

Cours de mathématiques avancées - Magistère d'économie

TD sur les applications linéaires

1. APPLICATIONS LINÉAIRES - THÉORÈME SUR LES DIMENSIONS

Exercice 1. Soit

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x - z, 2x + y - 3z, -y + 2z)\end{aligned}$$

Trouver une base de $\text{Ker}\varphi$ et une base de $\text{Im}(\varphi)$.

$\text{Ker}(\varphi)$ est constitué seulement du vecteur $\vec{0}$. $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^3$ par le théorème sur la dimension. Par conséquent il suffit de choisir la base canonique.

Exercice 2. Soit

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) &\rightarrow (x - z, y - t, x + y - z - t, 2x + 3y - 2z - 3t)\end{aligned}$$

- (1) Trouver une base de $\text{Ker}\varphi$.
- (2) Montrer que $\{\vec{e}_1 = (1, 0, 1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 1), \vec{e}_3 = (1, 0, 2, 0), \vec{e}_4 = (0, 1, 0, 2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
- (3) Montrer que $\{\varphi(\vec{e}_3), \varphi(\vec{e}_4)\}$ est une base de $\text{Im}(\varphi)$.
- (4) φ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
- (5) Déterminer un sous-espace A de $\mathbb{R}^4$ tel que la restriction de φ à A soit injective.

- (1) $\text{Ker}(\varphi) = \{(x, y, x, y), x, y \in \mathbb{R}\}$. Une base est $(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)$ car ces deux vecteurs forment un système libre et engendrent $\text{Ker}(\varphi)$.
- (2) Il suffit de montrer que $\{\vec{e}_1 = (1, 0, 1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 1), \vec{e}_3 = (1, 0, 2, 0), \vec{e}_4 = (0, 1, 0, 2)\}$ est libre.
- (3) Le système $\{\varphi(\vec{e}_3), \varphi(\vec{e}_4)\}$ est libre.

Première méthode : $\vec{v}$ appartient à $\text{Im}(\varphi)$ ssi $\vec{v} = \varphi(\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots \alpha_4 \vec{e}_4) = \alpha_3 \varphi(\vec{e}_3) + \alpha_4 \varphi(\vec{e}_4)$.

Deuxième méthode : par le théorème du rang l'image a dimension 2, donc $\{\varphi(\vec{e}_3), \varphi(\vec{e}_4)\}$ est une base.

- (4) φ n'est pas injective car $\text{Ker}(\varphi)$ n'est pas le vecteur nul. φ n'est pas surjective car $\text{rang}(\varphi) = \dim \text{Im}(\varphi) = 2$ par le point précédent.
- (5) A peut être $L(\{\vec{e}_3, \vec{e}_4\})$. En effet : φ est injective ssi $\varphi(A)$ est libre dans $\mathbb{R}^4$. On a vu que $\{\varphi(\vec{e}_3), \varphi(\vec{e}_4)\}$ est un système libre. Par conséquent A peut être $L(\{\vec{e}_3, \vec{e}_4\})$.

Exercice 3. Dans l'espace des polynômes, on considère l'application der , de dérivation d'un polynôme.

- (1) der est-elle linéaire ?
 - (2) Trouver $\text{Im}(der)$.
 - (3) Trouver $\text{Ker}(der)$.
 - (4) Est-ce que der est un isomorphisme ?
- (1) Oui, par les propriétés de la dérivées (pas seulement sur les polynômes)
 - (2) Etant donné un polynôme, si on cherche une primitive, on trouve un autre polynôme, donc l'image est tout l'espace des polynômes.
 - (3) C'est le sous-espace des polynômes dont la dérivée est nulle, c'est-à-dire les polynômes constants.

- (4) Non, car der n'est pas injective.

Exercice 4. Dans l'espace des polynômes, on considère l'application dec , qui associe à un polynôme $P(x)$ le polynôme $P(x+1)$.

- (1) Trouver $Im(dec)$.
- (2) Trouver $Ker(dec)$.
- (3) Est-ce que dec est un isomorphisme ? Si oui, quelle est sa réciproque ?
- (1) Soit Q un polynôme. Soit $P(x)$ le polynôme $Q(x-1)$. Alors $dec(P) = Q$. Donc l'image de dec est tout l'espace des polynômes.
- (2) Il faut étudier $a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \dots + a_n(x+1)^n = 0$: ceci est vrai ssi $a_i = 0$. Donc $Ker(dec)$ = polynôme nul.
- (3) Oui : elle est surjective par le point 1) et injective par le point 2). La réciproque est $P \rightarrow P(x-1)$.

2. APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Exercice 5. En $\mathbb{R}^3$ on considère la base canonique et la seule application linéaire telle que $\varphi(e_i) = f_i$, où $\vec{f}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{f}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{f}_3 = (2, 1, 1)$.

- (1) Ecrire la matrice A de cette application linéaire.
- (2) Décrire $Im(\varphi)$, $Ker(\varphi)$.

- (1) Par l'un des théorèmes du cours $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- (2) L'image de φ est le sous-espace vectoriel $L(\{\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \varphi(\vec{e}_3)\})$, engendré par les vecteurs de F .

Si on applique la méthode du pivot on trouve trois colonnes non nulles. Donc F est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $Im(\varphi) = \mathbb{R}^3$.

Pour le Ker , il faut résoudre $AX = 0$, ce qui donne le vecteur nul.

Exercice 6. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y = 0, x - y + t + z = 0\}$.

- (1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel donné par le noyau d'une application linéaire. Exprimer la matrice correspondante à l'application linéaire.
- (2) Calculer la dimension de F .

- (1) On peut considérer $X \in \mathbb{R}^4 \rightarrow AX \in \mathbb{R}^2$, où $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (2) L'image, engendrée par les colonnes de A , a dimension 2, car les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires. Par conséquent $dim(F) = dim(\mathbb{R}^4) - dim(Im(AX)) = 4 - 2 = 2$.

Exercice 7. On considère l'application der de dérivation d'un polynôme de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 dans lui-même.

- (1) Ecrire la matrice de der dans la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.
- (2) der est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
- (3) Quelle est la dimension de $Im(der)$? Et de $Ker(der)$?

- (1) $der(1) = 0$; $der(x) = 1$; $der(x^2) = 2x$; $der(x^3) = 3x^2$. Donc la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (2) Le rang de ces vecteurs, c'est-à-dire le rang de l'image d'une base de l'espace, est 3, qui est inférieur à la dimension de l'espace. Donc der n'est pas surjective. Puisque der est un endomorphisme, der n'est pas injective.
- (3) $\dim(Im(der)) = rang A = 3$; par le théorème sur la dimension, $3 + \dim(Ker(der)) = 4 = \text{dimension de l'espace}$. Donc $\dim(Ker(der)) = 1$.

Exercice 8. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x + 2y + 3z, 2x + 4y + 6z, -x + y + 3z, 3x - 2y - 7z) \end{aligned}$$

- (1) Est-ce que φ est surjective ?
- (2) Ecrire la matrice associée à φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
- (3) Décrire $Im(\varphi)$ et calculer sa dimension.
- (4) Décrire $Ker(\varphi)$.
- (1) Non, car la dimension de l'image est au plus 3 (φ est définie dans $\mathbb{R}^3$).
- (2) C'est la matrice A dont les colonnes sont $\varphi(1, 0, 0)$, $\varphi(0, 1, 0)$, $\varphi(0, 0, 1)$.
- (3) $Im(\varphi)$ est l'espace engendré par les colonnes de A . Si on utilise la méthode du pivot sur

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

on obtient une colonne nulle :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

Une base de l'image est donnée par les vecteurs colonne non nuls de cette dernière matrice.

- (4) Par le théorème des dimensions, le Ker a dimension 1. Si on étudie $AX = 0$ on trouve $(1, -2, 1)$ comme solution et donc $\lambda(1, -2, 1)$ est la famille des vecteurs du Ker .

Exercice 9. Dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on considère l'application dec , qui associe à un polynôme $P(x)$ le polynôme $P(x+1)$.

- (1) Ecrire la matrice A de dec dans la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.
- (2) En utilisant le point précédent, calculer l'image de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$.
- (3) Montrer que la famille $\{1, 1+x, 1+2x+x^2, 1+3x+3x^2+x^3\}$ forme une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

- (1) On doit calculer $dec(1)$, $dec(x)$, $dec(x^2)$, $dec(x^3)$ ce qui donne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (2) Les coordonnées de P dans B sont $(7, 0, -3, 2)$. Il faut calculer $A(7, 0, -3, 2)^T$.
Donc $dec(P) = 6 + 3x^2 + 2x^3$.

- (3) La famille $\{1, 1+x, 1+2x+x^2; 1+3x+3x^2+x^3\}$ est l'image de la base canonique par *dec*. Nous avons déjà vu (voir exercice 4) que *dec* est un isomorphisme, donc $\{1, 1+x, 1+2x+x^2; 1+3x+3x^2+x^3\}$ est une base, car image d'une base par un isomorphisme.

Exercice 10. En $\mathbb{R}^3$, soit $\varphi(x, y, z) = A(x, y, z)^T$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. φ est-elle injective? Surjective? Donner une base de $\text{Ker}(\varphi)$ et une base de $\text{Im}(\varphi)$.

Si on étudie $AX = 0$ on trouve le vecteur nul, donc φ est injective. Par conséquent φ est surjective. Une base est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. En $\mathbb{R}^3$, soit $\varphi(x, y, z) = A(x, y, z)^T$, où $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. φ est-elle injective? Surjective? Donner une base de $\text{Ker}(\varphi)$ et une base de $\text{Im}(\varphi)$.

Si on étudie $AX = 0$ on trouve $(x, -x, 2x)$. Donc φ n'est pas injective et le Ker est de dimension 1. Par conséquent φ n'est pas surjective.

On doit trouver une base de l'image (sous-espace vectoriel de dimension 2 par le théorème de la dimension), qui est engendré par les vecteurs colonne de A . Les vecteurs $(-3, 0, -1)$ et $(1, 2, 3)$ sont libres et donc ils donnent une base de l'image.

3. MATRICES ; RETOUR SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 12. Soit $m \neq 0$. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$

- (1) Calculer $M^2 - M - 2I$. En utilisant le déterminant, déduire que M est inversible.
- (2) Exprimer M^{-1} en fonction de M et de I et finalement trouver l'expression de M^{-1} .

(3) Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

- (1) $M^2 - M - 2I = 0$ donc $M(M - I)/2 = I$. Par les propriétés du déterminant, $\det(M)\det(M - I) \neq 0$ et donc $\det(M) \neq 0$. Par conséquent M est inversible.

(2) $M^{-1} = \frac{M-I}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & m & m^2 \\ 1/m & -1 & m \\ 1/m^2 & 1/m & -1 \end{pmatrix}$

- (3) Il suffit de choisir $m = 1$.

Exercice 13. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ donnés. Calculer les solutions de $\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$ en écrivant ce système sous forme matricielle.

Ce système peut s'écrire comme $PX = (a, b, c)^T$. On remarque que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

est inversible car son déterminant est non nul. Par conséquent $X = P^{-1}(a, b, c)^T = (-b + c, a + b - c, -a + c)^T$.

Exercice 14. Résoudre le système $\begin{cases} tx - y = 2 \\ 2tx + y = 0 \\ (t+1)y = 2 \end{cases}$ en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Le rang de la matrice des coefficients A vaut 1 si et seulement si $t = 0$.

Si $t = 0$, le rang de la matrice complète M vaut 2 et donc le système n'admet pas de solutions.

Si $t \neq 0$, le rang de A est 2. Le rang de M vaut 2 si et seulement si $t = -5/2$. Dans ce cas le système admet une solution qui est $(-4/15, -4/3)$.

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. On considère $AX = (a, b, c)^T$. Montrer que soit ce système n'a aucune solution, soit il admet une infinité de solutions de la forme $\lambda(1, -1, 2) + \vec{\omega}$, où $A\vec{\omega} = (a, b, c)^T$.
Suggestion : Reprendre l'exercice 11.

On a déjà vu dans l'exercice 11 que l'image de $\varphi(x) = Ax$ a dimension 2. On a aussi vu qu'une base du Ker est $(1, -1, 2)$. Il y a donc deux cas :

- $(a, b, c)^T \notin \text{Im}(\varphi)$ ce qui implique qu'il n'y a pas de solutions.
- $(a, b, c)^T \in \text{Im}(\varphi)$.
 - Si $(a, b, c)^T = (0, 0, 0)^T$ alors X^T est colinéaire à $(1, -1, 2)$.
 - Si $(a, b, c)^T \neq (0, 0, 0)^T$ alors il existe $\vec{\omega}$ tel que $\varphi(\vec{\omega}) = (a, b, c)$ et tout vecteur de la forme $\vec{\omega} +$ vecteur du Ker est solution.

Exercice 16. Utiliser le déterminant pour montrer que $(4, -2, -2), (-1, -3, 2), (-3, 2, 2)$ sont linéairement indépendants.

Il suffit de montrer que le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les trois vecteurs ci-dessus est non nul.

Exercice 17. Soient P, M deux matrices carrées, soit P inversible. Montrer que la trace de M est égale à la trace de $P^{-1}MP$.

On sait que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Par conséquent $\text{tr}(P^{-1}MP) = \text{tr}(MPP^{-1}) = \text{tr}(M)$.

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ b-1 & b & b+1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que le déterminant de cette matrice est un multiple de ab .

On peut développer par rapport à la dernière colonne.

Exercice 19. Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que $\det(-A) = (-1)^n \det A$.

$-A = -I_n A$. Il suffit d'appliquer le théorème de Binet.

Exercice 20. Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Développer selon la première colonne ; ensuite factoriser par $(c - b)$. Résultat : $(c - b)(a - b)(a - c)$.

4. CHANGEMENT DE BASE

Exercice 21. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la base $\tilde{B} = \{(1, 0, 2), (2, 1, -1), (3, 0, 7)\}$. Ecrire les coordonnées de (x, y, z) dans cette base.

La matrice de passage de la base canonique à $\tilde{B}$ est la matrice $P_{C \rightarrow \tilde{B}}$ dont les colonnes sont les composantes des trois vecteurs de $\tilde{B}$. Pour calculer les coordonnées de (x, y, z) dans $\tilde{B}$ il faut calculer $P_{C \rightarrow \tilde{B}}^{-1}$: on obtient $\begin{pmatrix} 7 & -17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Donc les coordonnées de (x, y, z) dans $\tilde{B}$ sont données par $P_{C \rightarrow \tilde{B}}^{-1}(x, y, z)^T$.

Exercice 22. Soit E la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $F = \{\vec{f}_1 = (1, 0, 1), \vec{f}_2 = (0, 1, 1), \vec{f}_3 = (1, 1, 1)\}$. Calculer la matrice de passage de E à F et puis de F à E . Soit $X = (a, b, c)$ un vecteur exprimé dans E . L'exprimer dans F . Soit $Y = (a', b', c')$ un vecteur exprimé dans F . L'exprimer dans E .

La matrice de passage de E à F est $P_{E \rightarrow F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de F à E est $P_{F \rightarrow E}^{-1}$.

Les coordonnées de X dans F sont $P_{E \rightarrow F}^{-1}(a, b, c)^T$.

Les coordonnées de Y dans E sont $P_{E \rightarrow F}(a', b', c')^T$.

Exercice 23. En $\mathbb{R}^2$, on considère la base canonique. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\rightarrow (x_1 - 2x_2, 4x_2 - 2x_1) \end{aligned}$$

- (1) Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique.
- (2) Les vecteurs $2\vec{e}_2 - \vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ constituent une base B' de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de φ dans cette base.

- (1) Les colonnes de la matrice M sont $(1, -2)$ et $(-2, 4)$.

- (2) La matrice de φ dans la base B' est $P^{-1}MP$, où $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 24. Dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, soit φ l'application qui associe à P le polynôme $(1 - x)P'(x) - 2P(x)$.

- (1) Déterminer $\text{Ker}(\varphi), \text{Im}(\varphi)$.
- (2) Montrer que $\tilde{B} = \{1, x, x^2 - 1\}$ est une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

$\varphi(P) = 0$ ssi $(1 - x)P'(x) = 2P(x)$ ce qui donne $P = 0$ donc $\text{Ker}(\varphi)$ est le polynôme nul. Par conséquent l'image de φ est tout l'espace.

Il suffit de montrer que $\{1, x, x^2 - 1\}$ est libre (car elle est composée de trois polynômes dans un espace de dimension 3).

La matrice qui représente φ dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. La

matrice qui représente φ dans $\tilde{B}$ est $P^{-1}AP$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. DIAGONALISATION/TRIGONALISATION D'UNE MATRICE

Exercice 25. Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres.

Si λ est une valeur propre de A , alors $0 = \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I)$. Donc λ est une valeur propre de A^T .

Exercice 26. Soit M une matrice carrée. Soit λ_0 une valeur propre et supposons que $\text{Ker}(M - \lambda_0 I_n)$ ait dimension $n - r$. Montrer que le rang de $M - \lambda_0 I_n$ vaut r .

Par le théorème du rang, l'image de $M - \lambda_0 I_n$ vaut r . Ceci est la valeur du rang de $M - \lambda_0 I_n$.

Exercice 27. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 13 & -23 \\ 13 & 4 & 6 \\ -23 & 6 & 17 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- (1) $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \neq 0$.
- (2) B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car elle est symétrique.
- (3) $\det(C - \lambda I) = (5 - \lambda)(3 - \lambda)^2$. Donc 5 est une v.p. simple et 3 est double. Il faut donc aller voir si l'espace propre relatif à 3 est de dimension 2. Il se trouve que $(C - 3I)X = 0$ ssi $X = (x, x, 0)$. Donc la dimension de ce sous-espace propre est 1 et donc C n'est pas diagonalisable.

Exercice 28. Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -11 & -5 & -33 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable et trouver une matrice diagonale D et une matrice de passage P telles que $A = PDP^{-1}$

Les racines du polynôme caractéristique sont $-5, 6, 6$. On va chercher les sous-espaces propres. Pour $\lambda = -5$ on trouve $\{(0, y, 0), y \in \mathbb{R}\}$. Pour $\lambda = 6$ on trouve $x + y + 3z = 0$. Le sous-espace a donc dimension 2 et une base est $\{(0, -3, 1), (-3, 0, 1)\}$. Donc A est diagonalisable.

Alors $D = P^{-1}AP$, où

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 29. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (1) Quel est le rang de A ? En déduire que 0 est une valeur propre.
- (2) Calculer le polynôme caractéristique et déduire que A est diagonalisable.
- (3) Diagonaliser A .
- (1) Si on échelonne A on trouve une colonne nulle. Donc le rang de A est 2. Ceci implique que $X \rightarrow AX$ n'est pas surjective et par conséquent pas injective. Il existe donc un vecteur non nul dans le Ker , c'est-à-dire que $A\vec{u} = 0$ et donc 0 est une valeur propre.
Une deuxième méthode : si on échelonne A on trouve une colonne nulle. Donc le

déterminant de A est 0, autrement dit, il existe un vecteur non nul dans le Ker de A . Ceci veut dire que 0 est une valeur propre.

- (2) Le polynôme caractéristique possède trois racines simples : 0, 1, 2. Donc A est diagonalisable
- (3) Il faut chercher des vecteurs propres : pour 0 on trouve $\vec{v}_0 = (1, -1, 0)$; pour 1 on trouve $\vec{v}_1 = (0, 1, 1)$; pour 2 on trouve $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$. Donc $P^{-1}AP$ = matrice diagonale ayant sur la diagonale 0, 1, 2, P = matrice ayant comme première colonne $\vec{v}_0$, comme deuxième $\vec{v}_1$ et comme troisième $\vec{v}_2$.

Exercice 30. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique a comme racines 2 (double) et 4. E_4 a dimension 1 et un vecteur propre est $(1, 0, -1)$. Pour E_2 on trouve $x = y + z$, donc on a deux vecteurs propres : $(1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$. Alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 31. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Le polynôme caractéristique est $-(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. On va étudier la dimension de E_1 . On voit que $A - I$ a une colonne nulle et les deux autres ne sont pas proportionnelles l'une avec l'autre. Donc cette matrice a rang 2. La dimension de E_1 est la dimension du $\text{Ker}(A - I)$, égale à $3 - 2$ par le théorème du rang. Donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 32. En $\mathbb{R}^3$ on considère la base canonique. Ecrire toutes les applications linéaires non injectives telles que $T(e_1) = e_1 + e_3$, $T(e_2) = e_2$. Parmi ces applications, chercher celles avec valeur propre 2.

La matrice associée est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$. Puisque l'application est non injective, alors $\det(A) = 0$ et donc $a = c$.

On cherche alors les conditions pour lesquelles $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ a comme v.p. 2. Le polynôme caractéristique est $\lambda(1 - \lambda)(\lambda - (a + 1))$. Par conséquent $a = 1$.

Exercice 33. Dans l'espace des polynômes, on considère l'application "dérivation". Montrer que 0 est la seule valeur propre.

Pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, la dérivée est 0, donc 0 est une v.p.. Viceversa, la dérivée d'un polynôme P de degré $n \geq 1$ a degré $n - 1$ et donc on ne peut pas avoir $\text{der}(P) = \lambda P$.

Exercice 34. Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique est $(\lambda - 1)^3$. On pose $N = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

- (1) $\text{Ker} N = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = x_3\}$. On peut donc choisir $v_1 = (1, 1, 1)$.

- (2) Si on calcule N^2 on obtient $10 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. $\text{Ker} N^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. On peut donc choisir $v_2 = (1, 2, 0) \in \text{Ker} N^2 \setminus \text{Ker} N$. On remarque que $Nv_2 = 5v_1$ et donc $Av_2 = 5v_1 + v_2$.
- (3) Si on calcule N^3 on obtient la matrice nulle et donc $\text{Ker} N^3 = \mathbb{R}^3$. Il suffit donc de trouver un vecteur v_3 pour compléter v_1, v_2 en une base : $v_3 = (1, 0, 0)$ par exemple. On remarque que $Nv_3 = (1, 5, -3) = av_1 + bv_2$ pour $a = -3$ et $b = 4$ et donc $Av_3 = -3v_1 + 4v_2 + v_3$.

Alors dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ la matrice associée à l'endomorphisme est

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage est la matrice ayant comme colonnes les coordonnées de v_1, v_2, v_3 .