

Cours de mathématiques avancées - Magistère d'économie

TD sur les espaces vectoriels

Exercice 1. Déterminer a, b tels que $(1, -1, a, b)$ appartienne à $L\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}$.

$$(-1, 1, a, b) = \alpha(1, 1, 1, 1) + \beta(1, 2, 3, 4) = (\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta, \alpha + 4\beta) \text{ ce qui donne...}$$

Exercice 2. A quelle condition une droite du plan est-elle un sous-espace vectoriel ?

Surement une droite doit passer par 0. Il faut ensuite montrer que toutes ces droites, c'est-à-dire les droites de type $y = ax, a \in \mathbb{R}$, et la droite $x = 0$ sont des espaces vectoriels.

Exercice 3. Dire si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels :

- (1) ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
- (2) ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, paires ;
- (3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$
- (4) ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(-1) = -f(1)$
- (5) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 0\}$
- (6) $\{u_n, n \in \mathbb{N} : u_0 \leq u_2\}$
- (7) $\{u_n, n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$

On utilise la définition de sous-espace vectoriel ou on fournit un contre-exemple :

- (1) oui
- (2) oui
- (3) non, il suffit de prendre $(1, 1)$ et $(1, -1)$: leur somme n'est pas dans l'ensemble
- (4) oui
- (5) oui, c'est seulement le vecteur nul
- (6) non, car, par exemple $(-3)u_n$ n'est pas dans l'ensemble
- (7) oui

Exercice 4. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, tels que $P(1) + P'(0) = 0$ est un sous-espace vectoriel.

Soit $P = a + bx + cx^2$. Si on impose $P(1) + P'(0) = 0$, on trouve qu'il s'agit de l'ensemble des polynômes de la forme $(-2b - c) + bx + cx^2$.

Sinon, on peut montrer que si $P(1) + P'(0) = 0$ et $Q(1) + Q'(0) = 0$, alors leur somme satisfait encore cette condition et $\lambda P(x)$ satisfait encore cette condition.

Exercice 5. Soient $\vec{v}_1 = (1, 2, 3, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 2, 3)$, $\vec{v}_3 = (2, 3, 4, -3)$. Soient $F_1 = \{\vec{v}_1\}$, $F_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $F_3 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Soient $\vec{w}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{w}_2 = (1, -1, 1, -1)$, $\vec{w}_3 = (-3, -4, -5, 6)$.

- (1) Est-ce que $\vec{w}_i, i = 1, 2, 3$ est une combinaison linéaire des vecteurs dans F_1, F_2 ou F_3 ?
- (2) Déterminer $L(F_i), i = 1, 2, 3$.
- (3) Déterminer toutes les manières d'écrire $(0, 0, 0, 0)$ et $(1, 3, 5, 3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs de F_3 .

- (1) $\vec{w}_i$ n'est pas un multiple de $\vec{v}_1$ donc $\vec{w}_i$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs de F_1 .

Il n'existe aucun (λ_1, λ_2) tel que $\vec{w}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$; idem pour $\vec{w}_2$; pour $\vec{w}_3$ on trouve $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$. Donc $\vec{w}_3$ appartient à $L(F_2)$.

- On remarque que $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$; donc $F_3 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2\}$. Par conséquent $L(F_2) = L(F_3)$. On a vu que $\vec{w}_i, i = 1, 2$ n'appartient pas à $L(F_2)$ et donc $\vec{w}_i, i = 1, 2$ n'appartient pas à $L(F_3)$. Par contre $\vec{w}_3$ appartient pas à $L(F_2) = L(F_3)$.
- (2) $L(F_1) = \{(\lambda, 2\lambda, 3\lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R}\}$, $L(F_2) = \{(\lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 + 2\lambda_2, 3\lambda_2), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$
 $L(F_3) = \{(\lambda_1 + 2\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3, 3\lambda_2 - 3\lambda_3), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$
- (3) $(1, 3, 5, 3) = (1 - 2\lambda)\vec{v}_1 + (1 + \lambda)\vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_3$; $(0, 0, 0, 0) = -2\lambda\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_3$

Exercice 6. Montrer que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $V = L(\{(-2, 0, 0)\})$ sont en somme directe.

Il suffit de montrer que l'intersection est $\vec{0}$. En effet, $(-2\lambda, 0, 0)$ appartient à U ssi $\lambda = 0$.

Exercice 7. Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + z = 0$. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une famille génératrice.

S contient le vecteur nul. De plus, si $x - y + z = 0$ et $x' - y' + z' = 0$ alors, en faisant la somme, on trouve que $(x + x', y + y', z + z')$ appartient à S . Finalement, si $(x, y, z) \in S$, alors $\lambda(x, y, z) \in S$.

S est composé des vecteurs de la forme $(x, x + z, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1)$. Donc $G = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ est génératrice.

Exercice 8. Montrer que $\{1, x, x^2, \dots, x^d\}$ engendre l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à d .

Exercice 9. Soit S l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

Pourquoi S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Donner une famille génératrice.

Les vecteurs de S sont de la forme $y(-2, 1, -2)$. Une famille génératrice est en $\{(2, 1, -2)\}$.

On peut dire a priori que S est un sous-espace vectoriel, car il est l'intersection de deux sous-espaces de la même forme que le sous-espace de l'exercice 7.

Exercice 10. Montrer que si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre, alors $\{\vec{u}, \vec{v} + \vec{u}\}$ est libre.

$\vec{0} = \alpha\vec{u} + \beta(\vec{u} + \vec{v}) = (\alpha + \beta)\vec{u} + \beta\vec{v}$ implique que $\alpha + \beta = 0 = \beta$ car $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre. Par conséquent $\alpha = 0 = \beta$.

Exercice 11. Soit $F = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$. Donner les coordonnées de $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ dans cette famille.

On cherche $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $P = \lambda_0 + \lambda_1(1 + x) + \lambda_2(1 + x + x^2) + \lambda_3(1 + x + x^2 + x^3)$, ce qui donne

$$P = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2)(1 + x) + (a_2 - a_3)(1 + x + x^2) + (a_3)(1 + x + x^2 + x^3)$$

Exercice 12. Soit S l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + z = 0$ (déjà étudié). Donner une base.

On a vu que $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$ engendre S . Ces deux vecteurs sont libres. Donc ils sont une base.

Exercice 13. Pour chacune des familles suivantes dire si elle constitue une famille libre, génératrice ou une base de $\mathbb{R}^2$:

- (1) $F_1 = \{(2, 1), (4, 1)\}$
- (2) $F_2 = \{(-1, 2), (4, 3), (6, -1)\}$
- (3) $F_3 = \{(2, -3), (1, 5), (0, 0)\}$

$$(4) F_4 = \{(1, 1)\}$$

- (1) $F_1 = \{(2, 1), (4, 1)\}$ est une base car F_1 est libre et contient deux éléments dans un espace de dimension 2
- (2) $F_2 = \{(-1, 2), (4, 3), (6, -1)\}$ n'est pas libre, car il contient 3 vecteurs dans un espace de dimension 2 ; il engendre $\mathbb{R}^2$ car $\{(-1, 2), (4, 3)\} \subset F_2$ est libre
- (3) $F_3 = \{(2, -3), (1, 5), (0, 0)\}$: mêmes arguments que F_2
- (4) $F_4 = \{(1, 1)\}$ est libre, mais pas générateur, car il ne contient qu'un vecteur.

Exercice 14. Montrer que $(2, 1, 1), (1, 3, 1), (-2, 1, 3)$ constituent une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire les coordonnées de $(1, 1, 1)$ dans cette base.

On peut résoudre par la méthode du pivot le système $\lambda_1(2, 1, 1) + \lambda_2(1, 3, 1) + \lambda_3(-2, 1, 3) = (0, 0, 0)$ pour voir si ce système est libre. En effet il est libre. Le même système, mais avec second membre $(1, 1, 1)$ donne comme solutions $1/9(5, 1, 1)$.

Exercice 15. Soit $U = L(\{\vec{u}_1 = (1, 2, -1, 3), \vec{u}_2 = (2, 4, 1, -2), \vec{u}_3 = (3, 6, 0, 1)\})$. Soit $W = L(\{\vec{w}_1 = (1, 2, -4, 11), \vec{w}_2 = (2, 4, -5, 14)\})$. Quelle est la dimension de W ? Montrer que $U = W$; en donner une base.

$\vec{w}_2$ n'est pas un multiple de $\vec{w}_1$. Donc $\dim W = 2$.

$\vec{w}_1 = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2$; $\vec{w}_2 = 4\vec{u}_1 - \vec{u}_2$. Donc $W \subset U$.

Par ailleurs $\vec{u}_3 = -(\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2)$ et $\vec{u}_2$ n'est pas un multiple de $\vec{u}_1$. Donc $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est libre. Donc la dimension de U est 2. On a montré donc que

$W =$ sous-espace de dimension $2 \subset U =$ sous-espace de dimension 2

Ceci implique que $W = U$. Par contradiction, soit $\vec{w}_0 = \alpha_0\vec{w}_1 + \beta_0\vec{w}_2 \in W$ qui n'appartient pas à U . Alors $\alpha_0[3\vec{u}_1 - \vec{u}_2] + \beta_0[4\vec{u}_1 - \vec{u}_2] =$ combinaison de $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ n'appartient pas à U : ceci est absurde.

Une base est $\{\vec{w}_1 = (1, 2, -4, 11), \vec{w}_2 = (2, 4, -5, 14)\}$.

Exercice 16. En $\mathbb{R}^4$ on considère $\vec{x}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{x}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{x}_3 = (1, 1, 1, 0)$, $\vec{x}_4 = (0, 1, 1, 0)$. On pose $U_1 = \text{Vect}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$, $U_2 = \text{Vect}\{\vec{x}_3, \vec{x}_4\}$. Chercher une base de $U_1 + U_2$. En déduire la dimension de $U_1 \cap U_2$.

Evidemment $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4\}$ génère $U_1 + U_2$, mais on voit que $\vec{x}_3 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. On peut vérifier que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ est libre. Du coup $U_1 + U_2$ est de dimension 3 et $U_1 \cap U_2$ est de dimension 1, par Grassman ($\dim(U_1) = 2 = \dim(U_2)$).

Exercice 17. Soit $F = \{1 + x + x^2 + x^3, 1 - x - x^3, 1 - x^2 - x^3, 3 - x^3\}$. Est-ce que F génère l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 ? F est une famille libre dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 7 ? Donner une base de $L(F)$.

En écrivant les éléments de S dans la base canonique on a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Par le pivot on obtient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a une colonne nulle. Donc F n'est pas génératrice. F contient 4 vecteurs et engendre un espace de dimension 3. Par conséquent F n'est pas libre, c'est-à-dire qu'il existe une

combinaison de ces quatre vecteurs égale au vecteur nul. Dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 7, le raisonnement de la combinaison serait pareil.

Les trois premiers vecteurs de M forment une base, autrement dit $\{x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + 2, x + 2\}$ est une base.

Exercice 18. Soient $\vec{v}_1 = (1, 2, -3, 4, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 3, -4, 6, 5, 4)$, $\vec{v}_3 = (3, 8, -11, 16, 10, 9)$. Ces vecteurs sont-ils libres ? Quelle est la dimension de $L(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\})$? Donner une base.

Si on écrit $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$ on trouve que le système n'est pas libre. Pour calculer le rang on applique la méthode du pivot : on trouve deux vecteurs non nuls, qui constituent une base de $L(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\})$.

Une autre méthode : S n'est pas libre, car $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$; par contre $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre, car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Par conséquent $L(S)$ est un espace de dimension 2 et $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ en est une base.

Exercice 19. Déterminer le rang de l'ensemble des quatre vecteurs suivants : $(1, -1, 2, 0)$, $(2, 1, -1, 1)$, $(0, 1, 2, 3)$, $(3, -1, -, 1)$.

Le rang est 4.