

Cours de mathématiques avancées - Magistère d'économie

TD de logique

Exercice 1. L'assertion "Chaque propriétaire de chien a au moins un chien noir" est fausse. Quelle est sa négation ?

Il existe un propriétaire de chien tel que aucun de ses chiens est noir.

Exercice 2. Ecrire la négation des affirmations suivantes (A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$) :

- (1) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in A \quad x < y$
- (2) $\forall x \in A \exists y \in A : \quad x < y$
- (3) $\exists y, z \in \mathbb{R} : \forall x \in A \quad y < x < z$
- (4) $\forall x \in A \exists y, z \in A : \quad y < x < z$
- (1) $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in A : x \geq y$
- (2) $\exists x \in A : \forall y \in A \quad x \geq y$
- (3) $\forall y, z \in \mathbb{R} \exists x \in A : x \geq z \text{ ou } x \leq y$
- (4) $\exists x \in A : \forall z \in A \quad x \geq z \text{ ou } \forall y \in A \quad y \geq x$

Exercice 3. Ecrire la négation des affirmations suivantes :

- (1) Toutes les voitures rouges sont rapides.
- (2) Toutes les voitures sont rouges et rapides.
- (3) Il existe une voiture rouge et rapide.
- (4) Il existe une voiture rouge qui n'est pas rapide.
- (1) Il existe une voiture rouge qui n'est pas rapide.
- (2) Il existe une voiture qui n'est pas rouge ou qui n'est pas rapide.
- (3) Toutes les voitures sont non rouges ou non rapides.
- (4) Toutes les voitures rouges sont rapides.

Exercice 4. Trouver des propositions P et Q telles que

- (1) $P \Rightarrow Q$ est vrai et $Q \Rightarrow P$ est vrai.
- (2) $P \Rightarrow Q$ est faux et $Q \Rightarrow P$ est vrai.
- (3) $P \Rightarrow Q$ est faux et $Q \Rightarrow P$ est faux.
- (1) $P : ABC$ est un triangle rectangle ; $Q : les côtés de ABC vérifient le théorème de Pythagore$
- (2) $P : ABCD$ est un rectangle ; $Q : ABCD$ est un carré
- (3) $P : ABCD$ est un rectangle ; $Q : ABCD$ est un losange

Exercice 5. S'il pleut, Abel prend un parapluie. Béatrice ne prend jamais de parapluie s'il ne pleut pas et en prend toujours un quand il pleut. Que peut-on dire de ces 6 situations ?

- (1) Abel se promène avec un parapluie.
- (2) Abel se promène sans parapluie.
- (3) Béatrice se promène avec un parapluie.
- (4) Béatrice se promène sans parapluie.
- (5) Il ne pleut pas.
- (6) Il pleut.
- (1) pas de conclusion
- (2) Il ne pleut pas.
- (3) Il pleut.

- (4) Il ne pleut pas.
- (5) Béatrice se promène sans parapluie.
- (6) Abel et Béatrice se promènent avec un parapluie.

Exercice 6. Est-ce que $6|n$ est une condition nécessaire (suffisante) pour que n soit pair ?

On rappelle que :

P est nécessaire à Q si $Q \implies P$.

P est suffisante pour Q si $P \implies Q$.

On pose $P : 6|n$; $Q : n$ est pair

$6|n$ n'est pas une condition nécessaire pour que n soit pair. $6|n$ est une condition suffisante pour que n soit pair.

Exercice 7. Trouver des conditions nécessaires (suffisantes) à chacune des propositions suivantes :

- (1) avoir son bac ;
- (2) A appartient au segment BC ;
- (3) $ABCD$ est un rectangle.

Nécessaires :

- (1) avoir passé toutes les épreuves écrites et orales
- (2) A, B, C alignés
- (3) $ABCD$ est un quadrilatère

Suffisantes :

- (1) être inscrit à l'université
- (2) A est le point milieu du segment BC
- (3) $ABCD$ est un carré

Exercice 8. Regrouper les propositions équivalentes :

- (1) Tu auras ton examen si tu travailles régulièrement.
- (2) Pour avoir son examen il faut travailler régulièrement.
- (3) Si tu ne travailles pas régulièrement, tu n'auras pas ton examen.
- (4) Il est nécessaire de travailler régulièrement pour avoir son examen.
- (5) Pour avoir son examen, il suffit de travailler régulièrement.
- (6) Ne pas travailler régulièrement implique un échec à l'examen.
- (7) Si tu n'as pas ton examen, c'est que tu n'as pas travaillé régulièrement.
- (8) Travail régulier implique réussite à l'examen.
- (9) On peut avoir son examen qu'en travaillant régulièrement.

E : avoir son examen T : travailler régulièrement

- (1) $T \implies E$
- (2) $E \implies T$
- (3) $\text{non}T \implies \text{non}E$
- (4) $E \implies T$
- (5) $T \implies E$
- (6) $\text{non}T \implies \text{non}E$
- (7) $\text{non}E \implies \text{non}T$
- (8) $T \implies E$
- (9) $E \implies T$

Par conséquent 1), 5), 7), 8) sont équivalents. 2), 3), 4), 6), 9) sont équivalents.

Exercice 9. Montrer que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$.

Pour $n = 1$ c'est vrai! Supposons que cette formule soit vraie pour n . Pour $n + 1$ on a $1 + 2 + \dots + n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n + 1)\frac{n+2}{2}$

Exercice 10. Est-ce que l'assertion suivante est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$?

$$x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$$

Non, considérer $x_0 = -3$.

Exercice 11. Nier l'assertion "Tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans."

Il existe un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans.

Exercice 12. Ecrire la négation des affirmations suivantes :

- (1) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
- (2) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : \quad x + y > 0$
- (3) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
- (4) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$
- (1) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : \quad x + y \leq 0$
- (2) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0$
- (3) $\exists x, y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$
- (4) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y^2 \leq x$