

Licence 1 AES

Université Paris I – Panthéon-Sorbonne

Méthodes quantitatives appliquées aux Sciences Sociales

Travaux dirigés

Pierre Clément – Olivier Touzet

Objectif : manipuler des fonctions de demande et d'offre et rechercher le prix d'équilibre.

Exercice 1 : représenter une fonction affine – Pour chacune des **fonctions affines** suivantes :

a) donner les **coefficients** a et b de la fonction affine ;

b) calculer les **images** $f(0)$ et $f(10)$;

c) **représenter graphiquement** la fonction affine dans le repère ci-dessous.

1. $f(x) = 1,3x - 6$;

2. $f(x) = -0,9x + 5$;

3. $f(x) = 0,4x$;

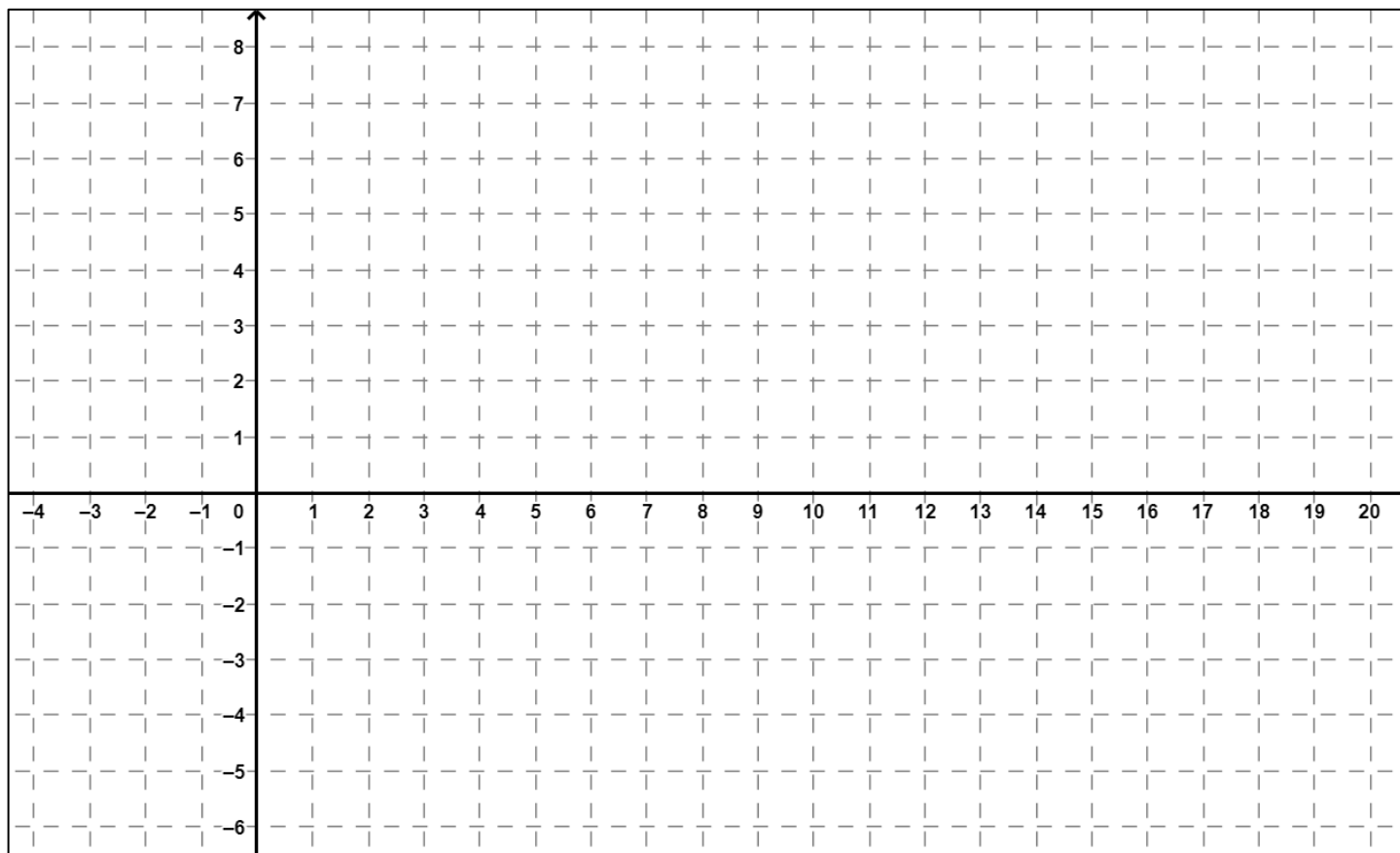
4. $f(x) = -3$.

(à représenter en rouge)

(à représenter en bleu)

(à représenter en vert)

(à représenter en noir)



Exercice 2 : résoudre une équation – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les **équations** suivantes :

a) $2,5x - 10 = 0$; b) $-3x + 15 = 0$; c) $6x - 1 = -28$; d) $-2x + 3 = 2x + 4$;

e) $x^2 = 25$; f) $3x^2 = 48$; g) $10x^2 - 90 = 0$; h) $9x^2 + 2x - 790 = x^2 + 2x + 10$.

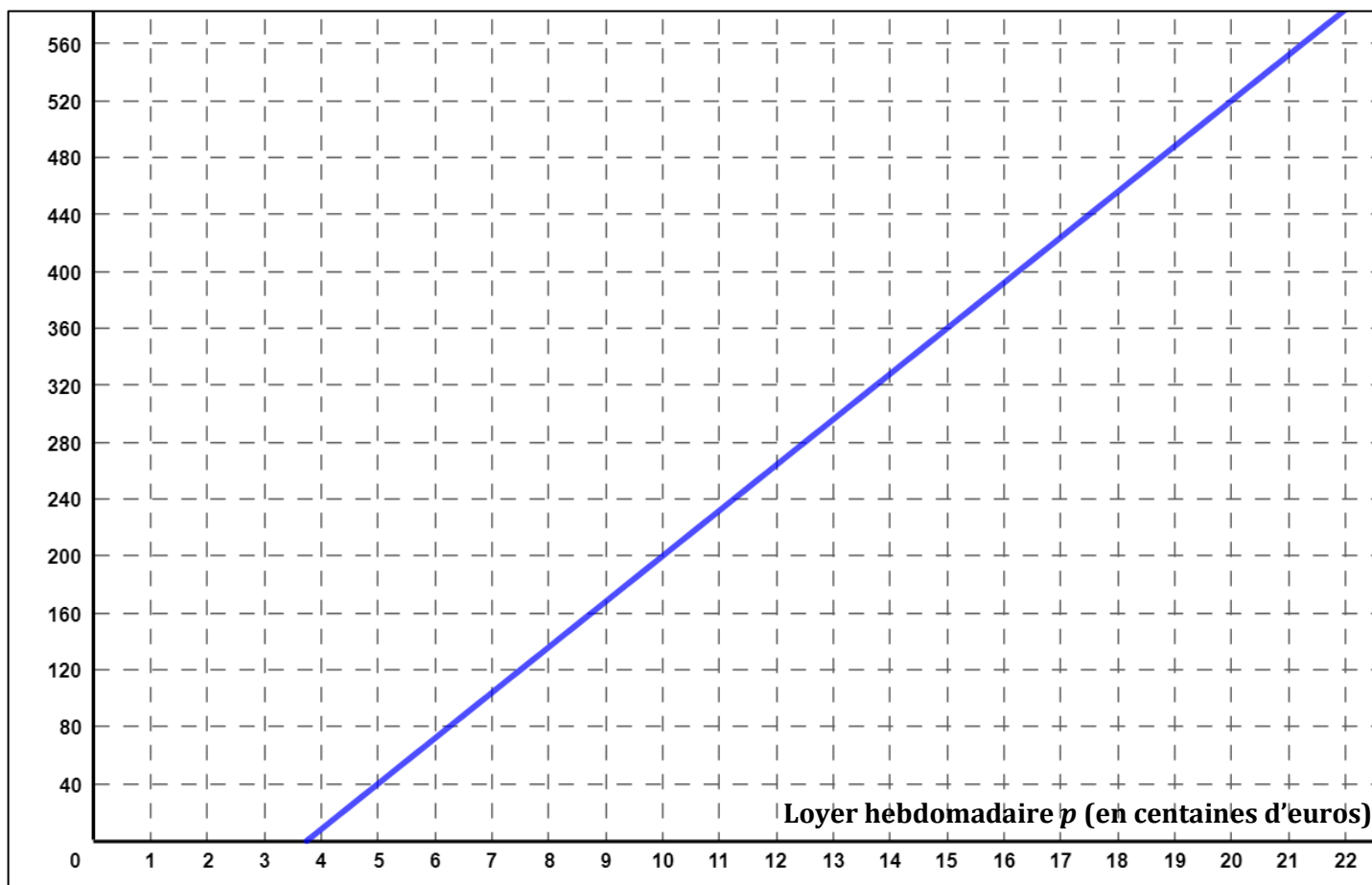
Exercice 3 : déterminer un prix d'équilibre – Une agence de voyage propose à ses clients des locations haut de gamme dans un village de vacances pour la première semaine de juillet. Tous les logements étant identiques, ils sont loués à un même prix. La **fonction de demande** D associe au loyer p (exprimé en centaines d'euros) le nombre de familles déposant un dossier de location à ce loyer. Elle est définie par la formule $D(p) = 480 - 8p$.

1. Quelle est la quantité demandée de locations lorsque le loyer hebdomadaire est fixé à 500 € ? à 1 000€ ?

2. Quelle est la nature de la fonction D ? Préciser ses coefficients a et b .

3. Tracer dans le repère page suivante la représentation graphique de la fonction D .

4. Quel est le sens de variation de la fonction D ? Interpréter dans le contexte de l'exercice.



Le nombre de logements disponibles dépend aussi du prix hebdomadaire de location. La **fonction d'offre O** associe au loyer p (en centaines d'euros) le nombre de logements disponibles à la location à ce loyer. Cette fonction est affine, et a été représentée graphiquement ci-dessus, en trait gras.

5. On répondra aux questions **suivantes graphiquement**.

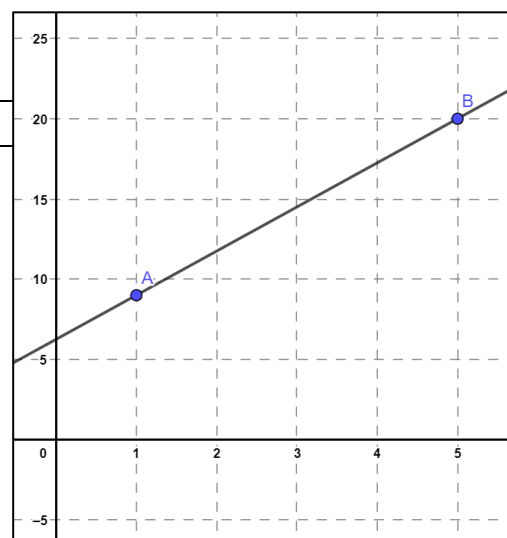
- a) Quel est le nombre de logements disponibles lorsque le loyer hebdomadaire est fixé à 1 000 € ?
- b) L'agence dispose d'un parc de 520 locations. Quel loyer hebdomadaire p a été fixé pour obtenir cette offre ?
- c) Quel est le prix d'équilibre, c'est-à-dire pour quel loyer hebdomadaire y aura-t-il autant de familles qui déposent un dossier de locations que de logements disponibles ?

6. La **fonction d'offre O** est en fait définie par la formule : $O(p) = 32p - 120$.

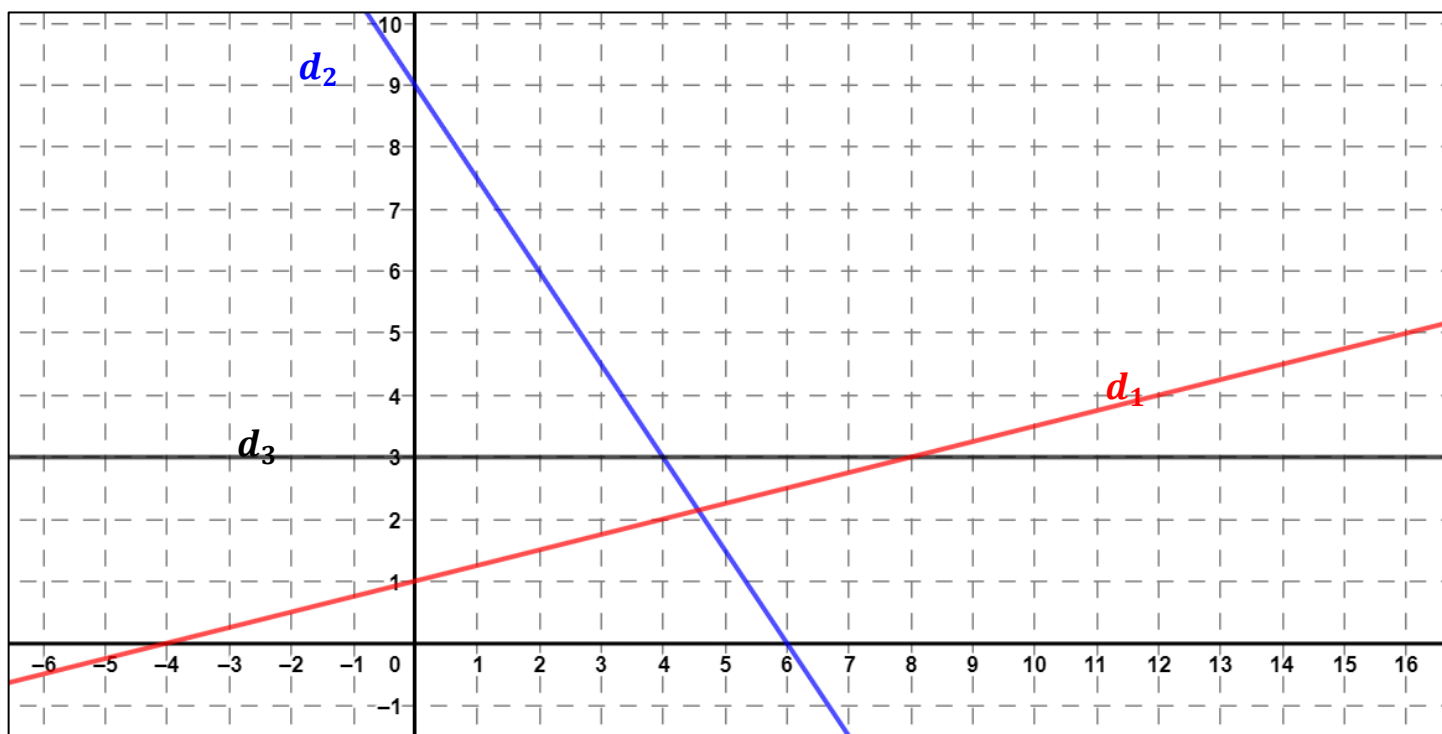
- a) Retrouver le résultat de la question 5. a) à l'aide d'un calcul.
- b) Retrouver le résultat de la question 5. b) en résolvant une équation.
- c) Retrouver la valeur du prix d'équilibre en résolvant une équation.

Objectif : déterminer un coût marginal.

Exercice 4 : appliquer la formule du coefficient directeur – Soit la droite d sécante à l'axe des ordonnées représentée ci-contre. On sait qu'elle passe par les points de coordonnées $A(1 ; 9)$ et $B(5 ; 20)$. Calculer le coefficient directeur de la droite à l'aide de la **formule du coefficient directeur**.



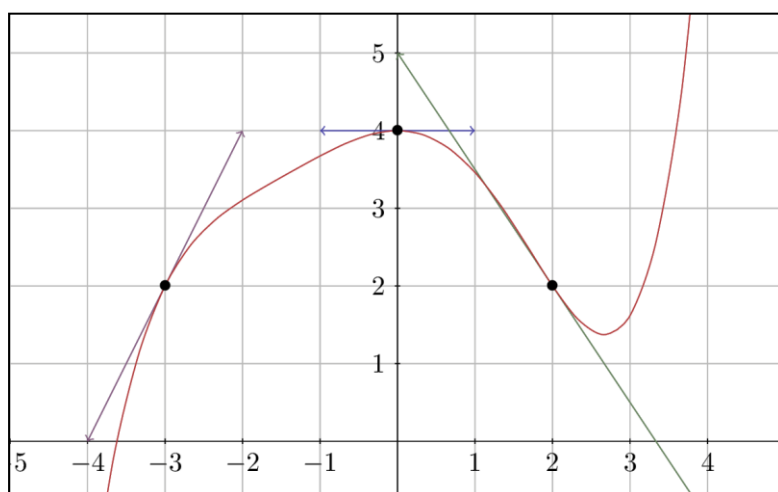
Exercice 5 : déterminer un coefficient directeur graphiquement – Pour chacune des droites d_1 , d_2 et d_3 sécantes à l'axe des ordonnées et représentées ci-dessous, déterminer graphiquement la valeur de leur coefficient directeur (« formule des deltas »).



Exercice 6 : déterminer un graphiquement un nombre dérivé – Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ représentée ci-dessous. On a tracé à l'aide de double-flèches ses tangentes aux points d'abscisses -3 ; 0 et 2 .

Déterminer graphiquement les nombres suivants :

- a) $f(2)$; b) $f'(2)$;
- c) $f(0)$; d) $f'(0)$;
- e) l'image de -3 par f ;
- f) le nombre dérivé de f en -3 .



Exercice 7 : calculer « des dérivées » et des nombres dérivés – Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'expression de sa fonction dérivée $f'(x)$ puis calculer le nombre dérivé de f en 2 , $f'(2)$.

- a) $f(x) = x^4$; b) $f(x) = 8x^5$; c) $f(x) = 3x^2 - 7x + 81$;
- d) $f(x) = 2x^3 - 10x^2 + x - 4$; e) $f(x) = 0,1x^{10}$; f) $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Exercice 8 : calculer un coût marginal – Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat à la framboise. Elle fabrique entre 0 et 800 kg de chocolat à la framboise par mois. Le coût de fabrication de ce chocolat dépend du nombre de kilogrammes de chocolat à la framboise fabriqués. On modélise le coût de fabrication par une fonction coût C définie sur $[0 ; 800]$. On a tracé ci-après la courbe représentative de la fonction C , ainsi que T , la tangente à la courbe représentative de C au point d'abscisse 500 .

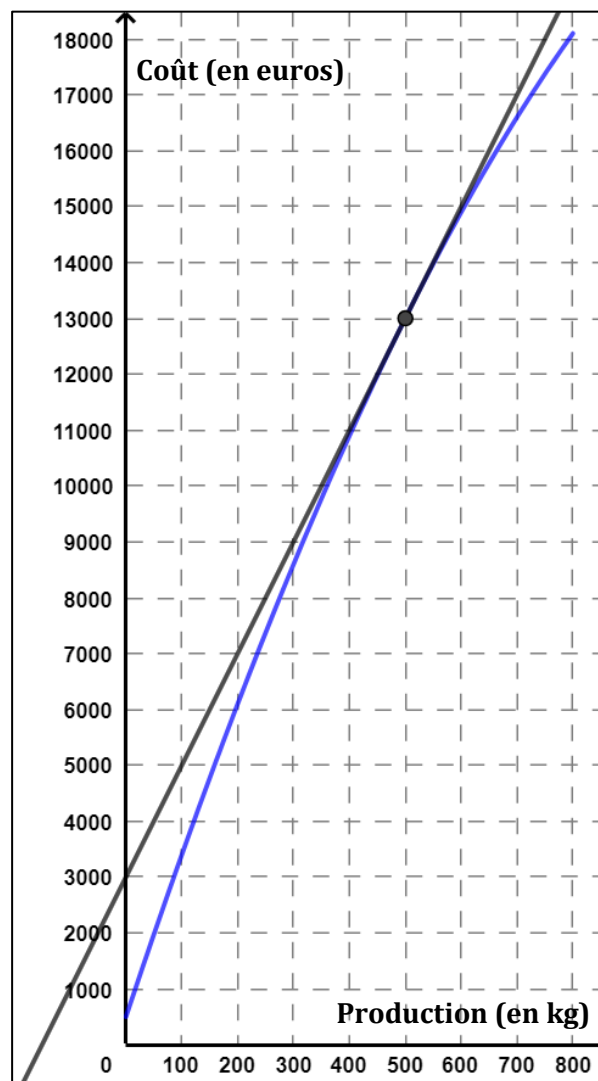
1. A l'aide de la représentation graphique ci-contre :

- a) déterminer le coût correspondant à une fabrication mensuelle de 500 kg de chocolat ;
- b) déterminer le coût marginal pour 500 kilogrammes déjà fabriqués ;
- c) interpréter le coût marginal pour 500 kg déjà fabriqués par une phrase en français.

2. La fonction C est en fait définie sur $[0 ; 800]$ par la formule : $C(x) = -0,01x^2 + 30x + 500$ où x est le nombre de kg de chocolat fabriqués par mois.

- a) Retrouver à l'aide d'un calcul le coût correspondant à une fabrication mensuelle de 500 kg de chocolat ;
- b) déterminer l'expression de $C'(x)$, où C' est la fonction dérivée de la fonction C ;
- c) retrouver par un calcul le coût marginal pour 500 kg de chocolat déjà fabriqués.

3. Calculer la différence : $C(501) - C(500)$ et comparer le résultat obtenu avec le coût marginal calculé à la question 2. c) .



Objectif : optimiser une fonction de bénéfice.

Exercice 9 : étudier le signe d'une expression – Construire le tableau de signes de chacune des expressions suivantes :

- | | | | |
|-----------------------|------------------------|----------------------|-------------------------|
| a) $4x - 3$; | b) $-2x + 8$; | c) $-10 - 5x$; | d) $-7 + 3x$; |
| e) $x^2 - 15x + 50$; | f) $2x^2 - 12x + 10$; | g) $3x^2 - 6x + 3$; | h) $-2x^2 + 8x - 100$. |

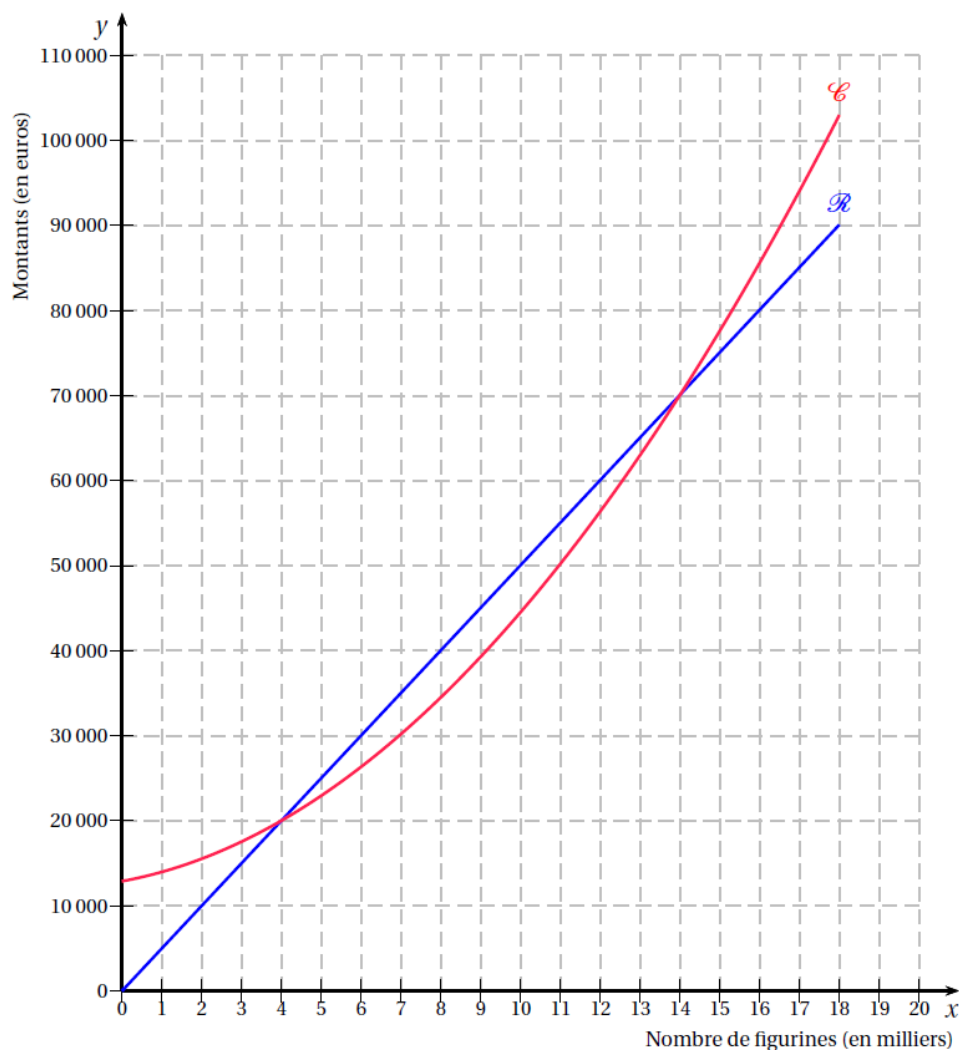
Exercice 10 : étudier les variations d'une fonction bénéfice polynôme de degré 2 – Une entreprise fabrique des petites figurines pour enfant. Pour s'assurer de la qualité de ses produits, l'entreprise ne réalise pas plus de 18 milliers de figurines par mois et on suppose que chaque figurine produite est vendue.

On note x le nombre de milliers de figurines vendues par mois, avec x appartenant à l'intervalle $[0 ; 18]$.

Partie A – Lectures graphiques.

On a représenté sur le graphique ci-dessous le chiffre d'affaires mensuel et le coût de production mensuel en fonction du nombre de milliers de figurines produites. La courbe C représente le coût de production et la courbe $\mathcal{R}$ le chiffre d'affaires mensuel. A l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :

- 1. Quel est le montant du chiffre d'affaires mensuel obtenu pour 10 milliers de figurines vendues ?
- 2. Donner sous forme d'intervalle le nombre de milliers de figurines vendues pour lequel l'entreprise réalise des profits.



Partie B – Etude du bénéfice mensuel.

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 18]$, on note $C(x)$ les coûts mensuels de l'entreprise en euros. On a $C(x) = 230x^2 + 860x + 12\,880$. Chaque figurine est vendue 5 euros. On note alors $R(x)$ la recette mensuelle de l'entreprise et $B(x)$ la fonction bénéfice de l'entreprise.

3. Donner l'expression de $R(x)$ puis prouver que $B(x) = -230x^2 + 4\,140x - 12\,880$.

4. a) Construire le tableau de signes de $B(x)$.

b) En déduire les nombres de figurines produites pour lesquels le bénéfice est nul.

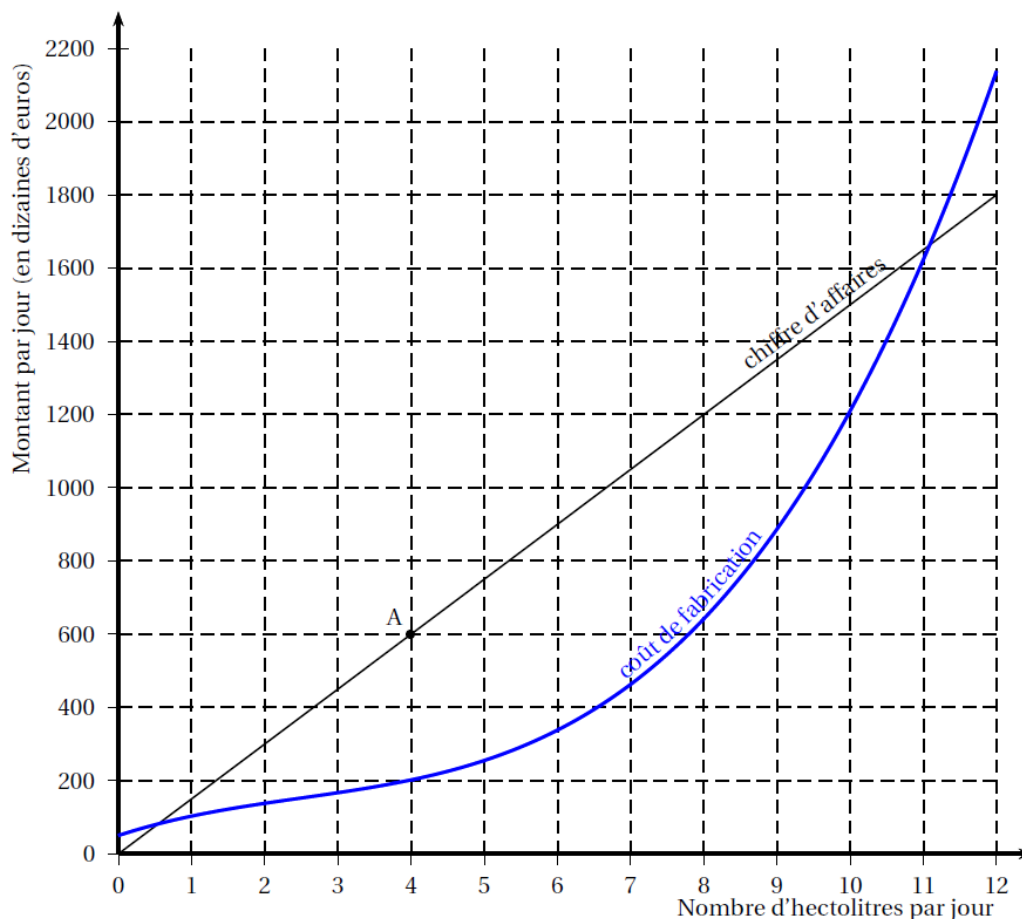
c) Vérifier que le tableau obtenu est cohérent avec votre réponse à la question 2.

5. a) Calculer $B'(x)$ pour x appartenant à $[0 ; 18]$.

b) Etudier le signe de $B'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0 ; 18]$.

c) Combien l'entreprise doit-elle vendre de figurines pour que le bénéfice soit maximal ? Quel est le montant de ce bénéfice maximal ?

Exercice 11 : étudier les variations d'une fonction bénéfice polynôme de degré 3 – Une entreprise fabrique et vend un produit désinfectant liquide. Chaque jour, elle fabrique x hectolitres de désinfectant, avec x compris entre 0 et 12. On considère que l'entreprise vend toute sa production. Le coût de fabrication en dizaine d'euros de x hectolitres de ce produit est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; 12]$. Le chiffre d'affaires pour la vente de x hectolitres de produit est $R(x)$, exprimé en dizaine d'euros. Dans un repère orthogonal du plan, on a tracé les représentations graphiques des fonctions



Partie A – Observation des courbes.

1. La représentation graphique de la fonction R est une droite qui passe par l'origine du repère et par le point A de coordonnées $(4 ; 600)$. Retrouver à l'aide de ces informations le prix de vente d'un hectolitre de désinfectant.
2. Quel est le bénéfice réalisé par l'entreprise pour la vente de 4 hectolitres de produit désinfectant ?
3. Ce bénéfice pour la vente de 4 hectolitres semble-t-il maximal ? Vous justifierez votre réponse par une observation graphique.

Partie B – Etude du bénéfice journalier.

On note B la fonction qui modélise le bénéfice de l'entreprise en fonction du nombre d'hectolitres de désinfectant vendus. Pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 12]$, on a : $B(x) = -2x^3 + 15x^2 + 84x - 50$.

4. On note B' la fonction dérivée de la fonction B . Calculer $B'(x)$.
5. Etudier le signe de $B'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0 ; 12]$.
6. Combien l'entreprise doit-elle vendre de litres de désinfectant pour que le bénéfice soit maximal ? Quel est le montant de ce bénéfice maximal ?

Objectif : optimiser un coût moyen.

Exercice 12 : appliquer la formule de la dérivée d'un quotient – Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une expression de $f'(x)$ en simplifiant au maximum.

a) $f(x) = \frac{5x^2 + 6}{x}$;

b) $f(x) = \frac{10x^3 - 5x}{2x}$;

c) $f(x) = \frac{4x - 8}{2x - 10}$.

Exercice 13 : optimiser une fonction de coût moyen – Une entreprise peut produire quotidiennement entre 1 et 20 tonnes de peinture. Le coût de production en milliers d’euros de x tonnes de peinture est modélisé par la fonction C définie sur l’intervalle $[1 ; 20]$ par $C(x) = 0,05x^2 - 0,1x + 2,45$.

Pour une production de x tonnes de peinture, on appelle coût moyen C_M le coût $C_M(x)$ auquel revient alors la production d’une tonne de peinture. On remarque que la fonction a pour nom « C_M ».

1. Calculer le coût moyen de production d’une tonne de peinture lorsque l’entreprise produit 10 tonnes de peinture.

2. Justifier que pour x appartenant à l’intervalle $[1 ; 20]$, on a :

$$C_M(x) = \frac{0,05x^2 - 0,1x + 2,45}{x}.$$

3. On note C'_M la dérivée de C_M . Démontrer que pour tout réel x de l’intervalle $[1 ; 20]$:

$$C'_M(x) = \frac{0,05x^2 - 2,45}{x^2}.$$

4. a) Construire le tableau de signes de l’expression $0,05x^2 - 2,45$ sur $\mathbb{R}$.

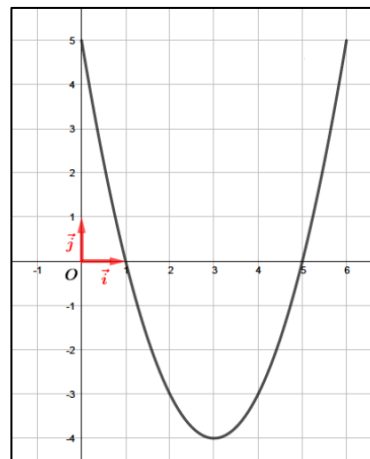
b) En déduire le signe de $C'_M(x)$ sur l’intervalle $[1 ; 20]$ puis le tableau de variations de la fonction C_M sur $[1 ; 20]$.

c) Préciser la quantité de peinture que doit produire l’entreprise pour que le coût moyen soit minimal. Quel est ce coût moyen minimal ?

5. Une propriété mathématique énonce : « le coût moyen est minimal lorsqu’il est égal au coût marginal ».

a) Déterminer l’expression de la fonction coût marginal, notée $C_m(x)$.

b) Vérifier que la propriété mathématique mentionnée est correcte dans le cas présent.



Objectif : étudier la convexité d’une courbe d’indifférence.

Exercice 14 – On considère une fonction f définie sur $[0 ; 6]$ et deux fois dérivable. On donne ci-contre la courbe représentative de f'' , la dérivée seconde de f , dans un repère orthonormé du plan.

Etudier la convexité de la fonction f à l’aide d’un tableau de convexité.

Exercice 15 – Pour chacune des fonctions suivantes, donner l’expression de sa dérivée seconde $f''(x)$ puis construire le tableau de convexité de la fonction f .

a) $f(x) = 5x^2 + 2x - 5$;

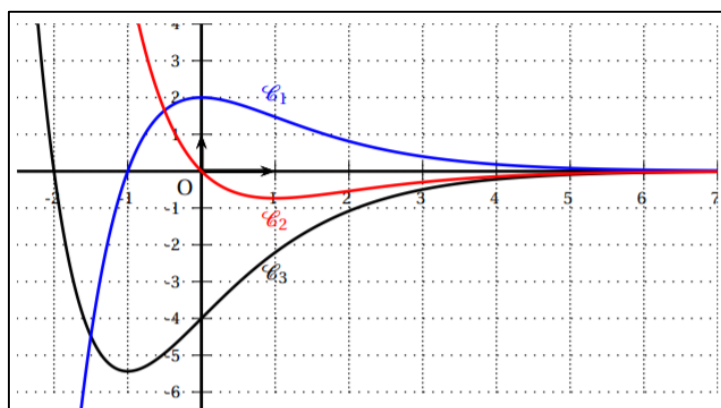
b) $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 13x + 9$;

c) $f(x) = -x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x \dots$

Exercice 16 – On s’intéresse dans cet exercice à une fonction f , définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.

On a représenté ci-contre la courbe de la fonction f , la courbe de sa fonction dérivée f' et enfin la courbe de sa dérivée seconde f'' .

En argumentant votre réponse et à l’aide de lectures graphiques, déterminer parmi les trois courbes C_1 , C_2 et C_3 laquelle représente f , f' et f'' .



Exercice 17 : dérivation de fonctions puissances non entières ou positives – Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'expression de sa fonction dérivée $f'(x)$.

a) $f(x) = x^{2,5}$;

b) $f(x) = 4x^{0,4} + 8$;

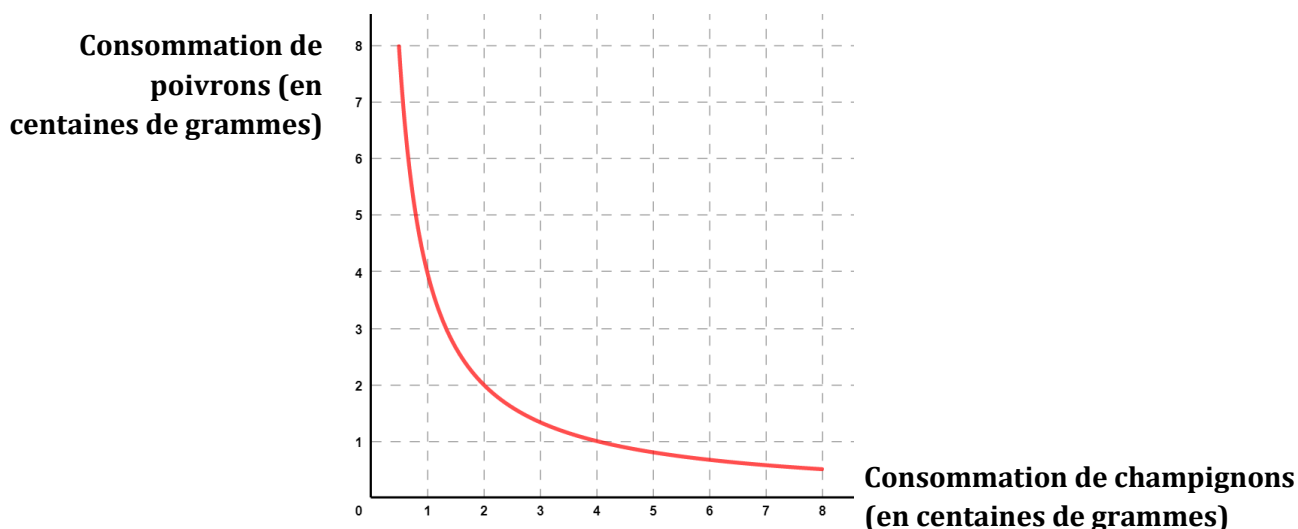
c) $f(x) = x^{-2}$;

d) $f(x) = 10 \times x^{-1,5}$;

e) $f(x) = \frac{8}{x^3}$;

f) $f(x) = \frac{-5}{x^{0,5}}$.

Exercice 18 : étude de préférences convexes du consommateur – La courbe d'indifférence d'un consommateur est représentée ci-dessous. L'axe des abscisses représente la consommation x_1 de champignons (bien 1) exprimée en centaines de grammes et l'axe des ordonnées représente la consommation x_2 de poivrons (bien 2) exprimée aussi en centaines de grammes.



1. a) Donner deux paniers $(x_1 ; x_2)$ avec x_1 et x_2 entiers pour lesquels le consommateur aura la même préférence, c'est-à-dire entre lesquels le consommateur sera indifférent.

b) Interpréter le résultat obtenu à la question a) à l'aide d'une phrase dans le contexte de l'énoncé.

2. a) On admet que la courbe d'indifférence est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par :

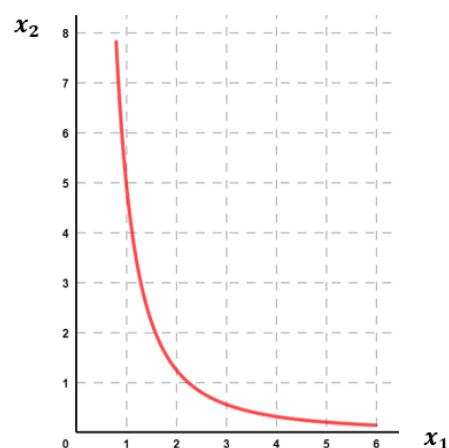
$f(x) = \frac{4}{x}$. Démontrer que la courbe d'indifférence est la représentation graphique d'une fonction convexe.

b) On dit que le consommateur a des préférences convexes : interpréter ce résultat au regard des deux paniers étudiés à la question 1.

Exercice 19 : étude de préférences convexes du consommateur – La courbe d'indifférence d'un consommateur est représentée ci-contre. Les deux axes représentent la consommation de biens 1 et 2 d'un individu. On admet que la courbe d'indifférence est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5}{x^2}.$$

Démontrer que la courbe d'indifférence est la représentation graphique d'une fonction convexe.

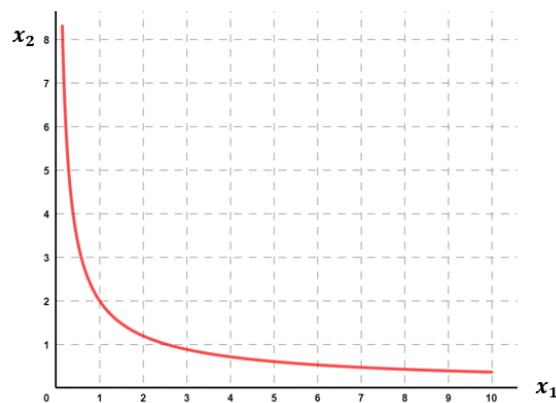


Exercice 20 : étude de préférences convexes du consommateur –

La courbe d'indifférence d'un consommateur est représentée ci-dessous. Les deux axes représentent la consommation de biens 1 et 2 d'un individu. On admet que la courbe d'indifférence est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x^{0,75}}.$$

Démontrer que la courbe d'indifférence est la représentation graphique d'une fonction convexe.

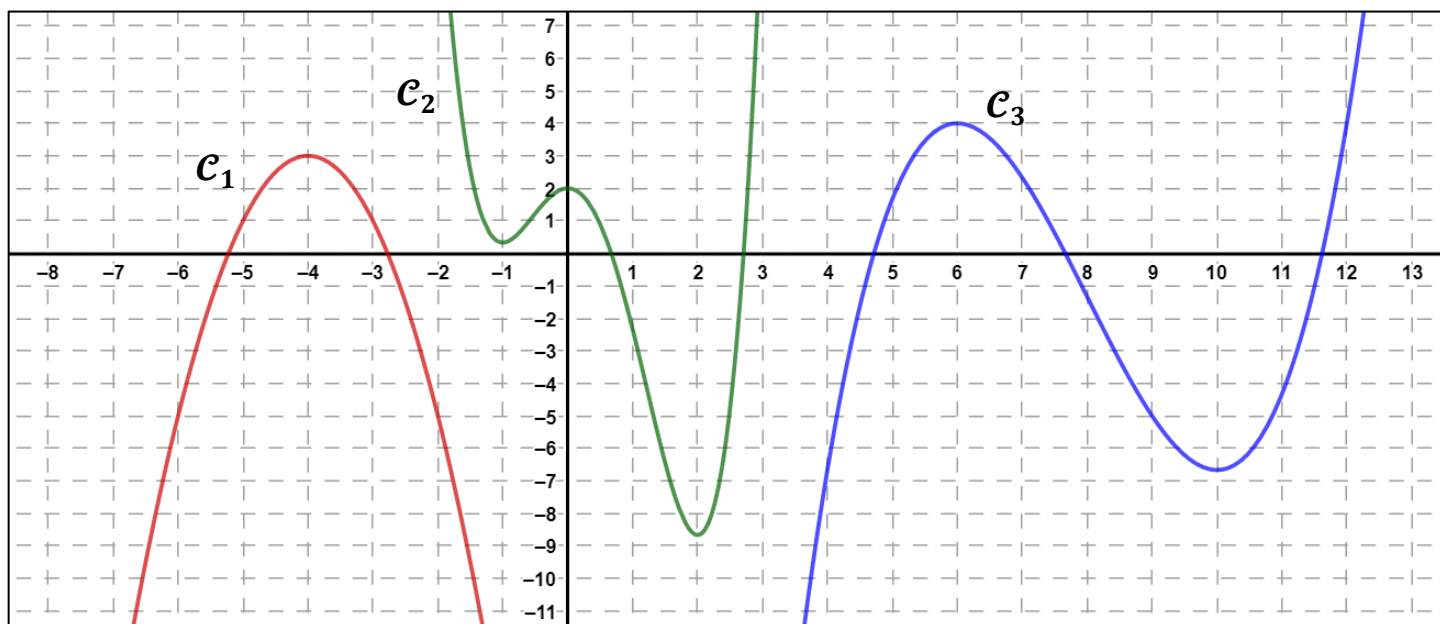
**Exercice 21 : récapitulatif des méthodes mathématiques –** Pour chacune des fonctions suivantes :

- donner l'expression de sa fonction dérivée et construire le tableau de variations de la fonction sur $\mathbb{R}$;
- donner l'expression de la dérivée seconde et étudier la convexité de la fonction sur $\mathbb{R}$;
- associer à la fonction sa courbe dans le repère ci-dessous.

a) $f(x) = -2x^2 - 16x - 29$;

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 60x - 140$;

c) $h(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 2$.



Objectif : manipuler une production dépendant de deux variables et l'optimiser sous contrainte

Exercice 22 : calculer des images par une fonction à deux variables – On considère la fonction f à deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x ; y) = 10x^2 + 5x - 9y^2 - 3y + 4xy + 7$.

- Calculer les images suivantes : a) $f(2 ; 4)$; b) $f(10 ; -1)$; c) $f(-2 ; -4)$.
- Déterminer un couple $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : a) $f(x ; y) = 7$; b) $f(x ; y) = 14$.

Exercice 23 : calculer des images par une fonction à deux variables – On considère la fonction f à deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x ; y) = 4x^2y^2$.

- Calculer les images suivantes : a) $f(3 ; 2)$; b) $f(-1 ; 4)$; c) $f(-5 ; -3)$.
- Déterminer deux couples de nombres $(x ; y)$ tels que : $f(x ; y) = 4$.

Exercice 24 : manipuler les formules sur les puissances – Appliquer les formules du cours sur les puissances à chacune des expressions suivantes.

a) $a^6 \times a^7$; b) $a^2 \times a^9 \times a^3$; c) $\frac{a^{12}}{a^3}$; d) $\frac{a \times a^4}{a^3}$; e) $\frac{a^{20} \times a^7 \times a^3}{a^5 \times a^8}$;
 f) $(a \times b)^2$; g) $(a \times b)^6$; h) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$; i) $(a \times b)^4 \times (a \times b)^3$.

Exercice 25 : factoriser des expressions algébriques – Factoriser les expressions algébriques suivantes.

a) $3a + 4a^2$; b) $5ab - 2b^2$; c) $10a^2 + 3a^2b$; d) $5a^2b - 7ab$;
 e) $a^2b + 8a^2b^2$; f) $t^2x^2 + t^2y^2$; g) $t^3x^3 + 2t^3y^3$; h) $5t^4x^4 - 10t^4y^4$.

Exercice 26 : déterminer le degré d'homogénéité d'une fonction homogène – Dans chacun des cas suivants, déterminer le degré d'homogénéité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ considérée.

a) $f(x; y) = 3xy$; b) $f(x; y) = 4x^3y^2$; c) $f(x; y) = 5x^2 + 3y^2$; d) $f(x; y) = x^3 + xy^2$.

Exercice 27 : déterminer le degré d'homogénéité d'une fonction homogène – Dans chacun des cas suivants, déterminer le degré d'homogénéité de la fonction f à deux variables réelles strictement positives.

a) $f(x; y) = 2\sqrt{xy}$; b) $f(x; y) = 5x^{0,2}y^{0,8}$; c) $f(x; y) = 3x^{0,6} + 4y^{0,6}$; d) $f(x; y) = \frac{5x^{1,5}}{2y^{0,5}}$.

Exercice 28 : optimisation sous contrainte – Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 3xy + 4x - 4y$.
 On veut déterminer la valeur minimale de $f(x, y)$ lorsqu'on fixe la contrainte : $y = 4$.

1. Déterminer l'expression de $\tilde{f}(x)$, la fonction « associée à f sous la contrainte fixée ».
2. Construire le tableau de variations de la fonction $\tilde{f}(x)$.
3. Répondre au problème initialement posé.

Exercice 29 : optimisation sous contrainte – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = -5x^2y^2 - 4x^2 + 30y^2 + 4xy - 5x + 12y + 26.$$

Déterminer la valeur maximale de $f(x, y)$ lorsqu'on fixe la contrainte : $x = 3$.

Exercice 30 : optimiser une fonction de production à deux variables sous contrainte – On considère une production, désignée par la lettre Q , dépendant du capital apporté, qu'on appellera K , et de la quantité de travail fournie, qu'on appellera L .

La production Q se calcule à l'aide de la formule : $Q = 36KL - 3K^2 - 2L^2$.

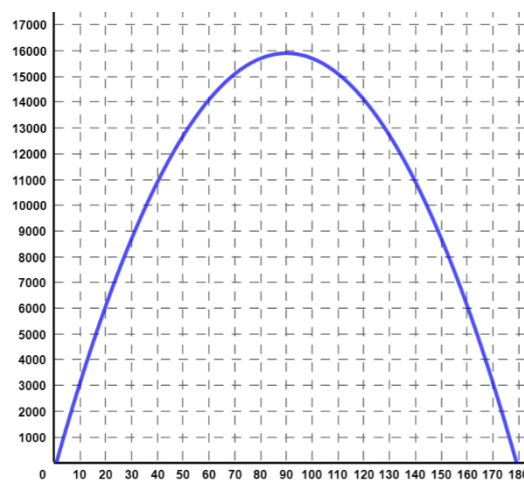
Comme Q dépend des variables K et L , on notera : $Q = f(K; L)$ avec $f(K; L) = 36KL - 3K^2 - 2L^2$.

1. Quelle est la valeur de la production pour un capital égal à $K = 10$ et une quantité de travail égale à $L = 5$?
2. Calculer $f(8; 12)$ et interpréter le résultat par une phrase en français utilisant les mots « production », « quantité de travail » et « capital »
3. Déterminer un couple de valeurs qu'on pourrait donner à K et L pour que la production Q soit égale à 31.
4. Démontrer que la fonction f est homogène de degré 2 et interpréter le résultat.
5. On décide alors de se fixer un niveau de capital égal à 10 : $K = 10$.
 a) Avec cette contrainte, la production Q sera-t-elle plus élevée avec une quantité de travail L égale à 50 ou à 80 ?

b) Donner l'expression de $\tilde{f}(L)$, la fonction « associée à f sous la contrainte fixée » de la variable L .

c) Construire le tableau de variations de la fonction $\tilde{f}$.

d) Pour quelle quantité de travail la production sera-t-elle maximale sous la contrainte fixée ? Quelle est la valeur de cette production maximale ? Pour vérifier vos résultats, on a tracé ci-contre la courbe de la fonction $\tilde{f}$.



Objectif : optimiser une utilité sous une contrainte budgétaire.

Exercice 31 : dériver un produit – Pour chacune des fonctions de la variable réelle f suivantes,

a) dériver $f(x)$ en appliquant la formule de la dérivée d'un produit : on développera l'expression de $f'(x)$;

b) développer l'expression de $f(x)$ à l'aide de la double distributivité ;

c) dériver l'expression développée de $f(x)$ et vérifier que l résultat est cohérent avec celui de la question **a**).

1. $f(x) = (2x + 3) \times (5 - 4x)$; 2. $f(x) = (3x^2 - 7) \times (2x^3 - 2)$; 3. $f(x) = x^3 \times (2x^2 + 3)$.

Exercice 32 : dériver une fonction de la forme u^n – Déterminer l'expression de la dérivée $f'(x)$ de chacune des fonctions suivantes. Il n'est pas demandé de développer l'expression de $f'(x)$.

a) $f(x) = (5x^2 + 4)^3$; **b)** $f(x) = (5x^4 + 10x^2)^6$; **c)** $f(x) = \frac{1}{(2x^2 + 3x + 1)^4}$.

Exercice 33 : utiliser simultanément les formules des deux exercices précédents – Déterminer l'expression de la dérivée $f'(x)$ de chacune des fonctions suivantes. Il n'est demandé de développer ni l'expression de $f(x)$ ni celle de $f'(x)$, ni de simplifier l'expression de $f'(x)$.

a) $f(x) = x^2 \times (2x + 1)^3$; **b)** $f(x) = 3x^4 \times (6 - 2x^2)^5$; **c)** $f(x) = (4x^3 + 2)^5 \times (9 - 3x)^3$.

Exercice 34 : construire le tableau de signe d'un produit – A l'aide du tableau de signes d'un produit, déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ des expressions algébriques suivantes :

a) $(4x + 10) \times (6 - 3x)$; **b)** $(-2x + 14) \times (-10x - 120)$; **c)** $x \times (8x - 56)$;
d) $-3x \times (2x + 5)$; **e)** $(-2,5x + 15) \times (-3x^2 + 9x + 12)$; **f)** $(2x^2 - 12x + 10) \times (x^2 + 1)$.

Exercice 35 : manipuler une fonction d'utilité et l'optimiser sous contrainte budgétaire – Un consommateur dispose d'un revenu $R = 60\text{€}$ pour acheter deux biens en quantités respectives x_1 et x_2 . Le prix du bien 1 est de 8€ par unité tandis que le prix du bien 2 est de 4€ par unité.

La fonction d'utilité du consommateur est donnée par la formule $U(x_1 ; x_2) = x_1 \times x_2^2$. Le consommateur se fixe comme contrainte budgétaire d'utiliser tout son budget.

1. **a)** Montrer que le panier (3 ; 9) respecte la contrainte budgétaire du consommateur.

b) Calculer l'utilité de ce panier.

2. **a)** Montrer que le panier (4 ; 7) respecte également la contrainte budgétaire du consommateur.

b) Le consommateur va-t-il préférer le panier (3 ; 9) ou le panier (4 ; 7) ? Justifier votre réponse.

3. a) Transcrire la contrainte budgétaire sous la forme d'une égalité.

b) Justifier que, lorsque la contrainte budgétaire est respectée, le bien 1 est dans une quantité comprise entre 0 unité et 7,5 unités.

c) Exprimer x_2 en fonction de x_1 lorsque la contrainte budgétaire est respectée.

4. On veut déterminer le(s) panier(s) préférés du consommateur sous la contrainte budgétaire.

Pour cela, il faut maximiser la fonction d'utilité $U(x_1 ; x_2)$ sous la contrainte énoncée à la question 3.

a) Justifier que $\tilde{U}(x_1)$, la fonction « associée à U sous la contrainte fixée » de la variable x_1 , a pour expression : $\tilde{U}(x_1) = x_1 \times (15 - 2x_1)^2$.

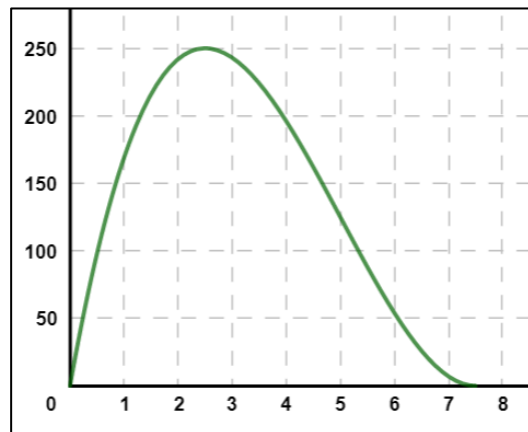
b) On admet que la fonction $\tilde{U}$ a pour dérivée :

$$\tilde{U}'(x_1) = (15 - 2x_1) \times (15 - 6x_1).$$

Etudier le signe de $\tilde{U}'(x_1)$ et en déduire les variations de $\tilde{U}(x_1)$ sur l'intervalle $[0 ; 7,5]$.

c) Pour quel(s) panier(s) l'utilité du consommateur est-elle maximale sous la contrainte budgétaire ? Quelle est alors cette utilité maximale ?

On a tracé ci-contre la courbe de $\tilde{U}$ pour vérifier votre résultat.



Exercice 36 : manipuler une fonction d'utilité et l'optimiser sous contrainte budgétaire – Un consommateur dispose d'un revenu $R = 12$ € pour acheter deux biens en quantités respectives x_1 et x_2 . Le prix du bien 1 est de 4€ par unité tandis que le prix du bien 2 est de 2€ par unité. La fonction d'utilité du consommateur est donnée par la formule $U(x_1 ; x_2) = x_1^{0,2} \times x_2^{0,8}$. Le consommateur se fixe comme contrainte d'utiliser tout son budget.

1. a) Montrer que le panier (1 ; 4) respecte la contrainte budgétaire du consommateur.

b) Calculer l'utilité de ce panier : vous arrondirez le résultat au centième.

2. a) Montrer que le panier (0,5 ; 5) respecte également la contrainte budgétaire du consommateur.

b) Le consommateur va-t-il préférer le panier (1 ; 4) ou le panier (0,5 ; 5) ? Justifier votre réponse.

3. a) Transcrire la contrainte budgétaire sous la forme d'une égalité.

b) Justifier que, lorsque la contrainte budgétaire est respectée, le bien 1 est dans une quantité comprise entre 0 unité et 3 unités.

c) Exprimer x_2 en fonction de x_1 lorsque la contrainte budgétaire est respectée.

4. On veut déterminer le(s) panier(s) préférés du consommateur sous la contrainte budgétaire.

Pour cela, il faut maximiser la fonction d'utilité $U(x_1 ; x_2)$ sous la contrainte énoncée à la question 3.

a) Justifier que $\tilde{U}(x_1)$, la fonction « associée à U sous la contrainte fixée » de la variable x_1 , a pour expression :

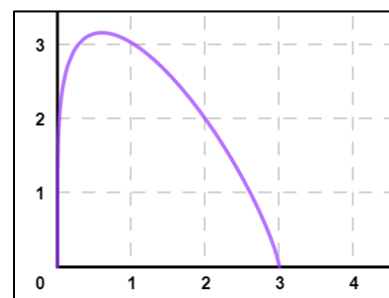
$$\tilde{U}(x_1) = x_1^{0,2} \times (6 - 2x_1)^{0,8}.$$

b) On admet que $\tilde{U}$ a pour dérivée :

$$\tilde{U}'(x_1) = \frac{1,2 - 2x_1}{x_1^{0,8} \times (6 - 2x_1)^{0,2}}$$

et que $(6 - 2x_1)^{0,2}$ est positif sur $[0 ; 3]$. Etudier le signe de $\tilde{U}'(x_1)$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$ et en déduire les variations de $\tilde{U}(x_1)$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

c) Pour quel(s) panier(s) l'utilité du consommateur est-elle maximale sous la contrainte budgétaire ? Quelle est alors cette utilité maximale ?



Objectif : calculer des productivités marginales et interpréter.

Exercice 37 : calculer des dérivées partielles – Pour chacune des fonctions à deux variables f suivantes, déterminer les deux dérivées partielles d'ordre 1 : $f'_1(x ; y)$ et $f'_2(x ; y)$. La formule de dérivation d'un produit ou d'un quotient n'est pas attendu : on réécrira si besoin l'expression de la fonction f avant de la dériver.

- a) $f(x ; y) = 3x^2 + 5y^3$; b) $f(x ; y) = 4x^3 + 6x - 7y^4$; c) $f(x ; y) = \frac{3}{x^2} + \frac{4}{y^3} + 10$;
d) $f(x ; y) = 4x^2y^3$; e) $f(x ; y) = 6x^3y^5 - 3xy^2 + 8$; f) $f(x ; y) = 10x^{0,2}y^{0,8}$;
g) $f(x ; y) = \frac{5x^3}{y^4}$; h) $f(x ; y) = \frac{10}{x^2y^5}$; i) $f(x ; y) = \frac{8x^{1,4}}{y^{0,4}}$.

Exercice 38 : calculer des dérivées partielles avec la formule de la dérivée d'un produit – Pour chacune des fonctions à deux variables f suivantes, déterminer les deux dérivées partielles d'ordre 1 : $f'_1(x ; y)$ et $f'_2(x ; y)$. On ne développera pas l'expression de $f(x ; y)$ ni celle des dérivées partielles.

- a) $f(x ; y) = 4x \times (5x - 2y)$; b) $f(x ; y) = 7y^2(8x^3 - 3y^2)$; c) $f(x ; y) = (7x^4 + 2y) \times (3x - 5y^3)$.

Exercice 39 : calculer des dérivées partielles avec la formule de la dérivée d'un quotient – Pour chacune des fonctions à deux variables f suivantes, déterminer les deux dérivées partielles d'ordre 1 : $f'_1(x ; y)$ et $f'_2(x ; y)$. On ne développera pas l'expression de $f(x ; y)$ ni celle des dérivées partielles.

- a) $f(x ; y) = \frac{5x}{4x - 2y}$; b) $f(x ; y) = \frac{8y^2}{3x^2 + 2y^4}$; c) $f(x ; y) = \frac{3x^3 - 6y^2}{4x^5 + 5y^4}$.

Exercice 40 : calculer des productivités marginales et interpréter – On considère une production, désignée par la lettre Q , dépendant du capital apporté, qu'on appellera K , et de la quantité de travail fournie, qu'on appellera L . La production Q se calcule à l'aide d'une fonction à deux variables : $Q = f(K ; L)$. Dans chaque cas :

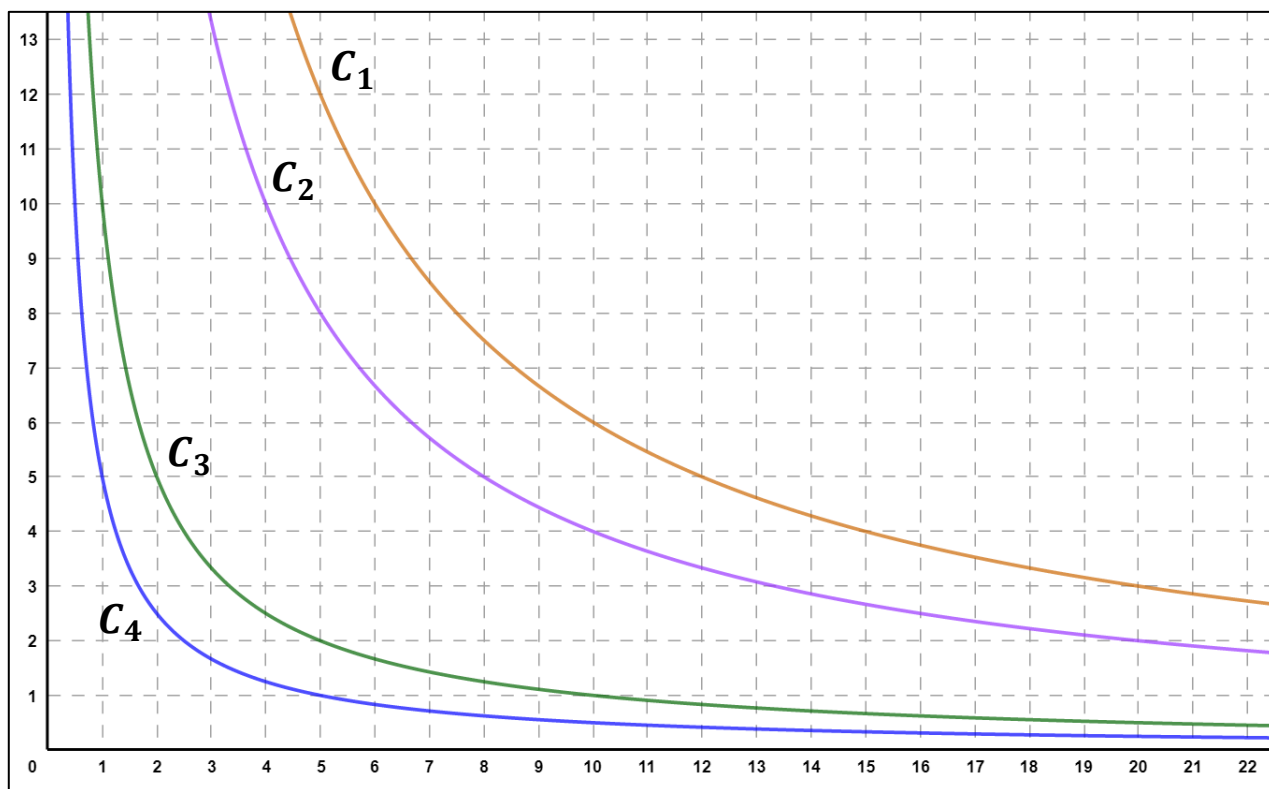
- a) calculer la productivité marginale du capital pour $(K ; L) = (20 ; 30)$;
b) calculer la productivité marginale du travail pour $(K ; L) = (20 ; 30)$;
c) interpréter les résultats de vos calculs par une phrase en français.
1. $Q = f(K ; L) = 36KL - 3K^2 - 2L^2$; 2. $Q = f(K ; L) = K^{0,5} \times L^{0,5}$;
3. $Q = f(K ; L) = 2 \times K^{0,25} \times L^{0,75}$; 4. $Q = f(K ; L) = (20K - 4L) \times (2L - K)$;
5. $Q = f(K ; L) = (20K - 4L)^2 \times (2L - K)$; 6. $Q = f(K ; L) = \frac{K^2 + L^3}{K + L^2}$.

Objectif : calculer des taux marginaux de substitution et les interpréter graphiquement.

Exercice 41 : identifier des courbes de niveaux – On considère la fonction d'utilité suivante, qui dépend de deux variables x_1 et x_2 qui représentent les quantités consommées des biens 1 et 2 : $U(x_1 ; x_2) = 10x_1 \times x_2$.

1. a) Calculer l'utilité des paniers suivants : $(4 ; 10)$, $(5 ; 8)$, $(8 ; 5)$ et $(10 ; 4)$. Que remarquez-vous ?
b) Dans le repère, l'axe des abscisses représente la quantité x_1 de bien 1 et l'axe des ordonnées représente la quantité x_2 de bien 2. Placer les points de coordonnées $(x_1 ; x_2)$ correspondants aux paniers de la question a).
c) On a tracé sur le graphique ci-après plusieurs courbes de niveau de la fonction U . Les points placés de la question b) appartiennent tous à une courbe de niveau déjà tracée de la fonction U : laquelle ?
d) Sur cette courbe de niveau de la fonction d'utilité U , tous les points correspondent à des paniers qui ont tous la même utilité et procurent donc la même satisfaction au consommateur. Comment appelle-t-on une telle courbe ?

e) Sans faire de calcul supplémentaire mais grâce à une lecture graphique, déterminer un cinquième panier avec des coordonnées décimales exactes qui a le même niveau d'utilité que les quatre paniers précédents.



2. On a tracé trois autres courbes d'indifférence sur le graphique. Pour chacune d'entre elles :

a) retrouver son niveau d'utilité en choisissant un panier à coordonnées exactes ;

b) sans faire de calcul mais par une lecture graphique, donner au moins un autre panier qui a le même niveau d'utilité pour le consommateur que celui choisi à la question a).

3. A l'aide des paniers (2 ; 10) , (4 ; 5) , (5 ; 4) , (10 ; 2) et (20 ; 1), tracer à main levée sur le graphique ci-dessus une cinquième courbe d'indifférence du consommateur.

Exercice 42 : identifier des courbes de niveaux – On

considère la fonction d'utilité suivante, qui dépend de deux variables x_1 et x_2 qui représentent les quantités consommées des biens 1 et 2 :

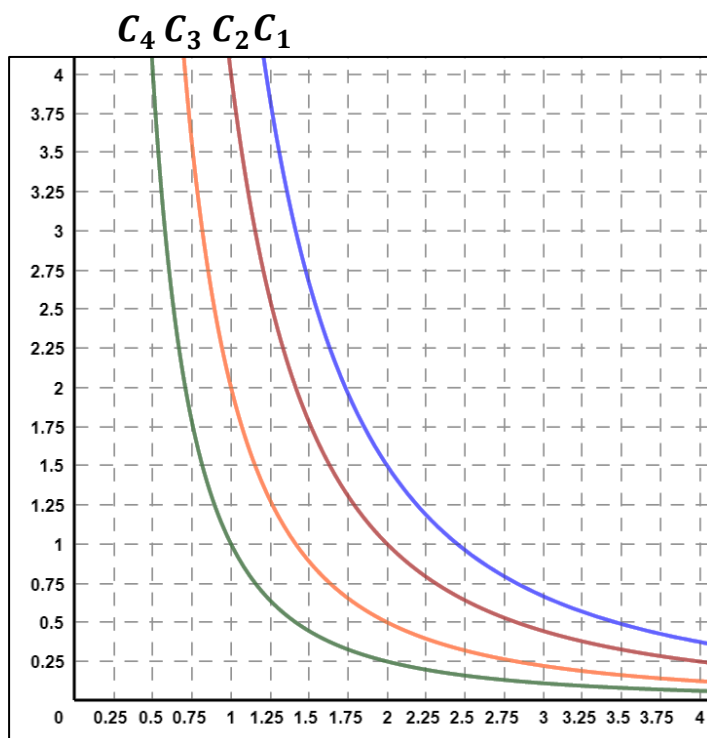
$$U(x_1 ; x_2) = x_1^2 \times x_2 .$$

1. Vérifier que les paniers (1 ; 4) et (4 ; 0,25) procurent la même satisfaction au consommateur.

2. Dans le repère, l'axe des abscisses représente la quantité x_1 de bien 1 et l'axe des ordonnées représente la quantité x_2 de bien 2.

Déterminer la courbe d'indifférence correspondant à un niveau d'utilité égal à 4.

3. Déterminer un autre panier à coordonnées entières qui procure la même satisfaction que ceux de la question 1.



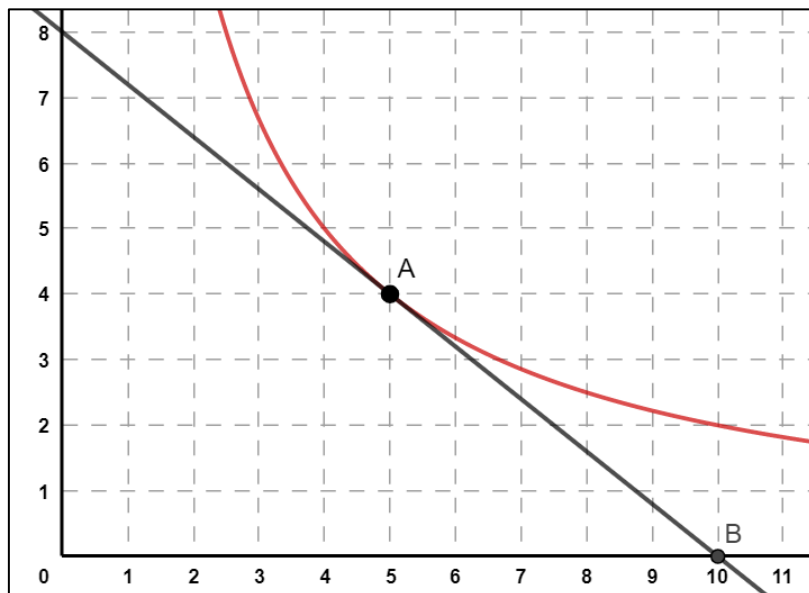
Exercice 43 : calculer des taux marginaux de substitution – On donne des fonctions d'utilité dépendant de deux variables x_1 et x_2 qui représentent les quantités consommées des biens 1 et 2. Dans chaque cas,

- a) calculer le niveau d'utilité correspondant au panier $(x_1 ; x_2) = (10 ; 5)$ (on arrondira au centième) ;
- b) calculer le taux marginal de substitution du bien 2 au bien 1 pour le panier donné (on arrondira au centième) ;
- c) si le consommateur consomme désormais 11 unités du bien 1, quelle quantité du bien 2 devra-t-il environ consommer afin de conserver le même niveau d'utilité ?

1. $U(x_1 ; x_2) = 2x_1 \times x_2$; 2. $U(x_1 ; x_2) = x_1^2 \times x_2^3$; 3. $U(x_1 ; x_2) = x_1^{0,2} \times x_2^{0,8}$;
 4. $U(x_1 ; x_2) = x_1 \times (2x_1 - x_2)^3$; 5. $U(x_1 ; x_2) = \frac{x_1 x_2}{2x_1 + x_2}$.

Exercice 44 : interprétation du TMS – On considère la fonction d'utilité suivante, qui dépend de deux variables x_1 et x_2 qui représentent les quantités consommées des biens 1 et 2 : $U(x_1 ; x_2) = 10x_1 \times x_2$.

- 1. a) Calculer l'utilité du panier : $(x_1 ; x_2) = (5 ; 4)$.
 - b) Calculer le taux marginal de substitution du bien 2 au bien 1 pour le panier donné.
 - c) Si le consommateur consomme désormais 6 unités du bien 1, quelle quantité du bien 2 devra-t-il environ consommer afin de conserver le même niveau d'utilité ?
2. Vérifions ce résultat par un calcul. Un consommateur dispose de 5 unités du bien 1 et de 4 unités du bien 2.
- a) A utilité égale, si l'on augmente le bien 1 d'une unité, de combien d'unités le bien 2 doit-il diminuer ? Vous arrondirez le résultat au centième.
 - b) Comparer le résultat obtenu avec le taux marginal de substitution calculé à la question précédente.
3. Dans le repère page ci-dessous, l'axe des abscisses représente la quantité x_1 de bien 1 et l'axe des ordonnées représente la quantité x_2 de bien 2. On a placé le point $A(5 ; 4)$, tracé la courbe d'indifférence du consommateur passant par ce point, ainsi que la tangente T à la courbe d'indifférence au point A .



- a) Quel est le niveau d'utilité de la courbe d'indifférence ainsi tracée ?
- b) Rappeler comment s'interprète graphiquement le taux marginal de substitution du bien 2 au bien 1 pour le panier $(5 ; 4)$.
- c) On admet que T passe par le point $B(10 ; 0)$. Déterminer graphiquement ce taux marginal de substitution.

Exercice 45 : interprétation du TMS – On considère la fonction d'utilité suivante, qui dépend de deux variables x_1 et x_2 qui représentent les quantités consommées des biens 1 et 2 : $U(x_1 ; x_2) = x_1^{0,5} \times x_2^{0,5}$.

1. a) Calculer l'utilité du panier : $(x_1 ; x_2) = (9 ; 4)$.

b) Calculer le taux marginal de substitution du bien 2 au bien 1 pour le panier donné.

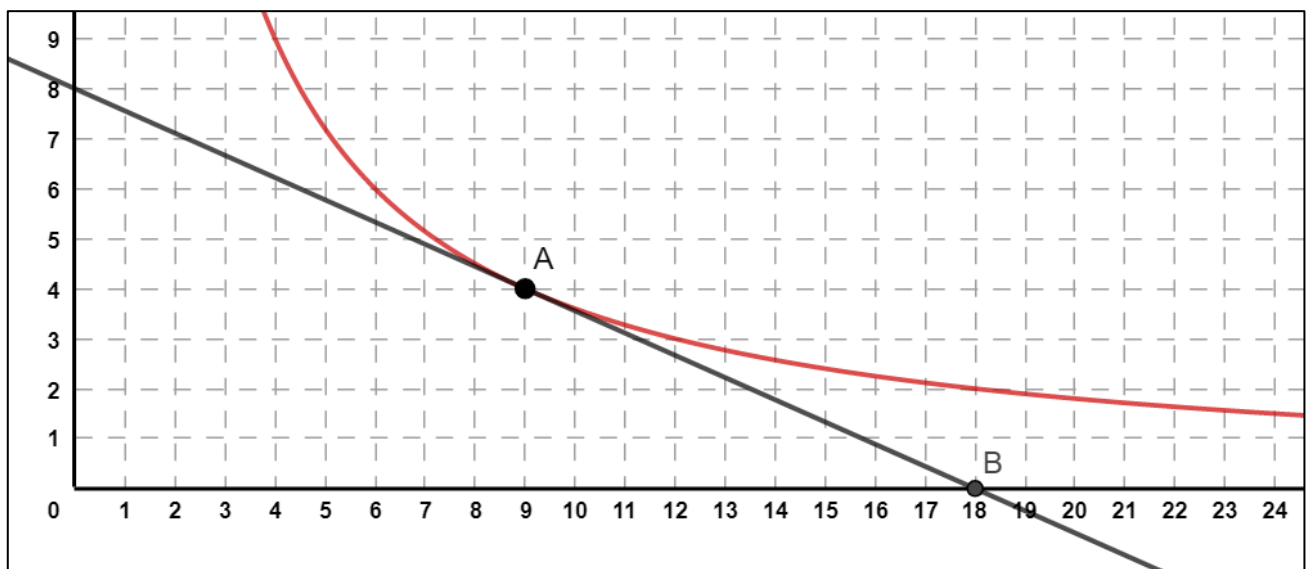
c) Si le consommateur consomme désormais 10 unités du bien 1, quelle quantité du bien 2 devra-t-il environ consommer afin de conserver le même niveau d'utilité ?

2. Vérifions ce résultat par un calcul. Un consommateur dispose de 9 unités du bien 1 et de 4 unités du bien 2.

a) A utilité égale, si l'on augmente le bien 1 d'une unité, de combien d'unités le bien 2 doit-il diminuer ? Vous arrondirez le résultat au centième.

b) Comparer le résultat obtenu avec le taux marginal de substitution calculé à la question précédente.

3. Dans le repère ci-dessous, l'axe des abscisses représente la quantité x_1 de bien 1 et l'axe des ordonnées représente la quantité x_2 de bien 2. On a placé le point $A(9 ; 4)$, tracé la courbe d'indifférence du consommateur passant par ce point, ainsi que la tangente T à la courbe d'indifférence au point A .



a) Quel est le niveau d'utilité de la courbe d'indifférence ainsi tracée ?

b) Rappeler comment s'interprète graphiquement le taux marginal de substitution du bien 2 au bien 1 pour le panier $(9 ; 4)$.

c) On admet que T passe par le point $B(18 ; 0)$. Déterminer graphiquement ce taux marginal de substitution.

Exercice 46 : exercice de synthèse – Un consommateur dispose d'un revenu $R = 12$ € pour acheter deux biens en quantités respectives x_1 et x_2 . Le prix du bien 1 est de 4€ par unité tandis que le prix du bien 2 est de 2€ par unité. La fonction d'utilité du consommateur est donnée par la formule $U(x_1 ; x_2) = x_1^{0,8} \times x_2^{0,2}$. Le

consommateur se fixe comme contrainte d'utiliser tout son budget. Dans le repère page suivante, l'axe des abscisses représente la quantité x_1 de bien 1 et l'axe des ordonnées représente la quantité x_2 de bien 2. On a tracé plusieurs courbes d'indifférence du consommateur. L'objectif est de déterminer graphiquement le(s) panier(s) qui procure(nt) une utilité maximale sous la contrainte donnée ainsi que la valeur de cette utilité maximale.

1. a) Ecrire la contrainte budgétaire sous la forme d'une relation liant x_1 et x_2 .

b) Déterminer un panier ne comportant aucun bien 1 et vérifiant la contrainte budgétaire. Placer le point B correspondant au panier.

c) Déterminer un panier ne comportant aucun bien 2 et vérifiant la contrainte budgétaire. Placer le point C correspondant au panier.

d) A l'aide de la relation obtenue à la question **a)**, exprimer x_2 en fonction de x_1 .

Quelle est la nature de cette relation ?

L'ensemble géométrique formé par les points représentant tous les paniers respectant la contrainte budgétaire est donc un segment : le tracer.

2. La courbe d'indifférence C_1 correspond à une utilité égale à 3. Expliquer à l'aide d'un argument graphique pourquoi l'utilité

maximale sous la contrainte budgétaire donnée ne peut pas être égale à 3.

3. La courbe d'indifférence C_2 correspond à une utilité égale à 1,8. Expliquer à l'aide d'un argument graphique pourquoi l'utilité maximale sous la contrainte budgétaire donnée ne peut pas être égale à 1,8.

4. La courbe d'indifférence C_3 n'a qu'un point d'intersection avec la droite d de contrainte : le point $A(2,4 ; 1,2)$.

a) Qu'en déduire sur l'utilité correspondant à la courbe d'indifférence C_3 ? Que dire du panier $(2,4 ; 1,2)$?

b) Calculer cette utilité : vous donnerez la valeur exacte et la valeur approchée au dixième.

c) Que dire de la droite de contrainte budgétaire par rapport à la courbe C_3 ?

5. Dans cette question, on veut retrouver le résultat de la question **4. a)** par le calcul.

a) Justifier que $\tilde{U}(x_1)$, la fonction « associée à U sous la contrainte fixée » de la variable x_1 , a pour expression :

$$\tilde{U}(x_1) = x_1^{0,8} \times (6 - 2x_1)^{0,2} \quad \text{avec } x_1 \text{ compris entre } 0 \text{ et } 3.$$

b) On admet que $\tilde{U}'(x_1) = \frac{4,8-2x_1}{x_1^{0,2} \times (6-2x_1)^{0,8}}$ et que $(6 - 2x_1)^{0,2}$ est positif sur $[0 ; 3]$.

Etudier le signe de $\tilde{U}'(x_1)$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$ et en déduire les variations de $\tilde{U}(x_1)$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

c) En déduire l'utilité maximale sous la contrainte donnée et le panier maximisant cette utilité.

6. Dans cette question, on veut vérifier que la droite d de contrainte budgétaire est la tangente à C_3 au point A .

Pour cela, il suffit de prouver que la droite d a une pente égale à celle de la tangente.

a) La droite d passe par les points B et C : calculer sa pente.

b) On considère un point $M(x_1 ; x_2)$ quelconque appartenant à la courbe d'indifférence C_3 , dont la valeur exacte du niveau d'utilité a été calculé à la question **4. a)**. Démontrer qu'on a : $x_2 = \frac{2,4^4 \times 1,2}{x_1^4}$.

c) Soit g la fonction telle que $x_2 = g(x_1)$. On a alors $g(x_1) = \frac{2,4^4 \times 1,2}{x_1^4}$ et C_3 est la courbe représentative de la fonction g . Donner l'expression de la fonction dérivée, $g'(x_1)$, en fonction de x_1 .

d) Montrer que la pente de la tangente au point d'abscisse 2,4 est bien égale à la pente de d . Qu'en déduire ?

e) Conclure sur la méthode graphique permettant d'optimiser une fonction d'utilité sous une contrainte budgétaire donnée.

