Partie II : Optimalité, incitations privées et intervention de l'Etat
Chapitre 3: La croissance optimale

Jean-Olivier Hairault (PSE)

28 mars 2026

Introduction

- La croissance est le fruit de l'accumulation d'un capital multidimensionnel. Faut-il en déduire que les Etats dans le monde devraient chercher à augmenter le plus possible ce taux d'accumulation ?
- Dans les économies de marchés, l'accumulation résulte de décisions privées décentralisées. Ce sont les ménages qui épargnent, qui déterminent leur montant de capital humain et les entreprises qui investissent et innovent.
- Pour modifier ces comportements, il faut comprendre leurs déterminants. L'Etat peut alors intervenir pour inciter les agents à intensifier leur accumulation individuelle si cette dernière est socialement sous-optimale.
- Il peut même suppléer l'accumulation privée là où il est nécessaire de faire des investissements collectifs.

Introduction

- Cependant, le taux d'accumulation optimal n'est pas nécessairement maximal. Il ne faut en effet pas oublier qu'une élévation du niveau du revenu par tête n'implique pas nécessairement que les conditions de vie s'améliorent. Une accumulation plus intense peut ainsi se faire au détriment de la consommation.
- Nous analysons dans cette partie les conditions d'une croissance optimale ; puis nous étudions si les décisions décentralisées des agents privés permettent de les atteindre ou si l'intervention de l'Etat est nécessaire.

Introduction

- L'ensemble de ces décisions est caractérisé par une dimension intertemporelle, faisant intervenir des dépenses présentes et des revenus futurs. Le capital physique, le capital humain et le capital technologique sont des facteurs accumulables et font l'objet de décisions conscientes.
- Ces investissements sont de caractère incertain. Seul un rendement important permettant de compenser la préférence pour le présent et le risque peut inciter les agents privés à prendre ces décisions.

Introduction

- Les entreprises achètent des machines, des logiciels afin d'augmenter leur volume de production.
- Les individus se forment et s'éduquent, acquérant ainsi des connaissances générales et techniques qui leur permettent d'être plus productifs.
- Les entreprises font de la recherche-développement pour innover.

Introduction

- Les sociétés modernes croissent parce qu'elles accumulent du capital physique, du capital humain et des connaissances. Ces investissements se font, à production donnée, aux dépens de la consommation.
- Cependant, parce qu'ils permettent d'augmenter le volume de production, plus de biens sont disponibles pour les consommateurs.
- La croissance est-elle globalement synonyme de plus de consommation ? Cette question est essentielle et pose le problème de l'optimalité de la croissance.

Introduction

- La consommation est source de bien-être, pas la production. Les économistes sont les premiers à reconnaître que la croissance du revenu par tête ne peut être une fin en soi.
- Si les individus devaient renoncer à consommer leur revenu afin d'épargner et ainsi accumuler du capital permettant de produire toujours plus de machines, la production augmenterait certainement, mais leurs besoins et leurs désirs ne seraient pas satisfaits.
- Cependant, parce que la croissance désigne une augmentation continue de la quantité et de la qualité des biens et des services, elle peut conduire à satisfaire plus de besoins et de désirs.

Introduction

- La question de l'optimalité de la croissance du revenu par tête prend en compte ces antagonismes potentiels et renvoie alors moins au niveau du revenu qu'aux conditions de vie appréhendées par le niveau de consommation.
- Le modèle de croissance proposé par SOLOW permet de montrer simplement qu'il existe un sentier de croissance régulier qui maximise le niveau de la consommation par tête : c'est le sentier de la règle d'or examiné par PHELPS en 1961.

Introduction

- La règle d'or identifie le niveau de capital et donc le taux d'épargne qui permettent d'atteindre la consommation maximale, une fois le sentier de croissance régulier atteint.
- Que se passe-t-il dans la transition vers ce sentier ? Les agents vont-ils consentir à faire un effort d'épargne suffisant pour atteindre ce régime capitalistique ?

Introduction

- De façon générale, traiter du niveau d'accumulation optimal ne peut se faire sans étudier les comportements individuels à leur origine.
- L'optimalité se définit par rapport aux préférences des agents, en particulier leurs préférences intertemporelles, et s'analyse dans le cadre du modèle de croissance optimale proposé par David Cass en 1965.
- En outre, il est crucial de savoir à quelles conditions les décisions individuelles peuvent conduire vers ce niveau optimal pour envisager ensuite la question de l'intervention de l'Etat.

La règle d'or dans le modèle de Solow

Comparaison de sentiers de croissance réguliers

- Le modèle de Solow a permis de montrer que les économies devaient converger vers un sentier de croissance régulier. Plus le taux d'épargne est grand, plus le stock de capital et la production sont élevés. Cependant, il faut privilégier la consommation par tête si l'on veut déterminer le taux d'épargne optimal.
- Raisonnons sur un sentier de croissance régulier. Un niveau de capital plus élevé permet de produire plus et donc d'atteindre une consommation plus forte.
- Mais, un effort d'épargne supplémentaire est nécessaire pour maintenir constant ce niveau de capital, et ainsi en faire profiter également les générations futures. Se dessine l'idée d'un niveau d'accumulation optimal.

La règle d'or dans le modèle de Solow

Comparaison de sentiers de croissance réguliers

- Le taux d'épargne détermine les niveaux permanents des grandeurs macroéconomiques, en particulier celui de la consommation.
- S'il existe un sentier de croissance, le sentier de la règle d'or, sur lequel la consommation par tête est maximale, il correspond donc à un taux d'épargne particulier.

- De façon générale, la consommation par tête $\mathcal{C}$ est égale à :

$$\mathcal{C}_t = \frac{(1-s)Y_t}{N_t} = A_t(1-s)y_t$$

- A l'état stationnaire, $y_t = \overline{y} = f(\overline{k})$ et $sf(\overline{k}) = (n+g+\delta)\overline{k}$.
- On en déduit l'expression de la consommation par tête à l'état stationnaire :

$$\overline{\mathcal{C}}_t = A_t(f(\overline{k}) - (n+g+\delta)\overline{k})$$

La règle d'or dans le modèle de Solow

Comparaison de sentiers de croissance réguliers

- Maximiser la consommation par tête ou la consommation intensive ($\overline{\mathcal{C}}_t/A_t$) par rapport au taux d'épargne est équivalent, puisque le progrès technique est exogène.

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{C}}_t}{\partial s} = A_t \left(f'(\overline{k}) \frac{\partial \overline{k}}{\partial s} - (n+g+\delta) \frac{\partial \overline{k}}{\partial s} \right)$$

- On en déduit la condition de maximisation de la consommation par tête en régime permanent :

$$f'(\overline{k}) = (n+g+\delta) \tag{1}$$

La règle d'or dans le modèle de Solow

Comparaison de sentiers de croissance réguliers

- L'interprétation de la condition (1) permet de comprendre les avantages et les coûts d'une accumulation du capital plus forte en termes de consommation.
- Sur un sentier de croissance régulière, le capital agrégé croît à un taux $n+g$:

$$\frac{K_{t+1}-K_t}{K_t} = \frac{I_t-\delta K_t}{K_t} = n+g$$

  ce qui implique que le taux d'investissement I/K est égal à $n+g+\delta$: l'investissement et donc l'épargne sur un sentier de croissance équilibrée dépendent du niveau du capital accumulé.

La règle d'or dans le modèle de Solow

Comparaison de sentiers de croissance réguliers

- Un niveau de capital plus élevé de dK nécessite un effort d'épargne plus important si l'on veut le maintenir constant en termes intensifs : il faut en effet compenser sa dépréciation, ainsi que les taux de croissance démographique et technologique.
- Cela diminue d'autant le revenu disponible pour la consommation. Plus précisément, la consommation (agrégée) diminue de $(n + g + \delta)dK$ unités.
- En revanche, elle augmente du fait d'un supplément de production, égal à la productivité marginale du capital $f'(k)$, engendré par ce capital supplémentaire : de ce fait, la consommation augmente de $f'(k)dK$ unités.

La règle d'or dans le modèle de Solow

Comparaison de sentiers de croissance réguliers

- Cette condition dite de la règle d'or définit un niveau de capital $\overline{k}^*$ et donc un taux d'épargne s^* qui permet de l'atteindre, les autres paramètres structurels étant donnés :

$$s^* = \frac{(n+g+\delta)\overline{k}^*}{f(\overline{k}^*)}$$

- Elle peut aussi s'écrire :

$$\overline{r}^* = n + g$$

- Sur le sentier de la règle d'or, le taux d'intérêt est égal au taux de croissance de l'économie.

La règle d'or dans le modèle de Solow

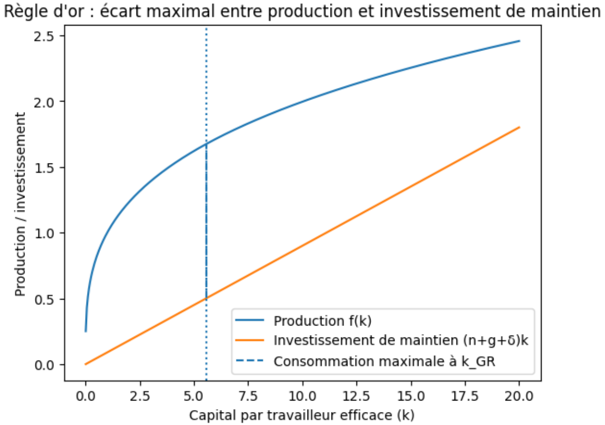
Comparaison de sentiers de croissance réguliers

- On en déduit que le montant de l'épargne est égal à la part du capital dans le revenu :

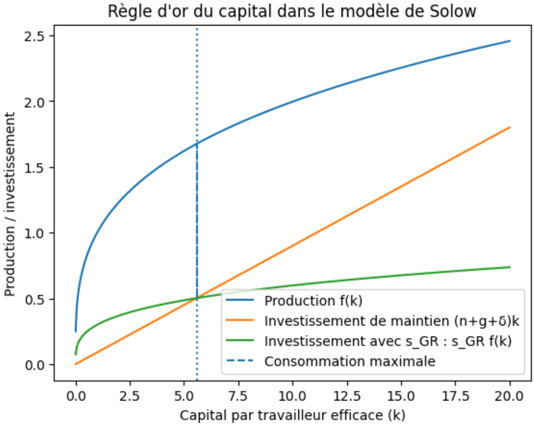
$$s^* = \frac{(\overline{r}^* + \delta)\overline{K}^*}{\overline{Y}^*}$$

d'où

$$s^*\overline{Y}^* = (\overline{r}^* + \delta)\overline{K}^*$$



Règle d'or : écart maximal entre production et investissement de maintien
Production / investissement
Capital par travailleur efficace (k)
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
Production f(k)
Investissement de maintien (n+g+δ)k
Consommation maximale à k_GR


Règle d'or du capital dans le modèle de Solow
Production / investissement
Capital par travailleur efficace (k)
Production f(k)
Investissement de maintien (n+g+δ)k
Investissement avec s_GR : s_GR f(k)
Consommation maximale
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0

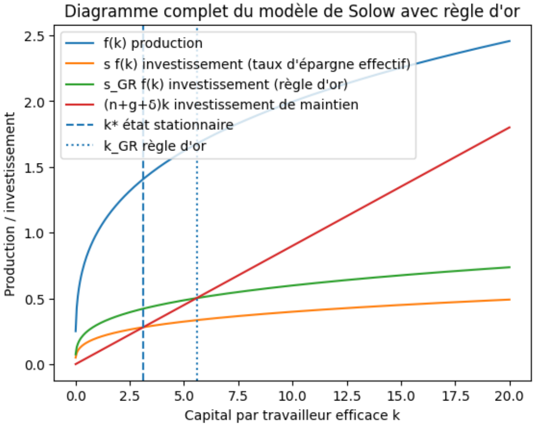


Diagramme complet du modèle de Solow avec règle d'or
f(k) production
s f(k) investissement (taux d'épargne effectif)
s_GR f(k) investissement (règle d'or)
(n+g+δ)k investissement de maintien
k* état stationnaire
k_GR règle d'or
Production / investissement
Capital par travailleur efficace k
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0

La règle d'or dans le modèle de Solow

Les limites d'une comparaison de sentiers réguliers

- Dans le raisonnement précédent, il s'agissait de comparer des états stationnaires entre eux, sans se poser la question du passage de l'un à l'autre par le truchement de la dynamique transitoire décrite dans le chapitre 2.
- La condition initiale est alors donnée par l'état stationnaire initial. Partant d'un niveau de capital d'état stationnaire plus faible que celui de la règle d'or, l'augmentation du taux d'épargne provoque transitoirement un taux de croissance du capital supérieur à celui de long terme.

La règle d'or dans le modèle de Solow

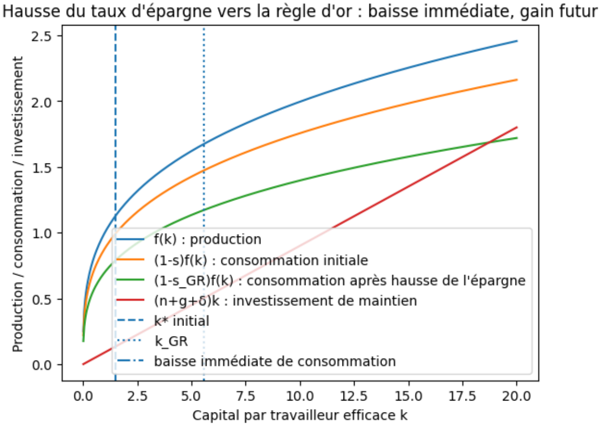
Les limites d'une comparaison de sentiers réguliers

- Les premières générations doivent ralentir leur consommation afin de soutenir cet effort d'accumulation. Vont-ils accepter d'élever leur taux d'épargne, même si la consommation dans le futur, y compris la leur, sera plus élevée ?
- Cela dépend de leur horizon de vie, de la façon dont il valorise le bien-être de leur descendant, de leur propre préférence pour le présent.

La règle d'or dans le modèle de Solow

Les limites d'une comparaison de sentiers réguliers

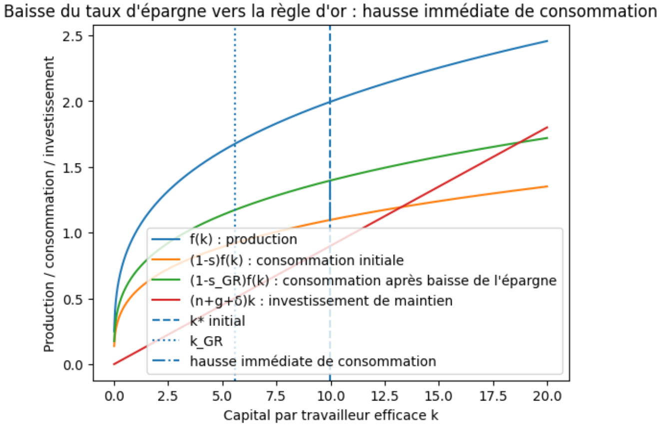
- Répondre à cette question implique de prendre en compte explicitement les motifs qui poussent les ménages à accumuler. Il sera alors possible de vérifier si la règle d'or peut être atteinte du fait des décisions d'accumulation individuelles.


Hausse du taux d'épargne vers la règle d'or : baisse immédiate, gain futur
Production / consommation / investissement
Capital par travailleur efficace k
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
f(k) : production
(1-s)f(k) : consommation initiale
(1-s_GR)f(k) : consommation après hausse de l'épargne
(n+g+δ)k : investissement de maintien
k* initial
k_GR
baisse immédiate de consommation

La règle d'or dans le modèle de Solow

Les limites d'une comparaison de sentiers réguliers

- Si le niveau d'accumulation dépasse celui de la règle d'or, baisser le taux d'épargne conduit à augmenter le niveau de la consommation à la fois dans la transition et sur le sentier de croissance régulier de la règle d'or, ce qui ne devrait pas remettre en cause le souhait d'atteindre ce sentier.
- Comme tout le monde serait gagnant à une désaccumulation du capital, le fait de rester bloquer dans cette situation serait le signe de dysfonctionnements dans le système économique : on parle dans ce cas d'inefficiences dynamiques.
- Là encore, il est nécessaire d'étudier explicitement la logique intertemporelle des comportements d'accumulation pour aller plus loin.


Baisse du taux d'épargne vers la règle d'or : hausse immédiate de consommation
Production / consommation / investissement
Capital par travailleur efficace k
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
f(k) : production
(1-s)f(k) : consommation initiale
(1-s_GR)f(k) : consommation après baisse de l'épargne
(n+g+δ)k : investissement de maintien
k* initial
k_GR
hausse immédiate de consommation

Les choix intertemporels de consommation

Modèle à 2 périodes

- Les choix en matière d'épargne et de consommation apparaissent au centre de la problématique de la croissance.
- D'une part, ils expliquent le rythme de l'accumulation du capital ;
- d'autre part, ils reposent sur des préférences intertemporelles qui peuvent donner des fondements à une analyse normative de la croissance.
- Dans cette section, nous opérons un détour par la théorie microéconomique des choix intertemporels en matière de consommation et d'épargne. Ce cadre sera au centre de l'analyse de la croissance optimale présentée dans la section suivante.

Les choix intertemporels de consommation

Modèle à 2 périodes

- Il s'agit ainsi d'expliquer le taux d'épargne d'un agent économique dans un cadre intertemporel dans la lignée des travaux pionniers de Irving Fisher dans les années 30.
- Fondamentalement, l'épargne est une renonciation à de la consommation présente donnant des possibilités accrues de consommation dans le futur. Cet arbitrage entre consommation future et consommation présente est au coeur des choix d'épargne.

Les choix intertemporels de consommation

Modèle à 2 périodes

- Soit un consommateur vivant deux périodes 1 et 2, le présent et le futur, dans une économie comprenant un seul bien dont les dotations à chaque période sont exogènes et certaines, Y_1 et Y_2, et un actif financier B dont le rendement certain est exogène, r.
- Le marché financier est supposé parfait : il n'existe aucun rationnement quantitatif et le taux d'intérêt est le même que l'on soit créditeur ou débiteur. Par convention $B > 0$ correspond à une position créditrice.
- Les préférences intertemporelles $U(C_1, C_2)$ du consommateur sont additivement séparables dans le temps et marquées par une préférence pour le présent ρ :

$$U(C_1, C_2) = u(C_1) + \frac{1}{1+\rho} u(C_2)$$

La fonction d'utilité $u(.)$ est deux fois continûment différentiable, croissante, concave.

Les choix intertemporels de consommation

Modèle à 2 périodes

- S'il n'existait pas de marchés financiers, dans le cas d'un bien non stockable, la consommation coïnciderait à chaque période aux dotations.
- En présence d'un bien stockable, il est possible de transférer des ressources présentes vers le futur, l'inverse n'étant pas vrai.

Les choix intertemporels de consommation

Modèle à 2 périodes

- S'il existe un actif financier, il devient possible d'opérer des transferts intertemporels dans les deux sens, à un certain taux d'intérêt.
- Dans ce cas, à la première période la décision de consommation pour une dotation donnée détermine la quantité empruntée ou placée sur les marchés financiers :

$$B_2 = Y_1 - C_1 \quad (B_1 = 0)$$

- La quantité consommée maximale à la deuxième période en découle :

$$C_2 \leq Y_2 + (1 + r)B_2$$

car

$$B_3 = Y_2 + (1 + r)B_2 - C_2 \geq 0$$

- Le consommateur ne peut être en position débitrice à la fin de la période 2 : $B_3 \geq 0$. Il s'agit d'une condition de solvabilité qui constitue la véritable contrainte budgétaire du problème.

Les choix intertemporels de consommation

Modèle à 2 périodes

- On peut écrire la contrainte budgétaire intertemporelle du consommateur qui relie la valeur présente des consommations à la valeur présente des dotations :

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} \leq Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} \tag{2}$$

- Le terme de droite est exogène et constitue la richesse du consommateur $\mathcal{W}$ qui détermine les possibilités globales de consommation.
- Par la suite, cette inégalité sera écrite sous forme d'une égalité, supposant en cela qu'il serait irrationnel de ne pas consommer tout son actif financier à la fin de sa vie ($B_3 = 0$) : il n'existe pas d'altruisme intergénérationnel qui se traduirait par des legs.

- Le consommateur maximise son utilité intertemporelle sous sa contrainte budgétaire intertemporelle (2).
- Le lagrangien associé à ce programme d'optimisation est le suivant :

$$\mathcal{L} = U(C_1, C_2) + \lambda \left(\mathcal{W} - C_1 - \frac{C_2}{1+r} \right)$$

- Les conditions d'optimalité sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow u'(C_1) = \lambda$$

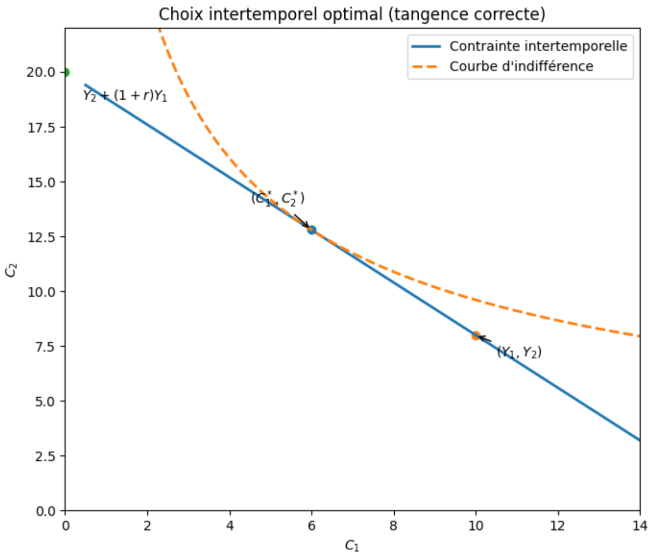
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{u'(C_2)}{1+\rho} = \frac{\lambda}{1+r}$$

- Les deux premières conditions peuvent être réécrites sous forme d'un taux marginal de substitution entre consommation présente et consommation future :

$$\frac{u'(C_1)}{u'(C_2)} = \frac{1+r}{1+\rho} \tag{3}$$

- Lorsque cette condition, appelée condition d'Euler, est satisfaite, aucune modification du plan de consommation (C_1, C_2) n'est susceptible d'augmenter l'utilité intertemporelle du consommateur :

- une variation d'une unité de consommation présente entraîne une variation de l'utilité intertemporelle de $u'(C_1)$, mais également une variation de l'épargne, et donc de la consommation future de $1 + r$ unités qui entraîne en retour une variation de l'utilité de seconde période de $(1 + r)u'(C_2)$, et par conséquent de l'utilité intertemporelle de $(1 + r)\frac{u'(C_2)}{1+\rho}$.
- A l'optimum, la somme de ces flux d'utilité intermporelle se compensent exactement. En revanche, si $u'(C_1)$ est plus élevé (faible) que $(1 + r)\frac{u'(C_2)}{1+\rho}$ alors le consommateur va substituer de la consommation présente (future) à de la consommation future (présente) en s'endettant (épargnant).



Choix intertemporel optimal (tangence correcte)
Contrainte intertemporelle
Courbe d'indifférence
$Y_2 + (1+r)Y_1$
(C_1^*, C_2^*)
(Y_1, Y_2)
C_2
C_1
20.0
17.5
15.0
12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
0
2
4
6
8
10
12
14

Les choix intertemporels de consommation

Modèle à 2 périodes

- L'épargne apparaît comme le moyen de faire coïncider le plan de consommation optimal et le profil des revenus qui est exogène. Elle permet de déconnecter les consommations des revenus de chaque période, la contrainte budgétaire intertemporelle impliquant uniquement une relation entre consommation globale et richesse.
- Le plan optimal de consommation est déterminé par le point de tangence entre la contrainte budgétaire intertemporelle et la courbe d'indifférence la plus élevée possible. La structure temporelle de la richesse, les valeurs respectives de Y_1 et de Y_2, détermine alors la valeur de B_2.

- Le taux d'intérêt est le rendement de l'épargne, le prix (le coût d'opportunité) de la consommation présente.
- La valeur du taux d'intérêt par rapport au taux de préférence pour le présent détermine le profil optimal de consommation indépendamment du profil des revenus.
- Le degré de substitution entre consommation présente et consommation future suite à une variation du taux d'intérêt est donné par la valeur de l'élasticité de substitution intertemporelle.

- Si l'on considère la fonction d'utilité $u(C) = \frac{C^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$, alors le taux marginal de substitution est égal à $\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$. σ correspond à l'élasticité de substitution intertemporelle, ce qui apparaît explicitement à partir de la condition d'optimalité du consommateur :
$$\frac{C_2}{C_1} = \sigma \left(\frac{1+r}{1+\rho}\right)$$
- Ainsi, une valeur de σ élevée pousse à adopter un profil de consommation particulièrement croissant pour un différentiel positif donné entre taux d'intérêt et taux de préférence pour le présent.

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infinie

- D. CASS en 1965 a proposé une extension du modèle de Solow en explicitant les choix intertemporels des ménages en termes de consommation et d'épargne.
- Les hypothèses du côté des entreprises sont conservées, en particulier l'exogénéité du progrès technique.
- En revanche, les ménages optimisent leur utilité intertemporelle sous une contrainte budgétaire également intertemporelle.

- La production est réalisée à partir de la combinaison de capital physique et de travail dont l'efficacité croît au cours du temps du fait de l'existence d'un progrès technique A_t :

$$Y_t = F(K_t, A_t H_t) = K_t^{\alpha}(A_t H_t)^{1-\alpha}$$

- Le progrès technique A porte sur le facteur travail. Il est supposé exogène et croître à un taux égal à g.

$$A_t = (1+g)^t A_0$$

- Le travail H est assimilé à la dimension quantitative des heures travaillées, réduite en plus à l'emploi.

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-avec A et N croissants

- K_t est le stock des biens de production dont les entreprises disposent au début de la période t. Ce stock résulte des investissements effectués dans le passé. A chaque période, les entreprises investissent pour augmenter leur stock de capital disponible à la période suivante :

$$K_{t+1} = (1 - \delta_t)K_t + I_t$$

- L'investissement s'ajoute au capital déjà accumulé qui est supposé se déprécier au taux δ. Le capital physique est supposé parfaitement réversible.
- Les conditions d'optimalité portant sur les demandes de capital et de travail sont respectivement :

$$\frac{\partial Y_{t+1}}{\partial K_{t+1}} - \delta = r_t$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial H_t} = W_t$$

- Sous rendements constants à l'échelle, on peut écrire

$$Y_t = A_t N_t f(k_t), \qquad k_t = \frac{K_t}{A_t N_t}$$

où k_t est le capital par unité de travail efficace.

- Les conditions du premier ordre donnent :

$$r_{t-1} = f'(k_t) - \delta$$

et

- $$w_t = A_t \left[f(k_t) - k_t f'(k_t) \right].$$

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-avec A et N croissants

- La taille du ménage est égale à N_t et croît au taux démographique exogène n.
- L'horizon de vie du ménage représentatif de taille N_t est supposé infini : on peut l'interpréter comme la vie d'un agent et de ses descendants.
- Il a accès à un marché financier parfait identique à celui de la section précédente.

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-avec A et N croissants

- Son utilité intertemporelle s'écrit :

$$U(C_0, ..., C_t, ...) = \frac{C_0^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} \times N_0 + ... + \frac{1}{(1+\rho)^t} \times \frac{C_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} \times N_t + ...$$

  avec C la consommation par tête dans le ménage.

- La contrainte budgétaire d'une période t quelconque est :

$$B_{t+1} = W_t N_t + (1 + r_{t-1})B_t - C_t N_t$$

  On suppose que chaque composante du ménage travaille une unité de temps. B est le montant de l'actif détenu au niveau du ménage.

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-avec A et N croissants

$$C_0 N_0 = (1 + r_{-1})B_0 + W_0 N_0 - B_1$$

or

$$B_1 = \frac{B_2 - W_1 N_1 + C_1 N_1}{1 + r_0}$$

donc :

$$C_0 N_0 + \frac{C_1 N_1}{1 + r_0} = (1 + r_{-1})B_0 + W_0 N_0 + \frac{W_1 N_1}{1 + r_0} - \frac{B_2}{1 + r_0}$$

en poursuivant l'itération jusqu'à l'horizon T, on obtient la contrainte budgétaire intertemporelle :

$$\lim_{T \to \infty} R_T B_T = \sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1} W_t N_t - \sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1} C_t N_t + (1 + r_{-1})B_0$$

avec $R_{t-1} = \frac{1}{\Pi_{j=-1}^{t-1}(1+r_j)}$ le facteur de taux d'intérêt composés.

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-avec A et N croissants

- La condition de solvabilité en horizon infini consiste à imposer que la valeur actuelle de la dette soit non négative :

$$\lim_{T\to\infty} R_T B_T \geq 0,$$

ce qui implique que son encours croisse à un taux inférieur au taux d'intérêt : les intérêts de la dette sont au moins remboursés.

- Nous imposerons en outre par la suite comme condition d'optimalité que :

$$\lim_{T\to\infty} R_T B_T = 0$$

ce qui implique la contrainte budgétaire intertemporelle suivante (en simplifiant par $B_0 = 0$) :

$$\sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1} C_t N_t = \sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1} W_t N_t \tag{4}$$

La somme actualisée des consommations est égale à celle des revenus.

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-avec A et N croissants

- L'existence d'un progrès technique à un taux exogène g et d'une croissance démographique à taux exogène n implique, par analogie avec le modèle de Solow, de raisonner sur des variables intensives.
- Le critère intertemporel peut s'écrire de la façon suivante, avec $\beta^t = \frac{1}{(1+\rho)^t}$:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{\left(\frac{C_t}{A_t}\right)^{1-\frac{1}{\sigma}} N_t A_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1 - \frac{1}{\sigma}}$$

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\frac{1}{\sigma}} (1+n)^t N_0 ((1+g)^t A_0)^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1 - \frac{1}{\sigma}}$$

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-avec A et N croissants

- Finalement, on peut en déduire l'utilité intertemporelle faisant intervenir la consommation intensive c :

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{\beta}^t \frac{c_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1 - \frac{1}{\sigma}}$$

avec $\tilde{\beta} = \beta(1+n)(1+g)^{1-\frac{1}{\sigma}}$. n et g réduisent l'impact du taux d'escompte psychologique.

- On remarque que l'objectif ne tend vers une limite finie que dans le cas où $\tilde{\beta} < 1$, ce qui implique que :

$$n + (1 - \frac{1}{\sigma})g < \rho \tag{5}$$

les facteurs de croissance n et g ne doivent pas être trop élevés par rapport au taux de préférence pour le présent.

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-avec A et N croissants

- Il reste à écrire la contrainte budgétaire intertemporelle (équation (4)) en termes intensifs :

$$\sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1}\left(\frac{C_t N_t}{A_t N_t}\right)(1+g)^t(1+n)^t = \sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1}\left(\frac{W_t N_t}{A_t N_t}\right)(1+g)^t(1+n)^t$$

- En notant $w_t = \frac{W_t}{A_t}$ le salaire déflaté par le progrès technique, la CBI devient :

$$\sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1} c_t((1+g)(1+n))^t = \sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1} w_t((1+g)(1+n))^t$$

- Le ménage représentatif maximise son utilité intertemporelle sous sa contrainte budgétaire :

$$\max_{\dots,c_t,c_{t+1},\dots} \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{\beta}^t \frac{c_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

sous

$$\sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1} c_t ((1+g)(1+n))^t = \sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1} w_t ((1+g)(1+n))^t \quad (\lambda)$$

- Les conditions du premier ordre par rapport à c_t et c_{t+1} sont respectivement :

$$\tilde{\beta}^t u'(c_t) = \lambda R_{t-1}((1+n)(1+g))^t$$

et

$$\tilde{\beta}^{t+1} u'(c_{t+1}) = \lambda R_t((1+n)(1+g))^{t+1}$$

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-avec A et N croissants

- On en déduit l'expression du taux marginal de substitution entre deux consommations successives :

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \tilde{\beta}\frac{(1+r_t)}{(1+n)(1+g)} \tag{6}$$

- Pour $n = 0$ et $g = 0$, on retrouve la condition (3) commentée dans la section précédente. Le terme supplémentaire $\frac{1}{(1+n)(1+g)}$ vient prendre en compte le fait qu'une unité de consommation intensive en moins à la période t ne procure que $\frac{1}{(1+n)(1+g)}$ unité de consommation intensive en plus à la période $t+1$.
- mais $\tilde{\beta}$ incorpore les effets de n et g qui boostent l'épargne en réduisant le taux d'escompte.

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-avec A et N croissants

- On peut réécrire l'équation (10) en utilisant l'expression de la fonction d'utilité instantanée :

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{(1+r_t)}{(1+\tilde{\rho})(1+n)(1+g)}$$

avec $\tilde{\rho}$ le taux de préférence pour le présent associé à $\tilde{\beta}$ ($\tilde{\beta} = \frac{1}{1+\tilde{\rho}}$).

- Ecrite en logarithme, l'équation précédente devient :

$$\frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right) = \log(1+r_t) - \log(1+\tilde{\rho}) - \log(1+n) - \log(1+g)$$

d'où, approximativement :

$$\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t} = \sigma\left(r_t - \tilde{\rho} - n - g\right) \tag{7}$$

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-avec A et N croissants

- on retouve en fait la même condition d'Euler sans ou avec croissance démographique : n n'a pas d'influence dans les choix intertemporels.
- comme $\tilde{\rho} = \rho - n - (1 - 1/\sigma)g$, on en déduit que :

$$\frac{c_{t+1} - c_t}{c_t} = \sigma \left(r_t - \rho - g/\sigma \right)$$

- L'effet de dilution de la croissance démographique est exactement compensé par le gain de la croissance de l'utilité par l'effet démographique.

- L'équilibre sur le marché financier est assuré par le taux d'intérêt, tandis que celui sur le marché du travail est permis par la flexibilité du salaire réel :
- $$H_t^d = N_t$$
- Dans un équilibre compétitif sans autre actif que les créances sur les firmes :

$$I_t = S_t$$

- Le rendement de l'actif financier est donc

$$r_t = f'(k_{t+1}) - \delta.$$

- La condition d'Euler devient :

$$u'(c_t) = \tilde{\beta} u'(c_{t+1}) \left[\frac{1 + f'(k_{t+1}) - \delta}{(1+n)(1+g)} \right].$$

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-avec A et N croissants

- La dynamique endogène du capital physique détermine de façon jointe avec le progrès technique et la croissance démographique la dynamique de la production.
- Considérons l'évolution du capital intensif $k = \frac{K}{AN}$:

$$\frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = \frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} - (n + g) = \frac{I_t}{K_t} - (n + g + \delta)$$

- Comme $I_t = S_t = Y_t - C_t N_t$, on en déduit que :

$$\frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = \frac{Y_t - C_t N_t}{K_t} - (n+g+\delta) = \frac{f(k_t) - c_t}{k_t} - (n+g+\delta)$$

- On peut en déduire l'équivalent de l'équation fondamentale de Solow :

$$k_{t+1} - k_t = s_t f(k_t) - (n + g + \delta)k_t$$

- A la différence du modèle de Solow, cette équation ne permet pas de décrire l'ensemble de la dynamique du modèle.
- En effet, le taux d'épargne s_t n'est plus exogène et constant. Il est déterminé implicitement par les choix intertemporels de consommation résumés par l'équation d'Euler.
- La dynamique du système est alors décrite complètement par un système de deux équations de récurrence :

$$\begin{cases} k_{t+1} - k_t = f(k_t) - c_t - (n+g+\delta)k_t \\ c_{t+1} - c_t = \sigma\left(f'(k_{t+1}) - \delta - \rho - g/\sigma\right)c_t \end{cases} \tag{8}$$

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-avec A et N croissants

- Sur le sentier de croissance régulier, les variables intensives sont constantes. Le système (8) se réécrit alors :

$$\begin{cases} f(\overline{k}) - \overline{c} & = & (n+g+\delta)\overline{k} \\ f'(\overline{k}) & = & \rho + g/\sigma + \delta \end{cases}$$

  avec

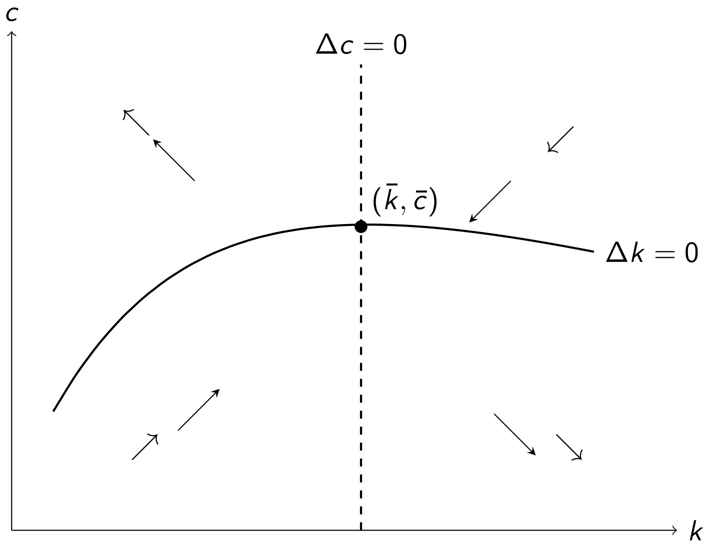
  $\rho + g/\sigma + \delta = (\rho - (1 - 1/\sigma)g - n) + (g + n + \delta) = \tilde{\rho} + g + n + \delta$
- La première équation du système implique que l'effort d'épargne sur le sentier de croissance régulier coïncide avec le capital requis pour que son taux de croissance soit de $n + g$.
- La deuxième équation nous informe sur le sentier de croissance régulier sélectionné par les décisions endogènes d'épargne :
- elle ne correspond pas à la condition de la règle d'or (équation (1)) car $\rho + g/\sigma + \delta \neq n + g + \delta$
- car $n + g \neq \tilde{\rho} + n + g$. Sous la condition (5), $\tilde{\rho} > 0$, l'économie est en régime de sous-accumulation.

- L'intensité capitalistique est inférieure à celle de la règle d'or. Le gain permanent, mais futur, à se situer sur le sentier de la règle d'or est compensé par le gain transitoire, mais présent, de ne pas épargner de façon plus intense.
- On remarque qu'une situation d'inefficience dynamique est impossible, l'intensité capitalistique étant toujours inférieure à celle de la règle d'or. Les décisions d'épargne d'agents rationnels déterminent un sentier de croissance régulier optimal au sens des préférences intertemporelles.
- Il n'existe dans ce contexte aucune place pour une intervention de l'Etat quand ce dernier respecte strictement les préférences intertemporelles des ménages.

- A long terme, la préférence pour le présent joue le rôle du taux d'épargne dans le modèle de Solow. Une diminution augmente l'intensité capitalistique stationnaire.
- Derrière l'influence des taux d'épargne et d'investissement dans les différences observées de revenu par tête se cacheraient ainsi des préférences intertemporelles différentes : des pays dont la préférence pour le présent des ménages serait élevée seraient moins enclins à accumuler du capital.

Le Modèle de croissance optimale

Diagramme des phases et dynamique d'équilibre



Le Modèle de croissance optimale

Diagramme des phases et dynamique d'équilibre

- Le diagramme des phases qui figure l'ensemble des dynamiques possibles et celle d'équilibre est représenté dans le plan (k, c).
- La courbe $\Delta k = 0$ est donnée par

$$c = f(k) + \left[1 - \delta - (1+g)(1+n)\right] k.$$

$$c < \Delta k = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{t+1} > k_t$$

$$c > \Delta k = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{t+1} < k_t$$

- La condition $\Delta c = 0$ est

$$k = \bar{k}.$$

A gauche de $\bar{k}$, $f'(k)$ est élevé et la consommation augmente. A droite de $\bar{k}$, la consommation diminue.

Le Modèle de croissance optimale

Diagramme des phases et dynamique d'équilibre

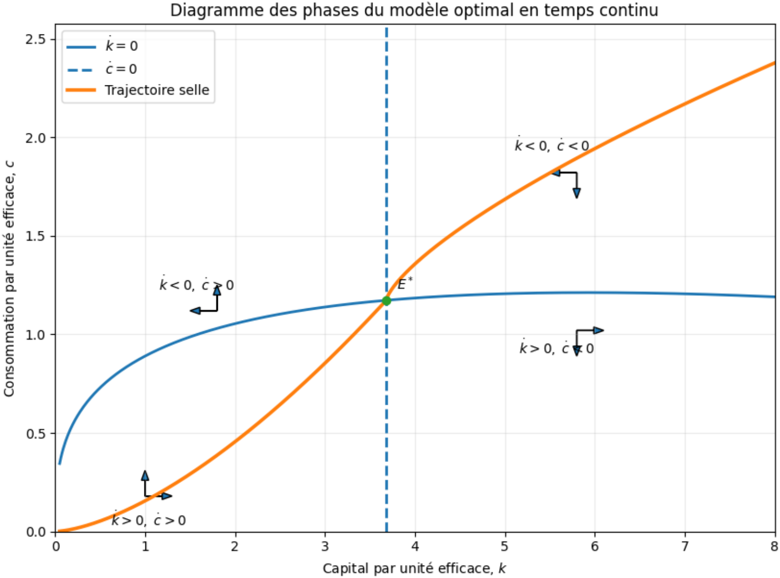
-

	$k < \bar{k}$	$k > \bar{k}$
$c < \Delta k = 0$	$\nearrow$	$\searrow$
$c > \Delta k = 0$	$\nwarrow$	$\swarrow$

- Ainsi :
  1. en bas à gauche : k augmente et c augmente,
  2. en bas à droite : k diminue et c diminue,
  3. en haut à gauche : k diminue et c augmente,
  4. en haut à droite : k diminue et c diminue.
- L'intersection des courbes $\Delta k = 0$ et $\Delta c = 0$ détermine l'état stationnaire $(\bar{k}, \bar{c})$.
- La dynamique présente une propriété de **selle** : il existe une unique trajectoire stable convergeant vers l'état stationnaire.
- En tout point du plan du diagramme des phases, le sens de variation joint des deux variables indique la trajectoire de l'économie compatible avec le système dynamique.

Le Modèle de croissance optimale

Diagramme des phases et dynamique d'équilibre



- Pour une valeur initiale k_0, il existe une infinité de trajectoires possibles, correspondant chacune à une condition initiale particulière pour C.
- Si $k_0 \leq \overline{k}$, certaines trajectoires sont caractérisées par une croissance de c et une décroissance de k, d'autres par une croissance de c, une croissance, puis une décroissance de k, enfin certaines voient croître le capital et la consommation qui décroît cependant ensuite.
- Une seule converge vers le sentier de croissance régulier : il s'agit de la trajectoire-selle.

- Il est possible de montrer que le respect de la contrainte budgétaire intertemporelle et de la condition de non-négativité du stock d'actifs financiers implique que la consommation prenne toujours une valeur compatible avec la convergence vers le sentier de croissance régulier, quelle que soit la valeur initiale k_0.
- Ainsi, dans la trajectoire vers le sentier de croissance régulier, partant d'une valeur du capital relativement faible, la valeur relativement élevée du taux d'intérêt, cohérente avec une productivité du capital relativement élevée, incite les ménages à épargner, ce qui crée les conditions d'une accumulation du capital.

- Le taux d'épargne tend ainsi à décroître au fur et à mesure de la convergence vers l'état stationnaire.
- La vitesse d'ajustement par rapport au modèle de Solow est même augmentée par la modulation du taux d'épargne en fonction de l'écart au sentier de croissance régulier.
- Ce résultat ne fait qu'augmenter les limites de ce modèle qui ne prend en compte que l'accumulation du capital. Rappelons-nous en effet que la vitesse de convergence estimée était déjà bien inférieure à celle qui correspondait au modèle de Solow avec taux d'épargne exogène.

Le Modèle de croissance optimale

- A long terme, la préférence pour le présent joue le rôle du taux d'épargne dans le modèle de Solow. Une diminution augmente l'intensité capitalistique stationnaire.
- Derrière l'influence des taux d'épargne et d'investissement dans les différences observées de revenu par tête se cacheraient ainsi des préférences intertemporelles différentes : des pays dont la préférence pour le présent des ménages serait élevée seraient moins enclins à accumuler du capital.

Le Modèle de croissance optimale

Problème du planificateur bénévolent

- Le système de marchés concurrentiels semble offrir un cadre performant pour garantir une accumulation du capital optimale (au sens des préférences intertemporelles).
- Ce résultat ne doit pas surprendre, étant donné le cadre d'hypothèses retenu.
- Le prochain chapitre s'en éloigne pour explorer le rôle fondamental de l'Etat dans la croissance.
- En particulier, l'hypothèse d'horizon de vie infini rend possible des échanges intertemporels qui éliminent les situations d'inefficience dynamique. Pourtant, il peut être plus réaliste de raisonner sur la base d'un modèle dans lequel les générations se succèdent sans liens entre elles. Dans ce cas, c'est l'Etat qui peut assurer l'optimalité des choix intertemporels.

Le Modèle de croissance optimale

Problème du planificateur bénévolent

- montrons formellement l'équivalence entre l'équilibre de marchés décentralisés et le problème du planificateur. Ce dernier est bienveillant et prend en compte les préférences des ménages.
- Le planificateur maximise l'utilité intertemporelle du ménage représentatif (qui se préoccupe de l'utilité totale) :

$$\max_{\ldots,c_t,c_{t+1},\ldots} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{C_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} N_t$$

- A chaque période il fait fait face aux contraintes de ressources au niveau agrégé :

$$Y_t = C_t + I_t$$

et

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

d'où une contrainte globale :

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + Y_t - C_t$$

- Le planificateur maximise l'utilité intertemporelle du ménage représentatif en variables intensives :

$$\max_{\ldots,c_t,c_{t+1},\ldots} \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{\beta}^t \frac{c_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

- A chaque période il fait fait face aux contraintes de ressources en variables intensives :

$$(1+g)(1+n)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + f(k_t) - c_t$$

Le Modèle de croissance optimale

Problème du planificateur bénévolent

- Le planificateur maximise l'utilité intertemporelle du ménage représentatif en variables intensives :

$$\max_{\dots,\dots,k_{t+1},\dots} \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{\beta}^t u((1-\delta)k_t + f(k_t) - (1+g)(1+n)k_{t+1})$$

- d'où la condition d'Euler :

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \tilde{\beta}\frac{(1+f'(k_{t+1})-\delta)}{(1+n)(1+g)} \tag{9}$$

Les ménages grace au marché financier et la valeur du taux d'intérêt égalisée à $f'(k_{t+1})-\delta$ prennent la même décision d'accumulation du capital physique grâce à leur comportement d'épargne.

Le Modèle de croissance optimale

- la population future rend l'utilité future plus importante, mais elle rend aussi l'investissement nécessaire pour équiper cette population plus coûteux. Les deux effets sont strictement symétriques, donc ils disparaissent de l'arbitrage marginal.
- C'est un effet technologique dans la règle d'or de Solow, pas un effet de préférence.
- La disparition de n dans la condition d'Euler n'est pas une propriété fondamentale de la croissance optimale : elle dépend du critère de bien-être utilisé.

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-utilité moyenne

- Dans le critère d'utilité moyenne, la population future ne pèse pas plus dans le bien-être social, mais le capital futur doit être partagé entre plus d'individus. Dans ce cas on retouve n dans la règle d'or modifiée.
- L'utilité intertemporelle de l'individu moyen de chaque période s'écrit :

$$U(C_0, ..., C_t, ...) = \frac{C_0^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} + ... + \frac{1}{(1+\rho)^t} \times \frac{C_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} + ...$$

avec C la consommation moyenne du ménage à chaque période.

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-utilité moyenne

- L'existence d'un progrès technique à un taux exogène g implique, par analogie avec le modèle de Solow, de raisonner sur des variables intensives, déflatées par le travail efficace.
- Le critère intertemporel peut s'écrire de la façon suivante, avec $\beta^t = \frac{1}{(1+\rho)^t}$:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{\left(\frac{C_t}{A_t}\right)^{1-\frac{1}{\sigma}} A_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\frac{1}{\sigma}} ((1+g)^t)^{1-\frac{1}{\sigma}} A_0^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-utilité moyenne

- Finalement, on peut en déduire l'utilité intertemporelle faisant intervenir la consommation intensive c, en négligeant le terme exogène et constant $A_0^{1-\frac{1}{\sigma}}$:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{\beta}^t \frac{c_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

  avec $\tilde{\beta} = \beta(1+g)^{1-\frac{1}{\sigma}}$.

- On remarque que l'objectif ne tend vers une limite finie que dans le cas où $\tilde{\beta} < 1$, ce qui implique que :

$$(1-\frac{1}{\sigma})g < \rho \tag{10}$$

  le facteur de croissance g ne doit pas être trop élevé par rapport au taux de préférence pour le présent.

- la contrainte budgétaire intertemporelle (équation (4)) en termes intensifs demeure identique :

$$\sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1}\left(\frac{C_t N_t}{E_t}\right)(1+g)^t(1+n)^t = \sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1}\left(\frac{W_t N_t}{E_t}\right)(1+g)^t(1+n)^t$$

- En notant $w_t = \frac{W_t}{A_t}$ le salaire déflaté par le progrès technique, la CBI devient :

$$\sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1} c_t((1+g)(1+n))^t = \sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1} w_t((1+g)(1+n))^t$$

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-utilité moyenne

- Le ménage représentatif maximise son utilité intertemporelle sous sa contrainte budgétaire :

$$\max_{\dots,c_t,c_{t+1},\dots} \sum_{t=0}^{\infty} \tilde{\beta}^t \frac{c_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

sous

$$\sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1} c_t ((1+g)(1+n))^t = \sum_{t=0}^{\infty} R_{t-1} w_t ((1+g)(1+n))^t \qquad (\lambda)$$

- Les conditions du premier ordre par rapport à c_t et c_{t+1} sont respectivement :

$$\tilde{\beta}^t u'(c_t) = \lambda R_{t-1}((1+n)(1+g))^t$$

et

$$\tilde{\beta}^{t+1} u'(c_{t+1}) = \lambda R_t((1+n)(1+g))^{t+1}$$

- On en déduit l'expression du taux marginal de substitution entre deux consommations successives :

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \tilde{\beta}\frac{(1+r_t)}{(1+n)(1+g)} \tag{11}$$

- Le terme supplémentaire $\frac{1}{(1+n)(1+g)}$ vient prendre en compte le fait qu'une unité de consommation intensive en moins à la période t ne procure que $\frac{1}{(1+n)(1+g)}$ unité de consommation intensive en plus à la période $t+1$.

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-utilité moyenne

- On peut réécrire l'équation (10) en utilisant l'expression de la fonction d'utilité instantanée :

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{(1+r_t)}{(1+\tilde{\rho})(1+n)(1+g)}$$

avec $\tilde{\rho}$ le taux de préférence pour le présent associé à $\tilde{\beta}$ ($\tilde{\beta} = \frac{1}{1+\tilde{\rho}}$).

- Ecrite en logarithme, l'équation précédente devient :

$$\frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right) = \log(1+r_t) - \log(1+\tilde{\rho}) - \log(1+n) - \log(1+g)$$

d'où, approximativement :

$$\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t} = \sigma\left(r_t - \rho - g/\sigma - n\right) \qquad (12)$$

utilité moyenne : la population future ne reçoit pas plus de poids : n apparaît dans l'Euler.

La dynamique du système est alors décrite complètement par un système de deux équations de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{lcc} k_{t+1} - k_t & = & f(k_t) - c_t - (n + g + \delta)k_t \\ c_{t+1} - c_t & = & \sigma\left(f'(k_{t+1}) - \delta - \rho - g/\sigma - n\right)c_t \end{array} \right. \quad (13)$$

Le Modèle de croissance optimale

Modèle à horizon de vie infini-utilité moyenne

- Sur le sentier de croissance régulier, les variables intensives sont constantes. Le système (12) se réécrit alors :

$$\begin{cases} f(\overline{k}) - \overline{c} &= (n+g+\delta)\overline{k} \\ f'(\overline{k}) &= \rho + g/\sigma + n + \delta \end{cases}$$

  avec
  $\rho + g/\sigma + n + \delta = (\rho - (1 - 1/\sigma)g) + (g + n + \delta) = \tilde{\rho} + g + n + \delta$
- La condition de la règle d'or est modifiée par la prise en compte de l'impact du progrès technique sur l'utilité intertemporelle uniquement, puisque ici la croissance démographique ne modifie pas cette dernière.
- $\tilde{\rho} > 0$ implique un état stationnaire sous capitalistique sans donc inefficience dynamique.

- pourquoi la simple augmentation du nombre d'individus augmenterait-elle le bien-être social ? si la population double mais que chacun a la même utilité, le bien-être total double.
- C'est ce qu'on appelle en philosophie économique le "repugnant conclusion problem", en référence aux travaux de D. Parfit.
- L'utilitarisme total valorise mécaniquement les populations plus grandes. Cela conduit à préférer des sociétés immenses avec des vies à peine positives. Ce résultat est jugé moralement "répugnant".

- C'est pourquoi la question de l'agrégation des utilités dans les modèles avec population variable reste un débat important en économie normative.
- Dans beaucoup de modèles de croissance optimal, les ménages sont interprétés comme des dynasties infinies : chaque génération se soucie de ses descendants.
- Si chaque parent valorise l'utilité de ses enfants, alors la fonction objectif deviendrait l'utilité prenant en compte la population et sa croissance. Mais on peut très bien se préoccuper de ses descendants en se souciant de leur utilité moyenne...

- davantage de capital accroît la production ;
- davantage de production accroît la pollution ;
- davantage de pollution réduit la productivité ;
- la croissance exerce donc une pression négative sur l'environnement, qui rétroagit ensuite sur l'économie.

Le Modèle de croissance optimale

Green Solow

- La population et la technologie évoluent selon

$$N_{t+1} = (1+n)N_t, \qquad A_{t+1} = (1+g)A_t,$$

avec $n \geq 0$ le taux de croissance démographique et $g \geq 0$ le taux de progrès technique.

- La production agrégée est donnée par

$$Y_t = \Phi(P_t) K_t^{\alpha} (A_t H_t)^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

où P_t désigne le stock de pollution.

- La fonction $\Phi(P_t)$ représente le dommage environnemental sur la production. On suppose que

$$\Phi'(P_t) < 0, \qquad \Phi''(P_t) \leq 0, \qquad 0 < \Phi(P_t) \leq 1.$$

Ainsi, une hausse du stock de pollution réduit la productivité globale.

- On définit le capital et la production par unité de travail efficace :

$$k_t = \frac{K_t}{A_t H_t}, \qquad y_t = \frac{Y_t}{A_t H_t}.$$

- On obtient alors

$$y_t = \Phi(P_t) f(k_t),$$

avec

$$f(k_t) = k_t^{\alpha}.$$

- Comme dans le modèle de Solow, une fraction constante $s \in (0, 1)$ de la production est épargnée. L'accumulation du capital agrégé est

$$K_{t+1} = sY_t + (1 - \delta)K_t, \qquad 0 < \delta < 1.$$

- on obtient la dynamique du capital intensif :

$$k_{t+1} - k_t = s\Phi(P_t)f(k_t) - (n + g + \delta)k_t$$

- Pour conserver un système stationnaire, on suppose que la pollution croît en fonction de la production intensive. La dynamique de P_t est donc

$$P_{t+1} = (1-\rho)P_t + \psi y_t, \qquad \psi > 0, \quad 0 < \rho < 1.$$

- Comme $y_t = \Phi(P_t)f(k_t)$, on obtient

$$P_{t+1} = (1-\rho)P_t + \psi\Phi(P_t)f(k_t).$$

- Le système dynamique complet est donc

$$k_{t+1} - k_t = s\Phi(P_t)f(k_t) - (n+g+\delta)k_t$$

$$P_{t+1} = (1-\rho)P_t + \psi\Phi(P_t)f(k_t).$$

- La consommation agrégée est

$$C_t = (1 - s) Y_t.$$

La consommation par unité de travail efficace est donc

$$c_t = \frac{C_t}{A_t N_t} = (1 - s)\Phi(P_t) f(k_t).$$

- Un état stationnaire $(\bar{k}, \bar{P})$ vérifie

$$k_{t+1} = k_t = \bar{k}, \qquad P_{t+1} = P_t = \bar{P}.$$

- La condition stationnaire pour le capital est

$$(n + g + \delta)\bar{k} = s\Phi(\bar{P}) f(\bar{k}).$$

Le Modèle de croissance optimale

Green Solow

- La condition stationnaire pour la pollution est

$$\bar{P} = (1-\rho)\bar{P} + \psi\Phi(\bar{P})f(\bar{k}),$$

soit

$$\rho\bar{P} = \psi\Phi(\bar{P})f(\bar{k}).$$

- Donc

$$\bar{P} = \frac{\psi}{\rho}\Phi(\bar{P})f(\bar{k}).$$

- on peut montrer que $\bar{P} = P(\bar{k})$ avec $P'(\bar{k}) > 0$

- La consommation stationnaire vaut

$$\bar{c} = (1-s)\Phi(\bar{P})f(\bar{k}).$$

-

$$\bar{c} = \Phi(\bar{P})f(\bar{k}) - (n+g+\delta)\bar{k}$$

- La règle d'or verte consiste à choisir k de façon à maximiser cette consommation stationnaire. La condition du premier ordre est :

$$\Phi(P(\bar{k}))f'(\bar{k}) + P'(\bar{k})\Phi'(P(\bar{k}))f(\bar{k}) = n+g+\delta$$

Le Modèle de croissance optimale

Green Solow

- Dans le modèle vert, davantage de capital accroît la production, donc la pollution, ce qui réduit ensuite la productivité. Le terme

$$P'(\bar{k})\Phi'(P(\bar{k}))f(\bar{k})$$

est négatif puisque

$$\Phi'(P) < 0 \qquad \text{et} \qquad P'(k) > 0.$$

- Ainsi, le rendement marginal du capital est plus faible que dans le modèle de Solow standard : le niveau de capital de règle d'or verte est plus faible que le niveau de capital de règle d'or standard.
- l'accumulation du capital améliore la production mais dégrade l'environnement, et cette dégradation réduit en retour la productivité.