65	79 331	0.55000	0.8945	2.62000	16.49	0.94053	87 186	2.684445	423 963	1 728 426	19.825
5	70	70 963	0.58000	0.8423	2.59000	13.12	0.90523	82 002	2.685821	392 013	1 304 463	15.908
5	75	59 769	0.65000	0.7602	2.62000	10.10	0.83677	74 230	2.658652	343 111	912 451	12.292
5	80	45 437	0.70000	0.6333	2.59000	7.45	0.72633	62 114	2.739623	272 145	569 340	9.166
5.3	85	28 776	0.80000	0.0000	5.41000	5.27	0.00000	45 115	6.587500	297 195	297 195	6.588

Probabilité de survie à l'âge 85 ans toutes causes confondues = 28.7%; espérance de vie à la naissance = 75 ans

Probabilité de survie à l'âge 85 ans les décès de tumeur éliminés = 45.1%; espérance de vie à la naissance = 80 ans

Exemple d'une table associée à une seule cause d'extinction (une cause éliminée)

Table de mortalité « toutes causes confondue » et table « cause tumeur éliminée » (France, 1999)



Les mêmes données qu'on a utilisées pour construire une table de mortalité d'extinction multiple. (voir le chapitre précédent et l'exercice)

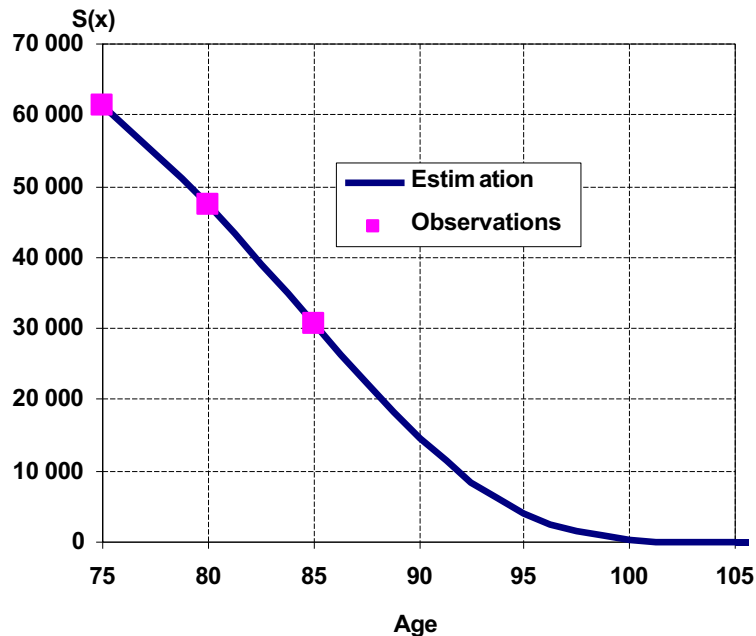
Application de la loi de Gompertz¹⁾ pour « clôturer » (extrapoler) les table la mortalité

$$\mu(x) = \alpha e^{\beta x} \quad \text{sachant que } \mu(x) = \frac{l'(x)'}{l(x)} \quad \text{on peut en déduire} \quad \Rightarrow \quad l_x = C \cdot a^{b^x}$$

On estime ensuite les paramètres **C**, **a** et **b** à partir de trois valeurs de la table de mortalité (système de trois équations avec trois valeurs inconnues).

$$b = \left[\frac{\ln \left(\frac{l_{x+2n}}{l_{x+n}} \right)}{\ln \left(\frac{l_{x+n}}{l_x} \right)} \right]^{\frac{1}{n}} ; \quad a = \exp \left[\frac{\ln \left(\frac{l_{x+n}}{l_x} \right)}{b^x (b^n - 1)} \right] ; \quad C = l_x \exp(-b^x \ln a)$$

Exemple: France, table de mortalité 2000-2002



$$b = \left[\frac{\ln \frac{l_{85}}{l_{80}}}{\ln \frac{l_{80}}{l_{75}}} \right]^{\frac{1}{5}} = 1,113403$$

$$a = \exp \left[\frac{\ln \frac{l_{80}}{l_{75}}}{b^{75} (b^5 - 1)} \right] = 0,999886$$

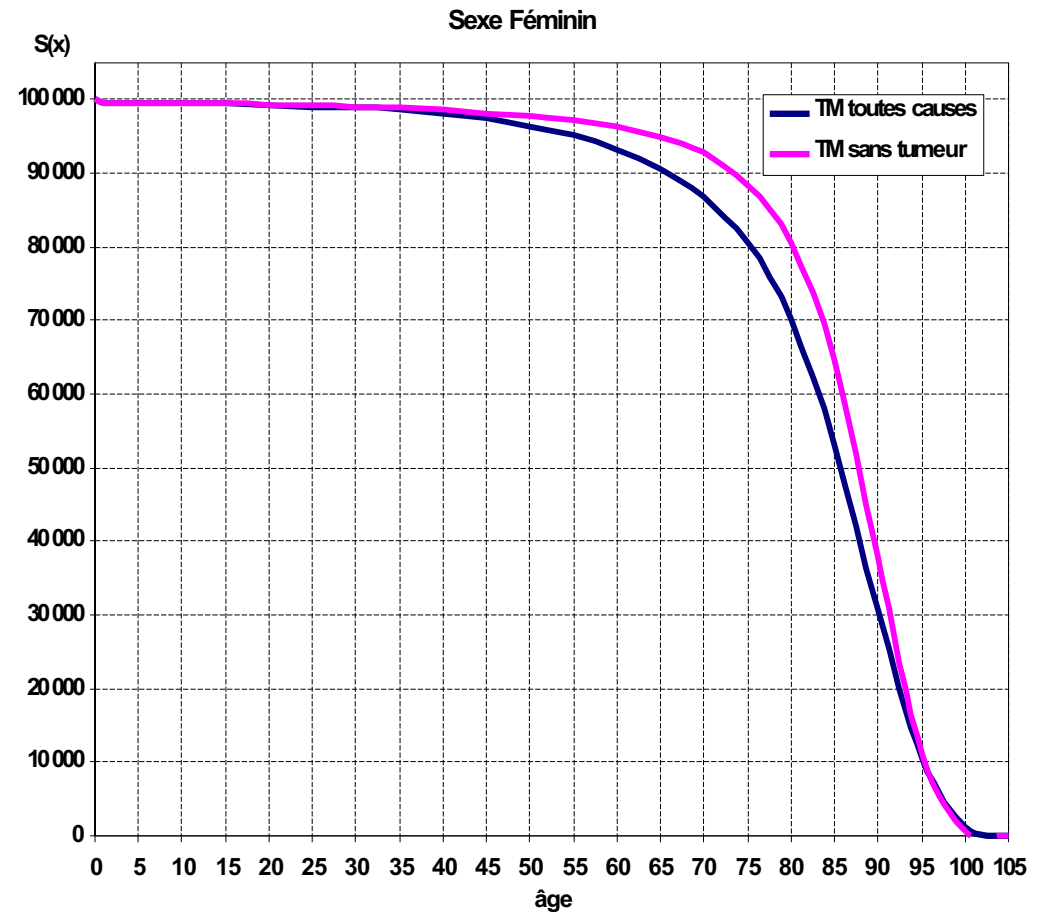
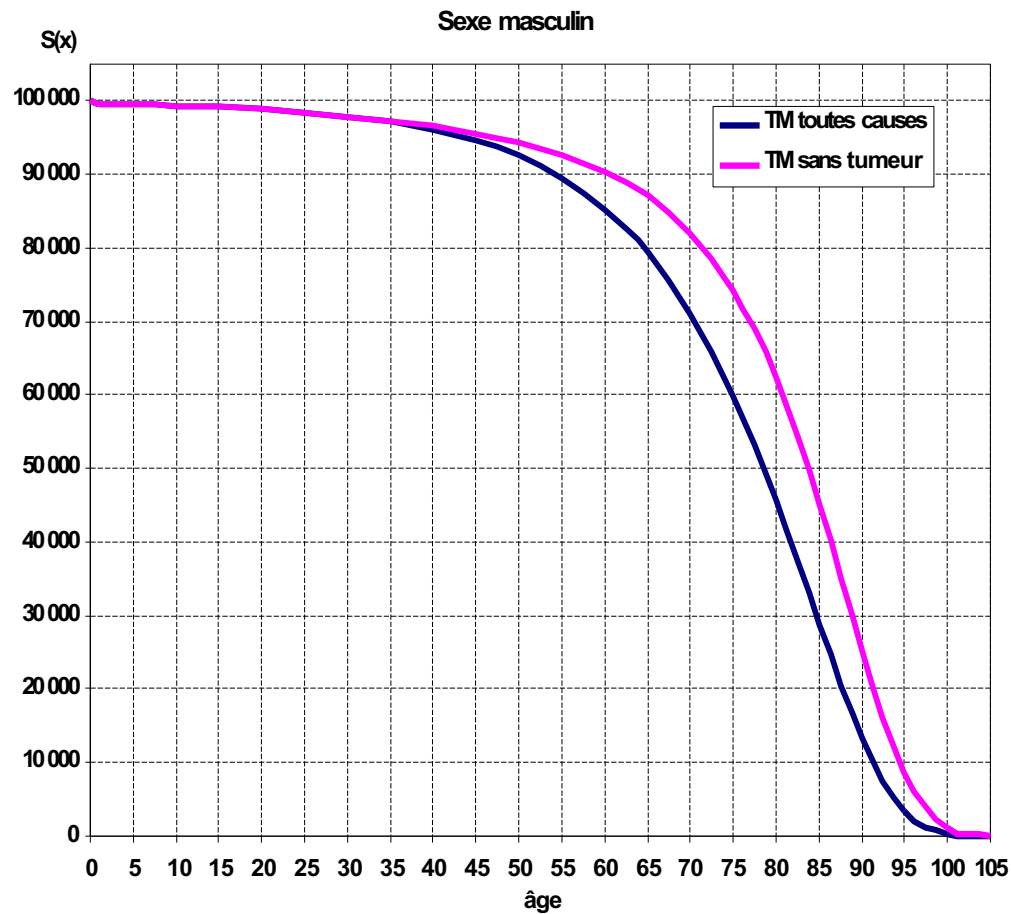
$$C = l_{75} \exp(-b^{75} \ln a) = 87860, \emptyset$$

x	l_x	l'_x
75	61250	61250
80	47391	47391
85	30554	30554
90		14418
95		3988
100		442
105		10
110		0

Pour voir plus de détails cf.: Roland Pressat (1995) *Eléments de démographie mathématique*, AIDELF, p.11-14

1) B.Gompertz (1825) – “On the nature of the Function expressive of the Law of human Mortality, and a new mode of determining the value of life contingencies” *Philosophical Transactions*, 115, p.513-583

Table de mortalité cause tumeur éliminée (France, 1999)



La survie est extrapolée au-delà de l'âge 85 ans selon la loi de Gompertz

Décomposition d'une différence entre les deux espérances de vie avec la prise en considération des causes de décès

1. On fait d'abord une décomposition sans prendre en considération des causes de décès selon une formule :

Andreev-Pressat :

$${}_n\Delta_x = \frac{0.5 \cdot (l_x^1 + l_x^2)}{l_0} \cdot (e_x^2 - e_x^1) - \frac{0.5 \cdot (l_{x+n}^1 + l_{x+n}^2)}{l_0} \cdot (e_{x+n}^2 - e_{x+n}^1)$$

Arriaga-Pollard :

$${}_n\Delta_x = \frac{l_x^1}{l_0} \cdot \left(\frac{nL_x^2}{l_x^2} - \frac{nL_x^1}{l_x^1} \right) + \frac{T_{x+n}^2}{l_0} \cdot \left(\frac{l_x^1}{l_x^2} - \frac{l_{x+n}^1}{l_{x+n}^2} \right)$$

2. Ensuite, on doit ajuster ${}_n\Delta_x$ pour chaque intervalle d'âge proportionnellement des différences entre les risques attribués à une cause i :

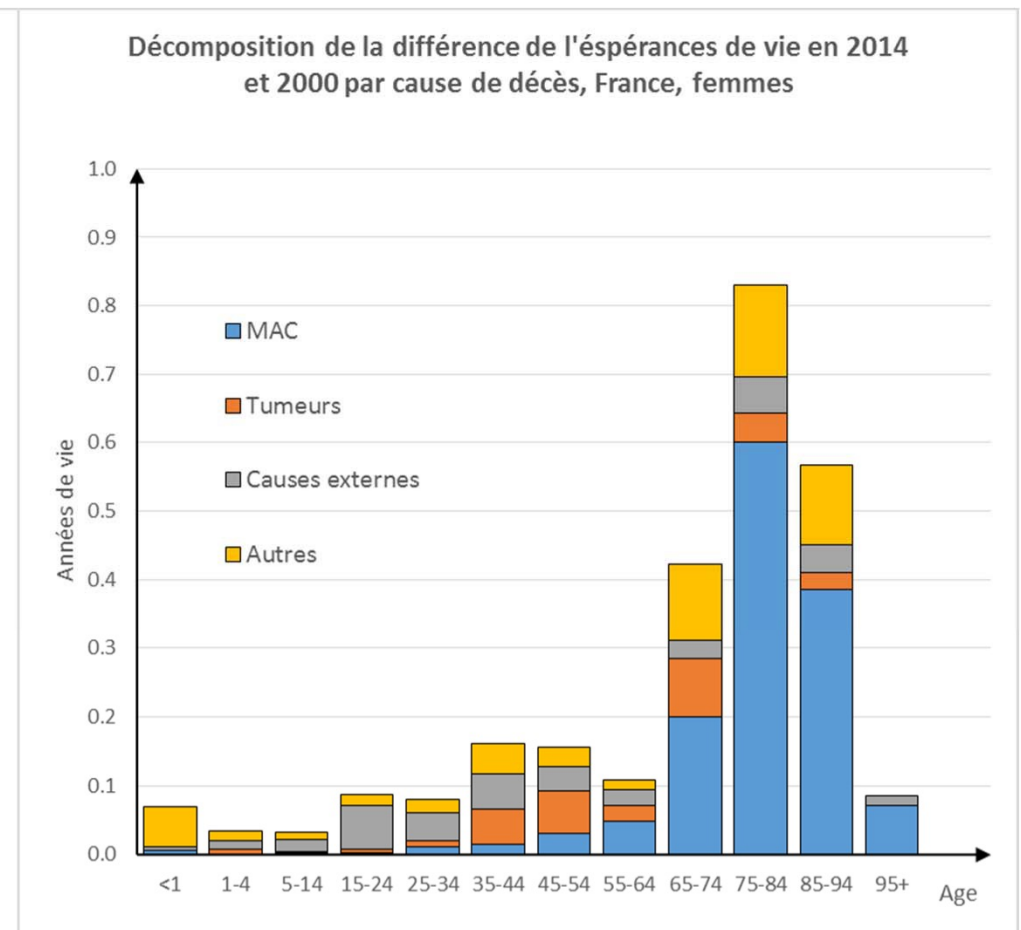
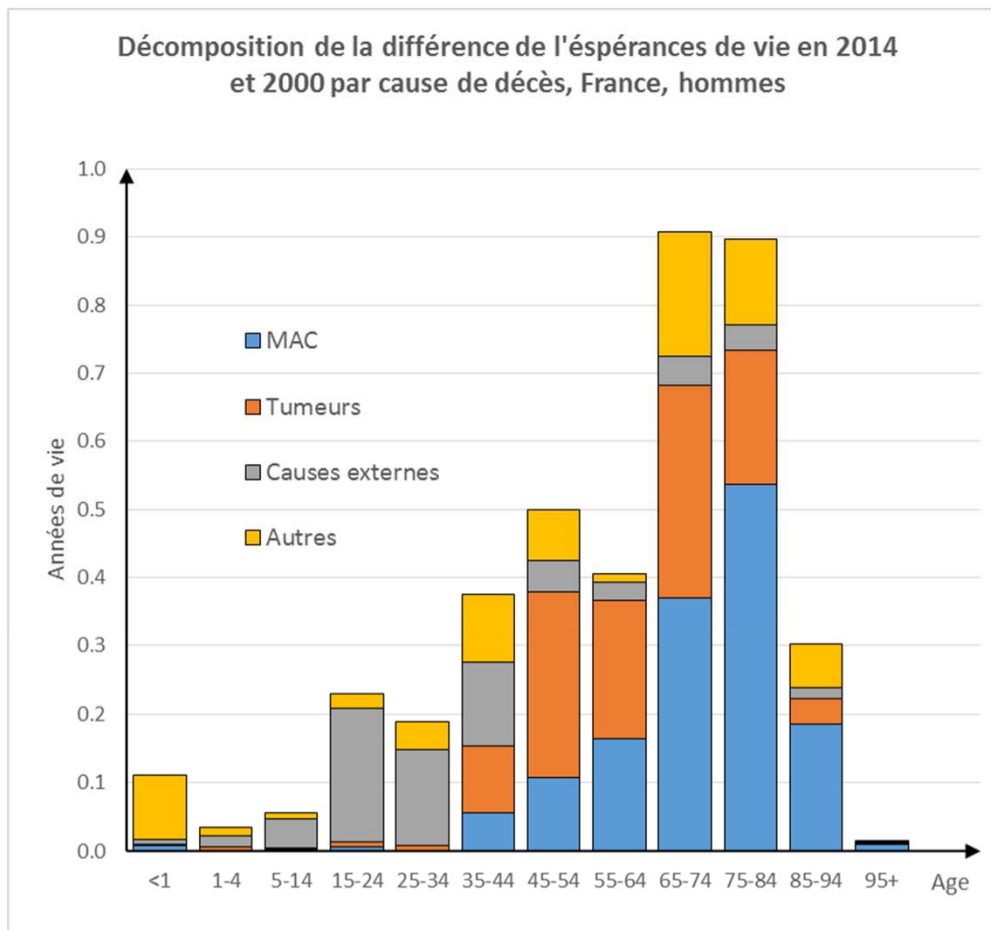
$${}_n\Delta_x^i = {}_n\Delta_x \cdot \frac{{}_n m_x^i(2) - {}_n m_x^i(1)}{{}_n m_x(2) - {}_n m_x(1)} \rightarrow$$

$${}_n\Delta_x^i = {}_n\Delta_x \cdot \frac{{}_n R_x^i(2) \cdot {}_n m_x(2) - {}_n R_x^i(1) \cdot {}_n m_x(1)}{{}_n m_x(2) - {}_n m_x(1)}$$

Les composants de la variation de l'espérance de vie par âge et par causes de décès (exemple France, 2000 vs 2014)

$e_0(2014) = 79.26$; $e_0(2000) = 75.24$

$e_0(2014) = 85.4$; $e_0(2000) = 82.8$



$e_0(2014) - e_0(2000) = 4.02 =$
 $1.45(\text{MAC}) + 1.14 (\text{tumeurs}) + 0.69 (\text{causes externes}) +$
 $+ 0.74 (\text{autres})$
 ou 36% + 28% + 17% + 18%

$e_0(2014) - e_0(2000) = 2.60 =$
 $1.37(\text{MAC}) + 0.31 (\text{tumeurs}) + 0.39 (\text{causes externes}) +$
 $+ 0.53 (\text{autres})$
 53% + 12% + 15% + 21%

En retenant l'hypothèse que la durée de vie dans une table associée à un facteur unique (TAFU) est une moyenne entre l'amplitude de l'intervalle n (si la mortalité de cause i est absente ${}_n m_x^i = 0$) et ${}_n e_x^*$ – la durée de vie dans une TAFU (si la cause i est la seule cause de décès absente ${}_n m_x^{-i} = 0$) pondérées par la proportion de décès de la cause i :

$${}_n e_x^* = \frac{{}_n L_x^i}{{}_n l_x^i} = n (1 - R^i) + R^i \cdot \frac{{}_n L_x}{l_x} \quad \text{F 1.1 (4)†}$$

L'équation 1.1 peut être simplifiée :
$$\frac{{}_n L_x^i}{{}_n l_x^i} = n - R^i \left(n - \frac{{}_n L_x}{l_x} \right) \quad \text{F 1.2}$$

Sachant que dans toute table de mortalité ${}_n e_x$ est toujours une moyenne entre n (la durée de vie des survivants) et ${}_n a_x$ – la durée moyenne de vie dans le dernier intervalle d'âge (la durée de vie des décédés entre x et $x + n$), respectivement pondérées par les probabilités de survie ${}_n p_x$ et de décès ${}_n q_x$, on peut en déduire :

$$\frac{{}_n L_x}{l_x} = n \cdot {}_n p_x + {}_n a_x \cdot {}_n q_x = n - (n - {}_n a_x) \cdot {}_n q_x \quad \text{F 1.3}$$

En utilisant la formule 1.3 (en sa version finale en bleu) on peut transformer l'expression 1.2 comme le suit :

$$\frac{{}_n L_x^i}{{}_n l_x^i} = n - R^i \left(n - \frac{{}_n L_x}{l_x} \right) = n - (n - {}_n a_x^*) \cdot {}_n q_x^* = n - R^i (n - n - (n - {}_n a_x) \cdot {}_n q_x)$$

Les n en rouge s'annulent et les signes « + » et « - » s'additionnent $(n a_x^* - n) \cdot {}_n q_x^* = R^i \cdot {}_n q_x (n a_x - n)$

et on obtient une formule définitive pour
$${}_n a_x^* = n + R^i \cdot \frac{{}_n q_x}{{}_n q_x^*} ({}_n a_x - n) \quad \text{F 1.4 (5)†}$$

On se rappelle que dans le dernier intervalle :
$${}_\infty a_x^i = e_\omega^i = \frac{e_\omega^0}{R^i}$$



† entre les parenthèses les numéros des formules dans la diapositive d'origine (n°28)