

Cours de mathématiques avancées - Magistère d'économie

TD sur les espaces euclidiens

Exercice 1. On considère

- (1) $\phi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_1(x, y) = \pi xy$.
- (2) $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \pi x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2$.
- (3) $\phi_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_3((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_3 y_2 + 2x_3 y_3$.
- (4) $\phi_4 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_4((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1 y_3 + 2x_1 y_1 - x_2 y_1 - 2x_3 y_3 + 7x_1 y_4$

Donner la matrice associée dans la base canonique. Donner la matrice dans les bases suivantes :

- (1) $\{(2)\}$
- (2) $\{(1, 1), (1, 2)\}$
- (3) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$
- (4) $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\}$

Dans les bases canoniques on a :

- (1) π
- (2) $\begin{pmatrix} \pi & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
- (3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- (4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(il suffit de calculer ϕ_i des vecteurs de la base canonique)

- (1) La matrice de passage est 2, donc on a $2\pi 2$
- (2) La matrice de passage est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, donc on a $P^t M P = \begin{pmatrix} \pi + 4 & \pi + 9 \\ \pi + 6 & \pi + 14 \end{pmatrix}$
- (3) La matrice de passage est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc on a $P^t M P = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
- (4) La matrice de passage est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc on a $P^t M P = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 2. On considère

- (1) $\phi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_1(x, y) = \pi xy$.
- (2) $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \pi x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2$.
- (3) $\phi_3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_3((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_3 y_2 + 2x_3 y_3$.
- (4) $\phi_4 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\phi_4((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1 y_3 + 2x_1 y_1 - x_2 y_1 - 2x_3 y_3 + 7x_1 y_4$

Dire si ces formes sont dégénérées, symétriques. Pour les formes symétriques, appliquer le critère de Sylvester, pour déterminer si elles sont définies et positives. Pour les autres utiliser la définition.

Pour dire si les ϕ_i sont dégénérées, il faut calculer le rang des matrices correspondant. Pour cela, il faut échelonner.

- (1) $\text{rang}(\phi_1) = 1$ donc ϕ_1 est non dégénérée.
- (2) $\text{rang}(\phi_2) = 2$ donc ϕ_2 est non dégénérée.
- (3) $\text{rang}(\phi_3) = 3$ donc ϕ_3 est non dégénérée.
- (4) $\text{rang}(\phi_4) = 3$ donc ϕ_4 est dégénérée.

Pour la symétrie, seulement ϕ_1, ϕ_3 sont symétriques.

Pour voir si ϕ_1, ϕ_3 sont définies et positives on applique le critère de Sylvester :

$\phi_1 : \delta_1 > 0$

$\phi_3 : \delta_1(M) = 2, \delta_2(M) = 2, \delta_3(M) = 1.$

On va étudier $\phi_2 : \phi_2((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = \pi x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_2^2 = (x_1 + x_2/2)^2 + (\pi - 1)x_1^2 + 11/4x_2^2 \geq 0$ et égal à 0 ssi $x_1 + x_2/2 = 0 = x_1 = x_2$. Du coup ϕ_2 est positive et définie.

On va étudier $\phi_4 : \phi_4((x_1, x_2, x_3, x_4), (x_1, x_2, x_3, x_4))$ n'est pas une forme positive, car il suffit de tester $(-1, 1, 0, 1)$ qui donne une valeur négative. Par ailleurs $\phi_4((0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1)) = 0$ et donc ϕ_4 n'est pas définie.

Exercice 3. Soit $\mathcal{C}([0, 1])$ l'espace vectoriel des applications continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\phi : \mathcal{C}([0, 1]) \times \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(f, g) = \int_0^1 (1+t)f(t)g(t)dt$. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Il faut vérifier la symétrie, la positivité et si ϕ est définie :

symétrie : OK

positivité : $\int_0^1 (1+t)f^2(t)$ est positif

définition : $\int_0^1 (1+t)f^2(t) = 0$ ssi $(1+t)f^2(t) = 0$ ce qui implique $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, car $1+t > 0$ sur $[0, 1]$. Donc ϕ est définie.

Exercice 4. Soit $\phi : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.

Montrer que ϕ est un produit scalaire. Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique.

ϕ est symétrique ; $\phi(P, P) \geq 0$; $\phi(P, P) = 0$ ssi $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. Un polynôme de degré 2 a au plus deux racines, donc P est constamment 0.

Il faut calculer $\phi(1, 1), \phi(1, x), \phi(1, x^2), \dots, \phi(x^2, x^2)$ ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit $\mathcal{C}([0, 1])$ l'espace vectoriel des applications continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\phi : \mathcal{C}([0, 1]) \times \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(f, g) = \int_0^1 (1+t)f(t)g(t)dt$. Les fonctions $f(t) = t+2$ et $g(t) = t^2 - 2t - 3$ sont-elles orthogonales ? La fonction f est de norme 1 ?

$\phi(f, g) = \int_0^1 (1+t)(t+2)(t^2 - 2t - 3) \neq 0$ donc f n'est pas orthogonal à g .

$\phi(f, f) = \int_0^1 (1+t)(t+2)^2 \neq 1$ donc la norme de f n'est pas 1.

Exercice 6. Soit $\phi : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$.

- (1) Montrer que ϕ est un produit scalaire.
- (2) Le sous-espace $\mathbb{R}_3[x]$, muni de la restriction de ϕ , est-il un espace euclidien ?

- (3) La base $\{1, x, x^2, x^3\}$ est-elle orthogonale ?
 (4) Déterminer tous les vecteurs de $\mathbb{R}_3[x]$ orthogonaux à x^2 .
- (1) ϕ est symétrique, définie positive.
 (2) Oui, car rien ne change à la preuve du point précédent.
 (3) $\phi(1, x^2) = \int_{-1}^1 x^2 dx \neq 0$ donc cette base n'est pas orthogonale.
 (4) $a + bx + cx^2 + dx^3$ est orthogonal à x^2 ssi $0 = \int_{-1}^1 x^2(a + bx + cx^2 + dx^3) dx = \frac{2}{3}a + \frac{2}{5}c$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, muni du produit scalaire $\phi(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$. Montrer que $F = \{1, \cos(t), \cos(2t), \dots, \sin(t), \sin(2t), \dots\}$ est une famille orthogonale.

Il suffit de vérifier que

$$\phi(\cos(nt), \cos(mt)) = 0 = \phi(\sin(nt), \sin(mt));$$

$$\phi(1, \cos(nt)) = 0 = \phi(1, \sin(nt));$$

$$\phi(\cos(nt), \sin(mt)) = 0.$$

Pour cela on utilisera les formules

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)],$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$$

Exercice 8. Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ définie, par rapport à la base canonique, par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Écrire l'expression de ϕ dans la base canonique et vérifier que ϕ est un produit scalaire.

$\phi(x, y) = x^t A y = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$. $\phi(x, x) = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2$ et donc on vérifie facilement que ϕ est positive (somme de carrés) et définie.

Exercice 9. Soit $\phi(x, y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$ définie pour tout $x, y \in \mathbb{R}^3$. Écrire la matrice de ϕ dans la base canonique et vérifier que ϕ est un produit scalaire.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est symétrique. Pour la définition et positivité, on peut utiliser le théorème de Sylvester.

Exercice 10. Soient $f_1 = (1, 0, 1)$, $f_2 = (-1, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$. Orthonormaliser cet ensemble de vecteurs en utilisant le théorème de Gram-Schmidt.

On obtient $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)$

Exercice 11. Soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (1) Montrer que R_θ est orthogonale.
 (2) Que peut-on dire des vecteurs colonnes de R_θ ?

- (3) Que représente géométriquement $X \rightarrow R_\theta X$?
- (1) Il suffit de vérifier, par calcul direct, que $R_\theta^t R_\theta = I_3$.
- (2) Ils forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
- (3) Les vecteurs colonne correspondent à l'image de la base canonique par cette application. On remarque que cela correspond à la rotation d'axe vertical Oz et angle θ des vecteurs $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ (pour cela penser aux coordonnées polaires dans le plan, car $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ restent dans le plan $z = 0$!); le vecteur $(0, 0, 1)$ est invariant.

Exercice 12. Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Soit ϕ l'application bilinéaire dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- (1) Que vaut $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$?
- (2) Montrer que M est diagonalisable.
- (3) Montrer que 1 est une valeur propre (utiliser le théorème du rang).
- (4) Quelle est l'autre valeur propre ?
- (5) Décrire les sous-espaces propres.
- (6) Trouver une base orthonormée du sous-espace propre E_1 .
- (7) Donner une base orthonormée de vecteurs propres de M .
- (8) Ecrire ϕ dans cette nouvelle base.

(1) On a $(x_1, x_2, x_3)M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \dots$

- (2) M est diagonalisable, car symétrique.
- (3) $M - I_3$ est la matrice composée par 3 donc elle est de rang 1. Par conséquent $\dim E_1 = \dim(\text{Ker}(f_M - I_3)) = 3 - \text{rang}(M - I_3) = 2$. Donc 1 est une valeur propre de multiplicité 2.
- (4) La somme des valeurs propres est la trace de M , donc $12 = 1 + 1 + \text{deuxième valeur propre}$, ce qui donne 10.
- (5) $\lambda = 1$ donne $x + y + z = 0$; $\lambda = 10$ donne $x = y = z$.
- (6) Une base orthonormée du sous-espace propre E_1 est $\{(1, 1, -2), (1, -1, 0)\}$ si on normalise ces vecteurs.
- (7) Il suffit de considérer $\sqrt{6}/6(1, 1, -2), \sqrt{2}/2(1, -1, 0), \sqrt{3}/3(1, 1, 1)$ par les points précédents.
- (8) La matrice de passage P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs précédents. Cela donne $P^t M P =$ matrice diagonale dont les termes diagonaux sont 1, 1, 10. Dans cette base, ϕ s'écrit $\phi(\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_3, \tilde{\alpha} \vec{u}_1 + \tilde{\beta} \vec{u}_2 + \tilde{\gamma} \vec{u}_3) = \alpha \tilde{\alpha} + \beta \tilde{\beta} + 10\gamma \tilde{\gamma}$.

Exercice 13. Soit ϕ l'application bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) Calculer $\phi((1, 1, 5), (-1, 2, 1))$.
- (2) Donner la signature de ϕ .
- (3) Calculer la matrice de ϕ dans la base $F = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (0, -1, 1)\}$.
- (1) $\phi((1, 1, 5), (-1, 2, 1)) = (1, 1, 5)M(-1, 2, 1)^t = 6$.

- (2) Les valeurs propres sont $-2, 1, 3$. Donc la signature est $(2, 1)$. Sinon on peut appliquer le théorème de Sylvester : $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1, \delta_3 = -6$. Dans la suite $1, 1, -1, -6$ il y a un seul changement de signe, donc la signature est $(2, 1)$.
- (3) Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base F . La matrice de ϕ dans F est $P^t M P$ ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14. Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + 56z^2 - 4xy + 14xz - 36yz$.

- (1) Montrer qu'il s'agit d'une forme quadratique.
- (2) Donner la forme polaire.
- (3) Ecrire la matrice associée à q dans la base canonique.
- (4) Donner la signature de q .
- (5) Décrire la matrice de q dans la base $B = \{\vec{u}_1 = \vec{e}_1, \vec{u}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{u}_3 = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$.
- (6) Existe-il des vecteurs $X \in \mathbb{R}^3$ non nuls tels que $q(X) = 0$?

- (1) $xx' + 6yy' + 56zz' - 2xy' - 2x'y + 7xz' + 7x'z - 18yz' - 18y'z$ réalise q .
- (2) voir point précédent, car symétrique.

- (3) On trouve $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -2 & 6 & -18 \\ 7 & -18 & 56 \end{pmatrix}$ par le point (1).

- (4) On calcule les mineurs extraits de la matrice M : on trouve $\delta_1(M) = 1, \delta_2(M) = 2, \delta_3(M) = -2$. Dans la suite $1, 1, 2, -2$ il y a un seul changement de signe ($t = 1$ selon les notations du théorème de Sylvester). Donc la signature est $(3 - t, t) = (2, 1)$.

- (5) La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice qui représente q dans

$$B \text{ est } P^t M P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (6) Dans B , q s'écrit comme $q(\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 + \gamma\vec{u}_3) = \alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2$. Pour $\alpha = \gamma = 1$ et $\beta = 0$ on obtient $1^2 + 2 \cdot 0 - 1^2 = 0$.

Exercice 15. Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3$.

- (1) Est-ce que q est définie ?
- (2) Ecrire la matrice associée à q dans la base canonique.
- (3) Diagonaliser cette matrice.
- (4) Est-ce que q est positive ?
- (5) Exprimer q dans la base des vecteurs propres, et ensuite dans la base canonique, comme somme de carrés.

- (1) q n'est pas définie, car $q(1, 1, 1) = 0$.

$$(2) M = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (3) 0 est une valeur propre (car $\det(M) = 0$) ; $3/2$ est une valeur propre double.

Des vecteurs propres orthogonaux entre eux : $1/\sqrt{3}(1, 1, 1), 1/\sqrt{2}(0, 1, -1), 1/\sqrt{6}(-2, 1, 1)$.

P est la matrice dont les colonnes sont ces trois vecteurs. L'inverse de cette matrice est sa transposée.

(4) Par le point précédent, la signature de M est $(2, 0)$. Par conséquent q est positive (mais pas définie).

(5) Dans la base des vecteurs propres précédents, q s'écrit $3/2\beta^2 + 3/2\gamma^2$.

Les coordonnées (α, β, γ) d'un vecteur (x_1, x_2, x_3) dans la base canonique sont $(\alpha, \beta, \gamma)^t = P^t(x_1, x_2, x_3)^t = (1/\sqrt{3}(x_1 + x_2 + x_3), 1/\sqrt{2}(x_2 - x_3), -1/\sqrt{6}(-2x_1 + x_2 + x_3))^t$

Par conséquent $q(x_1, x_2, x_3) = 3/4(x_2 - x_3)^2 + 1/4(-2x_1 + x_2 + x_3)^2$.

Exercice 16. Appliquer la méthode de Gauss à la forme

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 6xy + 4xz + 16yz + 4yt + 8zt.$$

Calculer la signature.

On trouve $(x + 3y + 2z)^2 + (y + z + 3t)^2 - (y - z + t)^2 - 8t^2$. Par conséquent la signature est $(2, 2)$.