

Licence 1 AES
Université de Paris I – Panthéon-Sorbonne

Méthodes quantitatives – Rappels

Pierre Clément – Olivier Touzet

Fiche n°1 – Des fonctions et des courbes

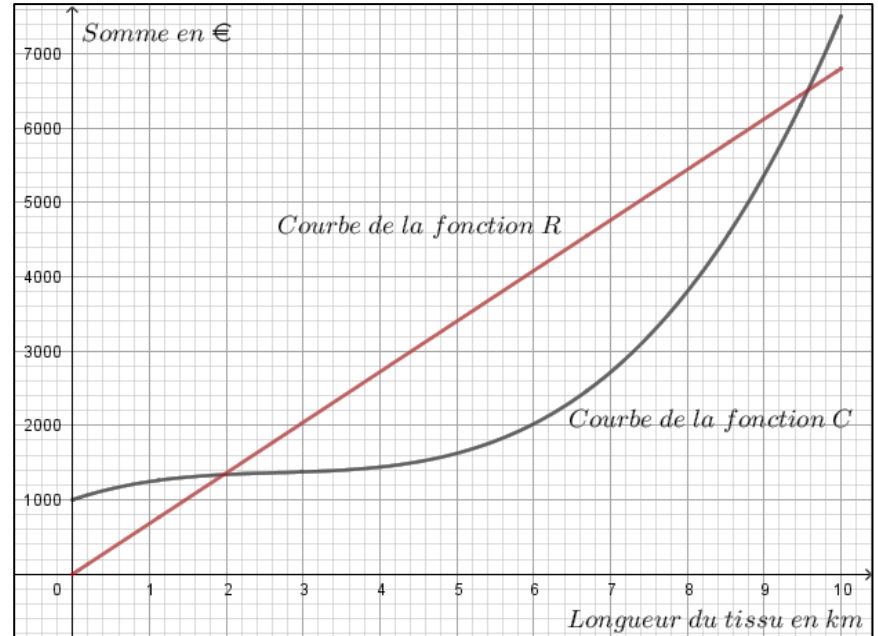
L'objectif de cette première fiche est de comprendre et de savoir utiliser les notions de base sur les fonctions dont on a besoin en économie.

A) Lectures graphiques : modélisation simplifiée d'un processus de production

Une entreprise produit et vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large ; on note x sa longueur exprimée en kilomètres, x étant un nombre compris entre 0 et 10. On définit les **fonctions C et R** donnant respectivement **les coûts et la recette** pour la fabrication et la vente de tissu de x kilomètres de longueur.

Comme l'entreprise peut choisir de produire de 0 à 10 km de tissu, on étudiera nos fonctions uniquement pour ces valeurs, et donc sur l'intervalle $[0 ; 10]$: c'est

l'**ensemble de définition** de la fonction.



Les **courbes représentatives** des fonctions C et R donnant respectivement les coûts et la recette pour la fabrication et la vente de tissu de x kilomètres de longueur sont données dans le graphique ci-dessus.

1. Quel est le **coût** de production de 6 kilomètres de tissu ?

2. Quel est la recette attendue par l'entreprise si elle arrive à vendre 6 kilomètres de tissu ?
.....

3. En déduire par un calcul le bénéfice attendu.
.....
.....

4. Mêmes questions pour 2 kilomètres de tissu.
.....
.....
.....

5. L'entreprise a-t-elle intérêt à produire moins de 2 kilomètres de tissu ?
.....
.....
.....

6. Le directeur veut savoir combien de kilomètres de tissu il peut produire pour un coût de 3 400 euros.

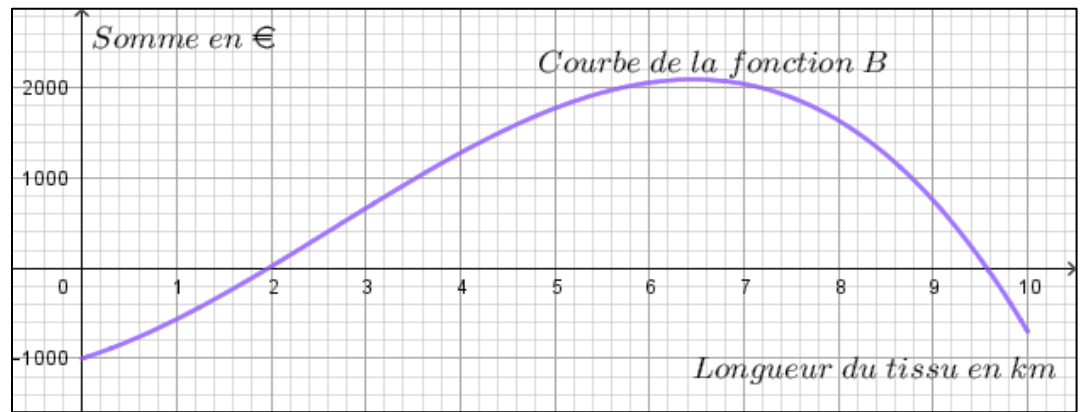
Donner la réponse à partir du graphique en trouvant la valeur de x pour laquelle : $C(x) = 3\,400$.
.....
.....

7. Résoudre graphiquement l'équation $R(x) = C(x)$.
A quoi correspond le résultat trouvé ?
.....
.....

8. Résoudre l'inéquation $R(x) \geq C(x)$ et interpréter.
.....
.....
.....

B) Variation, minimum, maximum : modélisation simplifiée d'un processus de production

On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction B donnant le **bénéfice** pour la fabrication et la vente de **tissu de x kilomètres de longueur**, sur l'intervalle $[0 ; 10]$.



1. L'entreprise est déficitaire si elle réalise un bénéfice négatif. Résoudre graphiquement l'inéquation $B(x) \leq 0$.

Interpréter:

2. Pour quelles valeurs de x (longueur du tissu), le bénéfice de l'entreprise augmente-t-il (bénéfice **croissant**) ?

3. Pour quelles valeurs de x (longueur du tissu), le bénéfice de l'entreprise diminue-t-il (bénéfice **décroissant**) ?

4. Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il **maximal** ?

.....

5. Compléter le tableau ci-contre en vous aidant des questions précédentes.

x	0	10
Variations de la fonction de bénéfice		

Point cours : vocabulaire des fonctions et des représentations graphiques

Soit f une fonction, **définie** sur un ensemble $\mathcal{D}$. Cela signifie qu'à chaque nombre x de l'ensemble $\mathcal{D}$, la fonction associe un unique nombre réel, son **image** $f(x)$. Cet ensemble $\mathcal{D}$ s'appelle **l'ensemble de définition** de f .

Définition – La **courbe représentative** de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points $M(x ; y)$ dont les coordonnées x et y vérifient les conditions ① $x \in \mathcal{D}$ ($f(x)$ existe) ② $y = f(x)$.

Du fait de cette définition, on emploiera le vocabulaire suivant :

→ l'axe **horizontal (abscisses)** est l'axe des **antécédents**.

→ l'axe **vertical (ordonnées)** est l'axe des **images**.

La **courbe représentative** de f se note : $\mathcal{C}_f$.

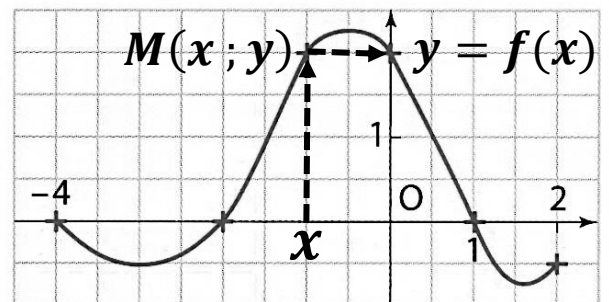
Définitions – 1) On dit qu'une fonction f est **strictement croissante** sur un intervalle I lorsque, pour x dans cet intervalle, en effectuant une lecture graphique **de gauche à droite**, les images $f(x)$ sont **de plus en plus grandes**.

2) f est dite **strictement décroissante** sur un intervalle I si les images $f(x)$ sont **de plus en plus petites**.

3) La **plus grande des images** $f(x)$ pour x appartenant à I s'appelle **le maximum de f sur I** .

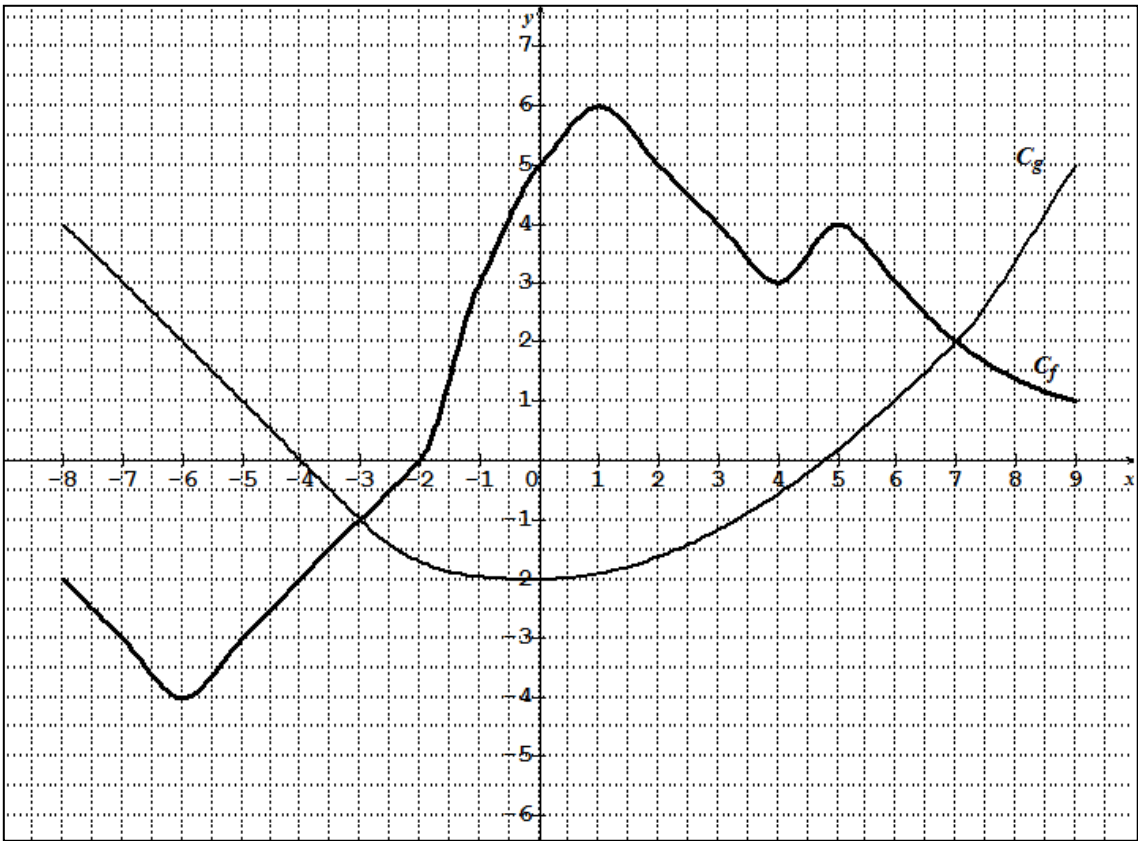
4) La **plus petite des images** $f(x)$ pour x appartenant à un intervalle I s'appelle **le minimum de f sur I** .

Le maximum et le minimum d'une fonction se lisent sur **l'axe des images**.



Exercice d'entraînement

Exercice 1 – Soit f et g deux fonctions définies sur $[-8 ; 9]$, de courbes représentatives respectives C_f et C_g données ci-dessous dans un même repère orthonormé.



- 1. Lire graphiquement l'image de 6 par la fonction f :
- 2. Lire graphiquement les éventuels antécédents par f de 5 :
- 3. Compléter : $f(\dots) = -4$.
- 4. Résoudre graphiquement $f(x) = 3$ sur $[-8 ; 9]$:
- 5. Résoudre graphiquement $f(x) \leq 3$ sur $[-8 ; 9]$:
- 6. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$ sur $[-8 ; 9]$:
- 7. Résoudre graphiquement $f(x) > g(x)$ sur $[-8 ; 9]$:
- 8. Construire ci-contre le **tableau de variations** de f .
- 9. Quel est le max de f ? En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?
- 10. Quel est le min de f ? En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?

Exercice

1. $f(6) = 3$.

2. Antécédents par f de 5 : 0 et 2.

3. $f(-6) = -4$.

4. $S = \{-1 ; 4 ; 6\}$.

5. $S = [-8 ; -1] \cup \{4\} \cup [6 ; 9]$.

6. $S = \{-3 ; 7\}$.

7. $S = [-3 ; 7]$.

8. Tableau de variations de la fonction f :

x	-8	-6	1	4	5	9
variations de f	-2	-4	6	3	4	1

9. Le maximum de f sur $[-8 ; 9]$ est égal à 6 et est atteint en 1.

10. Le minimum de f sur $[-8 ; 9]$ est égal à -4 et est atteint en -6.

Fiche n°2 – Nombre dérivé et fonctions dérivée

Obtenir le tableau de variations d'une fonction est un outil précieux en économie : si la fonction étudiée est celle du bénéfice, ce tableau permet de savoir à quel moment **le bénéfice croît, décroît, est maximal, est minimal**. Si les tableaux de variations peuvent s'obtenir à partir d'une courbe, on veut désormais se passer d'une telle représentation graphique : l'objectif de cette fiche est ainsi de savoir **établir un tableau de variations** par un autre moyen. Pour cela, nous aurons besoin de notions pré-requises : celle de **coefficient directeur** d'une droite, celle de **nombre dérivé** et enfin celle de **fonction dérivée**. Ces notions vont nous faire gagner un temps précieux en exercice.

A) A la découverte des fonctions affines et de leur représentation graphique

Découverte des fonctions affines – A l'ouverture d'une patinoire, les gérants proposent trois tarifications :

- pour la première formule, l'abonnement annuel coûte 10 euros, puis on paye 1 euro par entrée.

On pose x le nombre d'entrées dans l'année, et $f(x)$ le prix payé avec cette première formule. Calculer $f(3)$ et

interpréter : $f(3) = \dots\dots\dots$

En déduire la formule de la fonction : $f(x) = \dots\dots\dots = ax + b$ avec $a = \dots\dots\dots$ et $b = \dots\dots\dots$

- pour la deuxième formule, l'abonnement annuel coûte 5 euros, puis on paye 2 euros par entrée.

On pose x le nombre d'entrées dans l'année, et $g(x)$ le prix payé avec cette première formule. Calculer $g(3)$ et

interpréter : $g(3) = \dots\dots\dots$

En déduire la formule de la fonction : $g(x) = \dots\dots\dots = ax + b$ avec $a = \dots\dots\dots$ et $b = \dots\dots\dots$

- pour la troisième formule, on ne paye pas d'abonnement annuel, mais on paye 3 euros par entrée.

On pose x le nombre d'entrées dans l'année, et $h(x)$ le prix payé avec cette première formule. Calculer $h(3)$ et

interpréter : $h(3) = \dots\dots\dots$

En déduire la formule de la fonction : $h(x) = \dots\dots\dots = ax + b$ avec $a = \dots\dots\dots$ et $b = \dots\dots\dots$

Ces trois fonctions ont une formule de la forme « $ax + b$ », on dit que ce sont des **fonctions affines**.

Représentation graphique d'une fonction affine

On a représenté graphiquement les trois fonctions f, g et h dans un repère. Que dire de ces trois représentations graphiques ?

$\dots\dots\dots$

On les appelle alors respectivement : d_1, d_2 et d_3 .

Avec 12 euros, quel est la formule qui permettra d'aller le plus de fois à la patinoire dans l'année ? $\dots\dots\dots$

A partir de 5 entrées, quelle est la formule la plus économique ?

$\dots\dots\dots$

Comparer des pentes – Parmi ces trois droites, laquelle est la plus

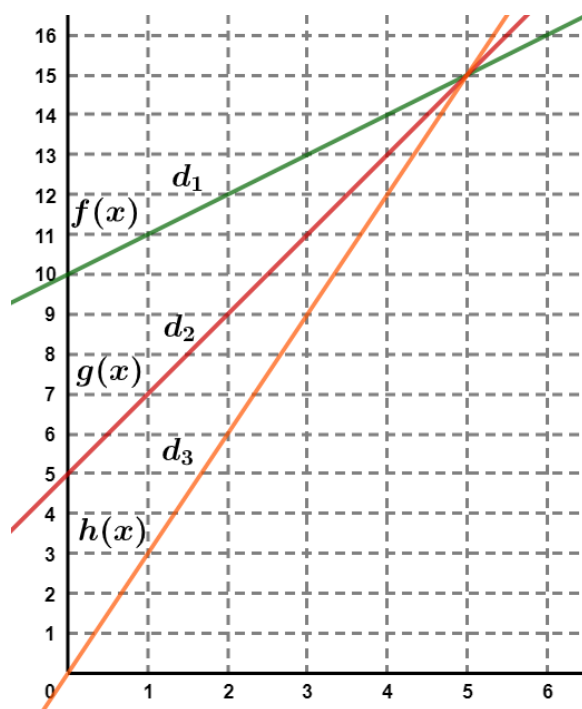
pentue, c'est-à-dire la plus inclinée ? $\dots\dots\dots$ puis c'est $\dots\dots\dots$ et

la moins pentue est $\dots\dots\dots$. Le **coefficient directeur** d'une droite

est un nombre permettant de décrire « sa pente » : plus il est

grand, plus la droite est **pentue**. Compléter avec $>$ ou $<$:

coefficient directeur $d_1 \dots\dots\dots$ **coefficient directeur** de $d_2 \dots\dots\dots$ **coefficient directeur** de d_3 .



Calculer un coefficient directeur – Pour calculer le **coefficient directeur** d'une droite, on applique la formule :

$$\text{coefficient directeur} = \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

Calculer le coefficient directeur de la droite d_3 de deux manières différentes (avec $\Delta x = 1$ puis avec $\Delta x = 2$) :

Calculer le coefficient directeur de la droite d_2 :

Calculer le coefficient directeur de la droite d_1 :

Retrouve-t-on les comparaisons effectuées page précédente ?

Lien avec les fonctions affines – Compléter le tableau.

Fonction affine	Formule $ax + b$ avec :		Coefficient directeur de la droite	Compléter :	Coût d'une place supplémentaire :
$f(x) = 1x + 10$	$a = \dots\dots\dots$	$b = \dots\dots\dots$	$m = \dots\dots\dots$	$a \dots\dots m$	$\dots\dots\dots$
$g(x) = 2x + 5$	$a = \dots\dots\dots$	$b = \dots\dots\dots$	$m = \dots\dots\dots$	$a \dots\dots m$	$\dots\dots\dots$
$h(x) = 3x + 0$	$a = \dots\dots\dots$	$b = \dots\dots\dots$	$m = \dots\dots\dots$	$a \dots\dots m$	$\dots\dots\dots$

On remarque que **le coût d'une unité supplémentaire** est **constant** : il est **le même** qu'on ait déjà acheté 3 ou 5 entrées. Il est égal à la fois au coefficient a de la fonction affine et au **coefficient directeur** de la droite.

Point cours et point méthodes : fonction affine, droite, coefficient directeur/pente

Définition et théorème – Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite **affine** s'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**.

Définition et théorème – Le coefficient a s'appelle le **coefficient directeur de la droite (ou pente)**, et si la fonction f exprime un coût, il est égal au coût d'une unité supplémentaire : on l'appelle aussi **coût marginal**.

Lorsqu'une droite est tracée, on calcule sa pente en reliant deux points de la droite d'abord horizontalement puis verticalement, puis on applique la formule :

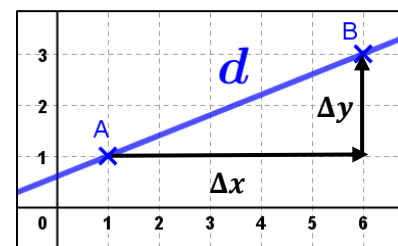
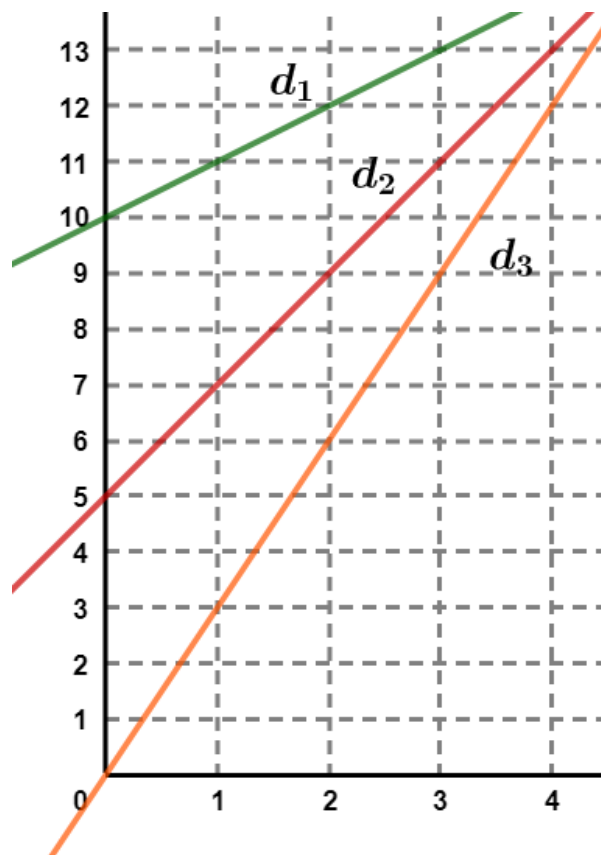
$$\text{coefficient directeur} = \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

A retenir – Si la droite **monte**, son coefficient directeur est **positif**.

Si la droite **descend**, son coefficient directeur est **négatif**.

Si la droite est **horizontale**, son coefficient directeur vaut 0 (est **nul**).

Si la droite monte, **plus son coefficient directeur est grand et plus la droite est pentue**.

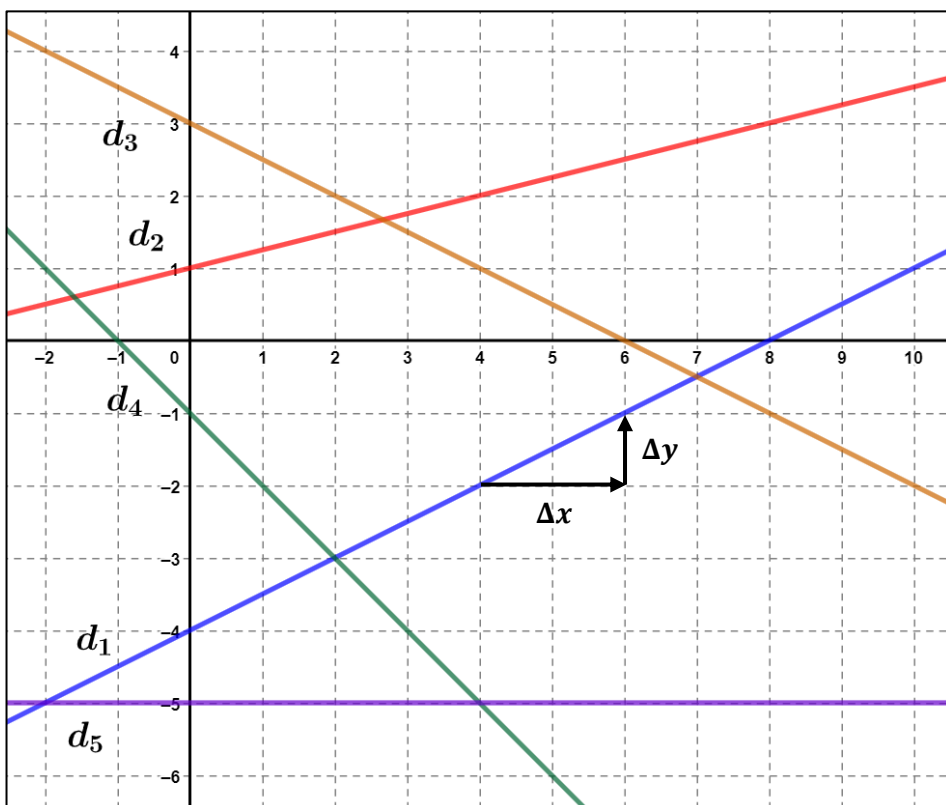


Méthode 1 : calcul d'une pente

- 1) Choisir deux points à coordonnées entières ;
- 2) construire un triangle ;
- 3) lire Δx et Δy en comptant les carreaux : attention, Δy est négatif quand on descend (et Δx est négatif quand on recule) ;
- 4) appliquer la formule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Droite	Signe de la pente (+, -, 0)
d_1	
d_2	
d_3	
d_4	
d_5	

Exemple 1 – Compléter les deux tableaux correspondant aux droites.



Pour le premier calcul de pente, vous pouvez vous aider du Δx et du Δy déjà tracés.

Droite	Calcul de la pente	Droite	Calcul de la pente
d_1		d_3	
d_2		d_4	

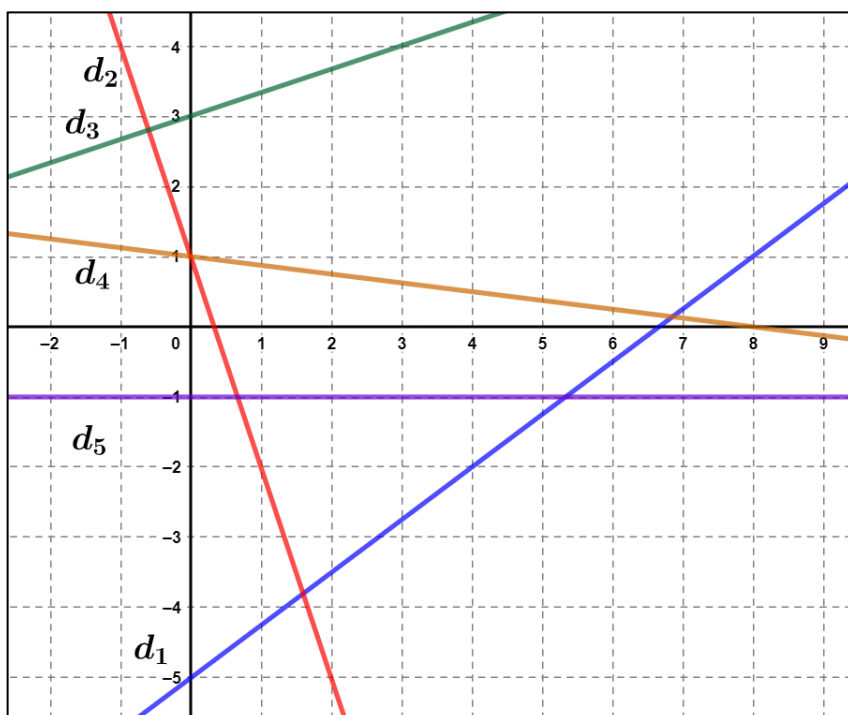
Exercice d'entraînement

Exercice 2 – a) Compléter le tableau :

Droite	Signe de la pente (+, -, 0)
d_1	
d_2	
d_3	
d_4	
d_5	

b) Calculer les coefficients directeurs.

Exercice 2 – a) $d_1 : +, d_2 : -, d_3 : +, d_4 : -, d_5 : 0.$
b) $d_1 : 0,75; d_2 : -3; d_3 : \frac{3}{1}$
$d_4 : -0,125; d_5 : 0.$



B) Tangente et nombre dérivé

Calcul du coût d'une unité supplémentaire avec une fonction à la formule plus compliquée

Une entreprise de confitures produit et vend de la confiture de fraises. Par jour, elle peut produire entre 0 et 10 tonnes de confiture. Pour une production de x tonnes (avec x compris entre 0 et 10), on note $C(x)$ le coût de production de ces x tonnes (en euros).

Pour tout $x \in [0 ; 10]$, le coût est donné par la formule $C(x) = 15x^3 - 180x^2 + 1070x + 500$.

C est représentée ci-contre par une courbe $\mathcal{C}$.

Combien coûte à l'entreprise la production de 2 tonnes de confiture ? Répondre par un calcul.

.....
.....

Combien coûte la production de 3 tonnes ?

.....
.....

Si l'entreprise a déjà produit 2 tonnes, combien lui coûte la production de la 3^{ème} tonne ? Répondre par un calcul.

.....
.....

Le coût de production de cette 3^{ème} tonne s'appelle le **coût d'une unité supplémentaire pour 2 tonnes déjà produites**. On rappelle que la fonction C a pour formule :

$$C(x) = 15x^3 - 180x^2 + 1070x + 500.$$

C est-elle une fonction affine ?

Contrairement au cas des fonctions coûts affines pour lesquelles le coût d'une unité supplémentaire était constant et égal au coefficient a , ce coût va ici varier...

Pour en obtenir une valeur approchée « plus rapidement », les mathématiciens ont créé de nouveaux outils !

Coût marginal et pente de la tangente

A savoir – L'axe horizontal s'appelle l'axe des abscisses.

Sur le graphique ci-contre, on a placé le point A d'abscisse 2 sur la courbe $\mathcal{C}$, et on a tracé une droite appelée **tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2** : cette droite a été tracée de telle sorte qu'elle passe par A et qu'elle « colle » à la courbe $\mathcal{C}$ au niveau du point A (imaginez en quelque sorte qu'elle soit « posée » dessus).

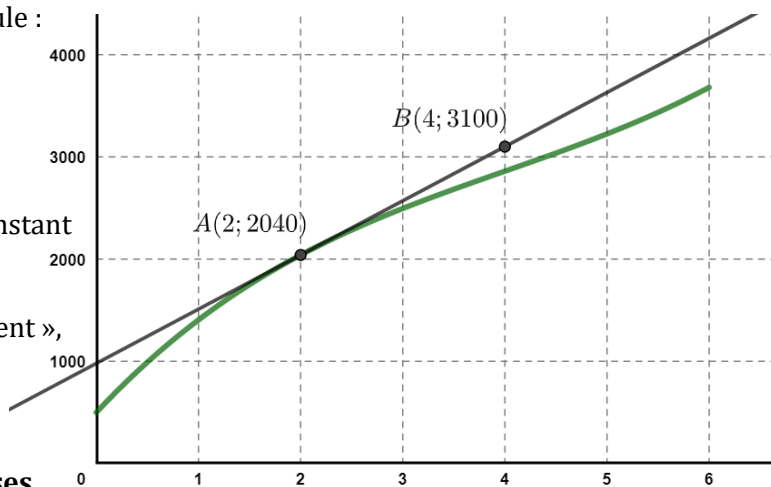
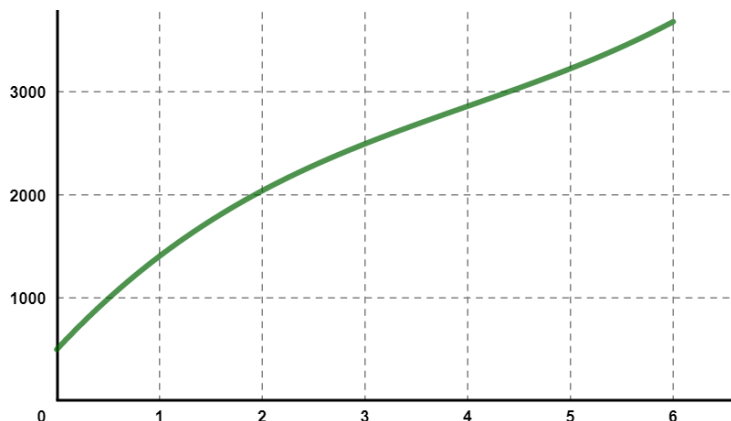
On appelle « **coût marginal pour 2 tonnes produites** » la **pente de la tangente** à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

On admet qu'il est proche du **coût d'une unité supplémentaire pour 2 tonnes déjà produites**.

En utilisant les points A et B , calculer la pente de la tangente et vérifier la véracité de la phrase annoncée.

.....
.....
.....

Ce coût marginal, c'est-à-dire la **pente** de la tangente, prendra le nom de **nombre dérivé de C en 2**, noté $C'(2)$.



Point cours et point méthodes : tangente et nombre dérivé

A retenir – Lorsqu'une fonction f est dite **dérivable en a** , cela signifie qu'au niveau du point de la courbe d'abscisse a , on peut tracer une droite non verticale qui « colle à la courbe ».

Cette droite s'appelle la **tangente à C_f au point d'abscisse a** .

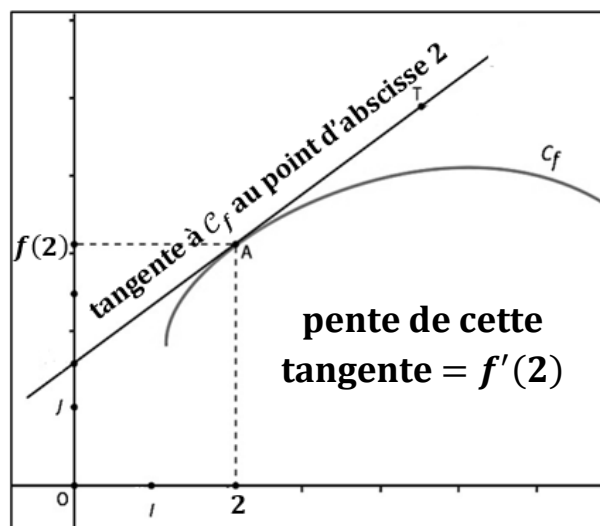
A retenir – On appelle **nombre dérivé de f en a** , et on note $f'(a)$, le **coefficient directeur** de la tangente précédente.

Ainsi, $f'(a) = \text{pente de la tangente} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ en partant de A .

A retenir – On constate déjà deux phénomènes :

→ si la fonction est **croissante**, sa courbe **monte**, donc la tangente **monte**, donc **sa pente est positive**, donc $f'(a) \geq 0$.

→ lorsque la fonction est **décroissante**, sa courbe **descend**, donc la tangente **descend**, donc **sa pente est négative**, et donc $f'(a) = \text{pente} \leq 0$.



Méthode 2 : lecture graphique d'une image et d'un nombre dérivé

Pour lire l'**image de a** , notée $f(a)$:

- 1) on part de a sur l'axe des antécédents,
- 2) on monte jusqu'à la courbe de f ,
- 3) on se rabat sur l'axe des images pour y lire $f(a)$.

Pour lire le **nombre dérivé de f en a** , noté $f'(a)$:

- 1) on part de a sur l'axe des antécédents,
- 2) on remonte à la courbe et on repère la tangente,
- 3) on calcule la pente de la tangente avec : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Exemple 2 – 1. Déterminer les images :

$f(-3) = \dots\dots\dots$; $f(0) = \dots\dots\dots$; $f(2) = \dots\dots\dots$

2. Déterminer les nombres dérivés suivants :

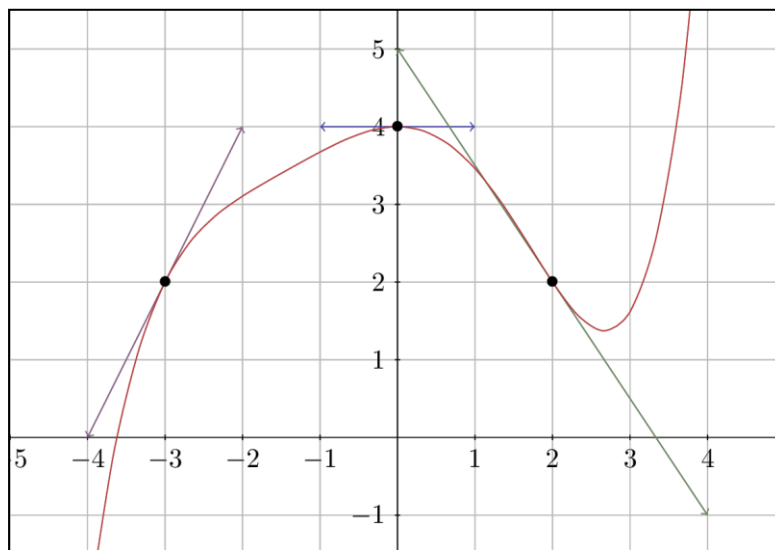
$f'(-3) =$

$f'(0) =$

$f'(2) =$

3. Sans calculer leur valeur, donner le signe des nombres dérivés suivants :

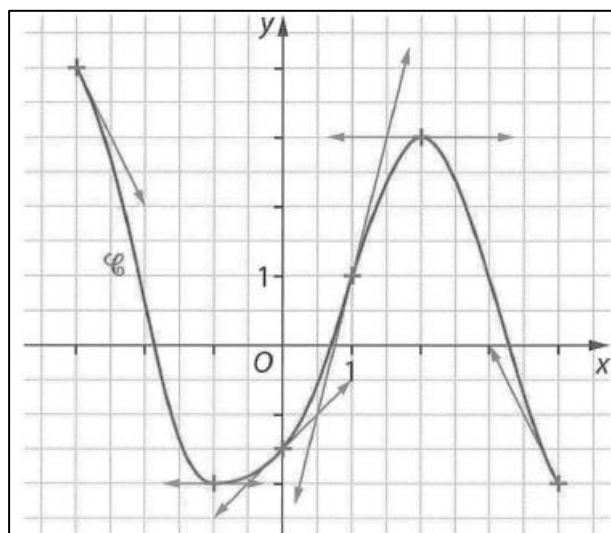
$f'(-2) \dots\dots 0$ $f'(1) \dots\dots 0$ $f'(3) \dots\dots 0$



Exercice d'entraînement

Exercice 3 – Soit f la fonction représentée ci-contre.

1. Déterminer les valeurs de : $f(1)$; $f(2)$ et $f(-3)$.
2. Calculer les nombres dérivés : $f'(1)$; $f'(2)$ et $f'(-3)$.
3. Sans les calculer, donner le signe de : $f'(-1)$; $f'(0)$; $f'(4)$.



Exercice 3 – a) $f(1) = 1$; $f(2) = 1$; $f(-3) = 4$.
b) $f'(1) = \frac{1}{4}$; $f'(2) = \frac{1}{4}$; $f'(-3) = -\frac{1}{4}$.
c) $f'(-1) < 0$; $f'(0) < 0$; $f'(4) < 0$.

C) Fonction dérivée : du signe de f' aux variations de f .

On a déjà remarqué dans le paragraphe précédent que :

→ lorsque f est **croissante** sur un intervalle, sa courbe **monte**, donc les tangentes **montent**, donc elles ont une **pente positive**, et donc les **nombre dérivés $f'(a)$ sont positifs** ;

→ lorsque f est **décroissante** sur un intervalle, sa courbe **descend**, donc les tangentes **descendent**, donc elles ont une **pente négative**, donc les **nombre dérivés $f'(a)$ sont négatifs**.

On va désormais considérer un nouvel outil : la **fonction dérivée de f** , ou plus simplement « **la dérivée de f** ». On la note f' , et elle associe à tout nombre x le nombre dérivé de f en x : $x \mapsto f'(x)$.

Exemple – On a représenté ci-contre en trait épais une fonction f , dont la courbe s'appelle $\mathcal{C}_f$. La droite T tracée en pointillés est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 2.

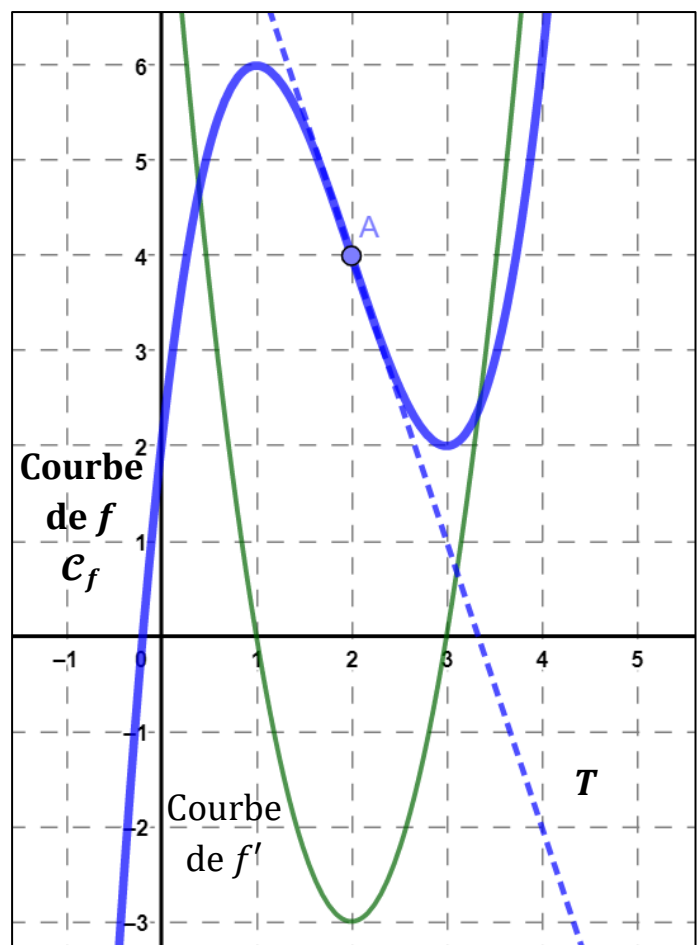
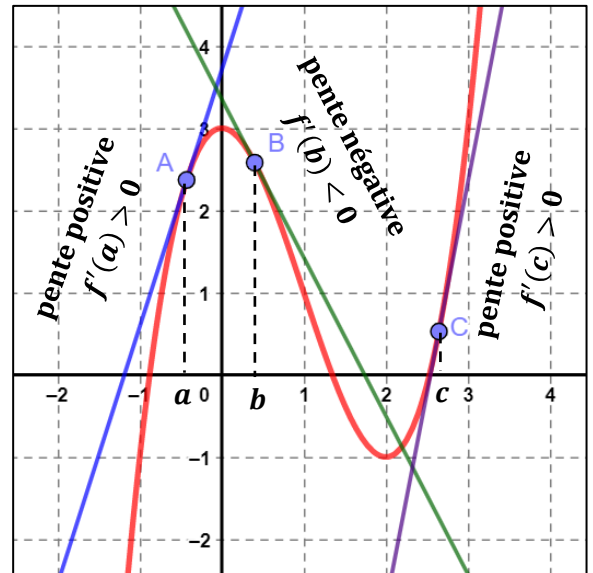
Compléter : on a $f(2) = \dots\dots\dots$

et $f'(2) = \dots\dots\dots$

On a également tracé en trait fin ci-contre **la courbe de la fonction dérivée f'** . Elle permet de lire directement des nombres dérivés : indiquer par des flèches comment la courbe de f' permet de lire directement $f'(2)$.

Compléter alors les pointillés suivants :

→ de 0 à 1, la courbe de f' est située
de l'axe des abscisses, donc les nombres dérivés sont tous
donc les tangentes
et donc la fonction f est sur $[0 ; 1]$
→ de 1 à 3, la courbe de f' est située
de l'axe des abscisses, donc les nombres dérivés sont tous
donc les tangentes
et donc la fonction f est sur $[1 ; 3]$.



Point de cours et point méthode : le théorème à retenir

Nous venons de raisonner dans le sens contraire, en déduisant du signe de la dérivée le sens de variation de f !

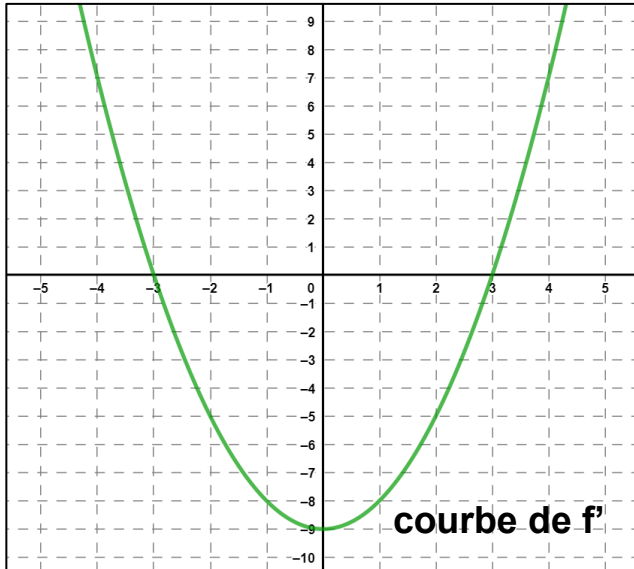
Théorème (admis) – Soit f une fonction définie et **dérivable** sur un intervalle I .

- 1) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est **strictement croissante** sur I .
- 2) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est **strictement décroissante** sur I .
- 3) Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est **constante** sur I .

Mémo – « Pour déterminer les variations de f , je dois étudier le signe de sa dérivée f' ».

Méthode 3 : établir les variations d'une fonction f avec la courbe de f'

- 1) A partir de la courbe de la fonction dérivée f' , on construit le tableau de signes de $f'(x)$ en remplissant la ligne avec +, - ou 0.
- 2) on applique le théorème pour en déduire les variations de f ;
- 3) on calcule les images au bout des flèches.



Exercice d'entraînement

Exercice 4 – Une entreprise vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large. On note x sa longueur exprimée en kilomètres, x étant un réel compris entre 0 et 10. Le bénéfice (en euros) est donné, en fonction de x , par $B(x) = 15x^3 - 180x^2 + 540x + 500$.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en utilisant la courbe de la fonction dérivée B' donnée ci-contre.

x	0	10
Signe de $B'(x)$		
Variations de B		

Quatre images seront calculées pour compléter le tableau.

2. Quel est le bénéfice maximal de l'entreprise et pour quelle longueur de tissu est-il atteint ?
3. Mêmes questions avec le bénéfice minimal.

Exercice 4 – 2. Le bénéfice maximal est de 2 900€, il est atteint pour 10 km de tissu vendus.
3. Le bénéfice minimal est de 500€, il est atteint pour 0 km et pour 6 km de tissu vendus.

Exemple 3 – La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

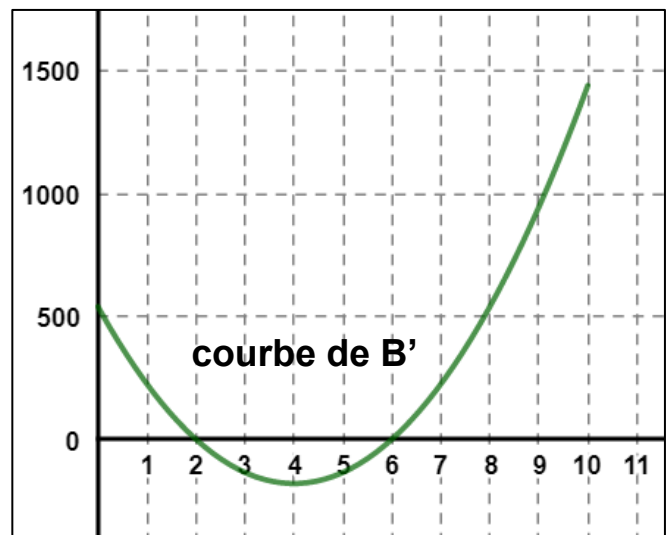
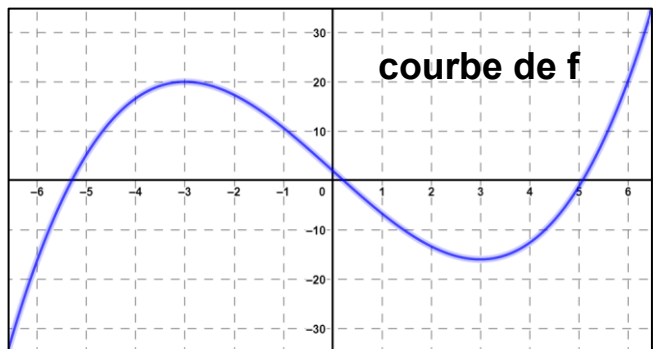
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2.$$

Compléter le tableau en utilisant la courbe de la dérivée f' .

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		
Variations de f		

Calculs d'images :
.....
.....
.....

On vérifie les résultats avec la courbe de f donnée ci-dessous.



x	0	2	6	10
Signe de $B'(x)$	+	+	-	+
Variations de B		2 900	500	500

Exercice 1. Tableau ci-dessous.

Fiche n°3 – Optimisation d'une fonction polynôme de degré 2

La Fiche n°2 a introduit le concept de fonction dérivée dont l'étude du signe permet de déterminer les variations d'une fonction. Jusqu'à présent, nous déterminions le **signe de la fonction dérivée graphiquement**. Nous allons, pour une certaine catégorie de fonctions, établir les **méthodes de calcul** permettant de calculer et d'étudier le signe de la fonction dérivée.

A) Etude du signe d'une fonction affine

Rappel sur les fonctions affines – On rappelle qu'une fonction est dite affine s'il existe deux nombres a et b de sorte que pour tout réel x , $f(x) = ax + b$. Une fonction affine est représentée par une **droite**, et le coefficient a s'appelle le **coefficient directeur** de la droite, ou encore sa **pen**te.

Un premier type de fonctions affines – L'été dernier, Léa a vendu des plats cuisinés sur la plage. En posant x la quantité (en kg) de nourriture vendue, on appelle $f(x)$ le bénéfice réalisé par Léa (en euros). Léa a calculé que la relation entre x et $f(x)$ était : $f(x) = 2x - 6$.

Quel est le bénéfice réalisé pour 2 kg de nourriture vendus ?

.....

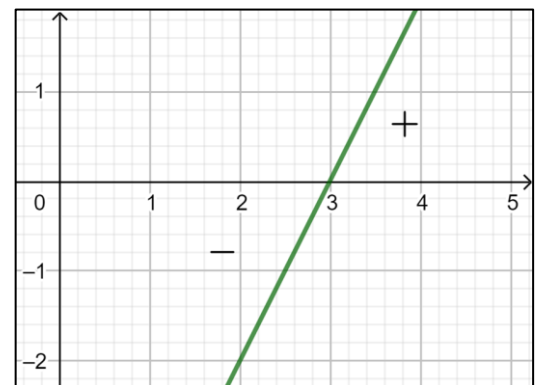
Quel est le bénéfice réalisé pour 4 kg de nourriture vendus ?

.....

Comme $f(x) = 2x - 6 = \dots x + \dots$, f est une fonction **affine** avec $a = \dots$ et $b = \dots$. On a tracé la représentation graphique de f ci-contre. Sa **pen**te est $a = \dots$ et $a \dots 0$. Compléter le cadre ci-contre dans lequel on étudie le signe de $f(x)$ grâce à des observations graphiques réalisées à partir de la droite tracée.

On résume ces informations dans le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$\oplus$	
Interprétation			



$f(x)$ est st. négatif pour tout $x \dots 3$

$f(x)$ est nul pour $x \dots 3$

$f(x)$ est st. positif pour tout $x \dots 3$

A remarquer : le **signe de a** est situé à **droite** du zéro !

La valeur qui « **annule f** », et qui se retrouve « **au-dessus du 0** », peut se retrouver à l'aide d'un calcul : l'objectif est de trouver la valeur de x qui permet d'avoir $2x - 6 = 0$. On dit qu'**on résout l'équation** $2x - 6 = 0$.

En d'autres termes, on cherche la valeur à donner à ? pour que le calcul « $2 \times ? - 6$ » donne un résultat égal à 0.

Méthode 4 : résoudre une équation de la forme

$$a \times x + b = 0$$

Pour isoler le x dans une égalité...

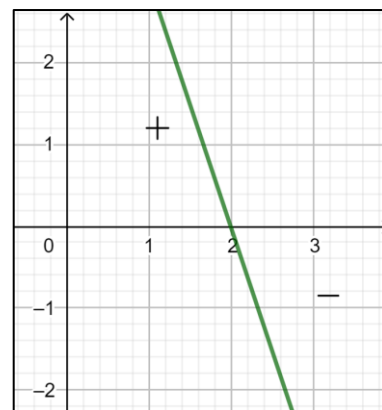
1) on commence par ajouter ou retirer le même nombre à chaque membre pour n'avoir à gauche que le morceau $a \times x$;

2) on divise les deux membres par le même nombre pour obtenir une égalité de la forme $x = \dots$

Exemple 4 – Résoudre l'équation $2 \times x - 6 = 0$.

.....

Un deuxième type de fonctions affines – Imaginons désormais que le bénéfice était donné par la formule $g(x) = -3x + 6$. g est une fonction **affine**, avec $a = \dots\dots\dots$ et $b = \dots\dots\dots$. Sa représentation graphique est donnée ci-contre. Sa **pente** est $a = \dots\dots\dots$ et $a \dots\dots\dots 0$. Compléter les deux tableaux ci-dessous.



x	$-\infty$	$\dots\dots$	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$\dots\dots$	$\oplus$	$\dots\dots$
Interprétation	$\dots\dots\dots \dots\dots\dots$		

Le **signe de a** est **à droite** du zéro.

Retrouvons la valeur qui **annule** g par un calcul :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 6 = 0 \Leftrightarrow -3x + 6 - \dots\dots = 0 - \dots\dots$$

$$\Leftrightarrow -3x = \dots\dots \Leftrightarrow \frac{-3x}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \Leftrightarrow x = \dots\dots\dots$$

$g(x)$ est st. négatif pour tout $x \dots\dots 2$
 $g(x)$ est nul pour $x \dots\dots 2$
 $g(x)$ est st. positif pour tout $x \dots\dots 2$

Point cours et point méthodes : signe d'une fonction affine

On considère une fonction **affine** f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, avec a non nul.

La **droite** représentant la fonction f dans un repère du plan coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_0 .

On est alors nécessairement dans l'un des deux cas suivants :

$a > 0$			$a < 0$		
x	$-\infty$	x_0	x	$-\infty$	x_0
Signe de $ax + b$	$\dots\dots$	$\oplus$	Signe de $ax + b$	$\dots\dots$	$\oplus$

La valeur de x_0 s'obtient **en résolvant l'équation** : $ax + b = 0$

Méthode 5 : tableau de signe de $ax + b$

- 1) on résout $ax + b = 0$;
- 2) on construit un tableau de signes constitué de **deux cases** en mettant le **signe de a à droite du 0** ;
- 3) ajouter la **solution** de $ax + b = 0$ « au-dessus du 0 ».

Exemple 5 – Donner les tableaux de signes de $6x + 30$ et $-5x + 10$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice Exercice 5 – Construire les tableaux de signes des fonctions : **a)** $f(x) = 4x - 3$; **b)** $g(x) = -2x + 8$.

Exercice

a) f est affine avec $a = 4$ et $b = -3$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow 4x - 3 + 3 = 0 + 3$$

$$\Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow \frac{4}{4}x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 0,75.$$

$a = 4 > 0$ donc on a le tableau :

x	$-\infty$	$0,75$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$-$	Φ	$+$

b) g est affine avec $a = -2$ et $b = 8$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 8 = 0 \Leftrightarrow -2x + 8 - 8 = 0 - 8$$

$$\Leftrightarrow -2x = -8 \Leftrightarrow \frac{-2}{-2}x = \frac{-8}{-2} \Leftrightarrow x = 4.$$

$a = -2 < 0$ donc on a le tableau :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$+$	Φ	$-$

B) Calculer l'expression de la fonction dérivée d'une fonction polynôme

Pour obtenir des nombres dérivés, nous devons dans la Fiche n°2 lire graphiquement les pentes des tangentes sur la courbe de la fonction. Afin de nous passer des représentations graphiques, nous allons désormais découvrir les formules obtenues par les mathématiciens qui permettent de calculer des nombres dérivés.

Dérivée d'une fonction puissance

Définition – On appelle fonction puissance toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression est « de la forme »

$$f(x) = x^n \text{ avec } n \text{ un entier positif non nul : } f(x) = x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}.$$

Le calcul de l'expression de la fonction dérivée d'une fonction puissance se réalise à l'aide du tableau suivant.

Propriété – Dans le tableau ci-dessous, pour chaque fonction puissance définie sur $\mathbb{R}$, dont l'expression figure en 2^{ème} colonne, l'expression de sa dérivée est donnée en 3^{ème} colonne, puis calculer $f'(2)$.

f est définie et dérivable sur	Expression de f	Expression de f'	Calcul de $f'(2)$
$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ (k est un nombre réel)	$f'(x) = \dots\dots\dots$	$f'(2) = \dots\dots\dots$
	$f(x) = x$	$f'(x) = \dots\dots\dots$	$f'(2) = \dots\dots\dots$
	$f(x) = x^2$	$f'(x) = \dots\dots\dots$	$f'(2) = \dots\dots\dots$
	$f(x) = x^3$	$f'(x) = \dots\dots\dots$	$f'(2) = \dots\dots\dots$
	$f(x) = x^4$	$f'(x) = \dots\dots\dots$	$f'(2) = \dots\dots\dots$
	$f(x) = x^n$ (n entier positif non nul)	$f'(x) = \dots\dots\dots$	$f'(2) = \dots\dots\dots$

Exemple – La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^{10}$ a pour expression $f'(x) = \dots\dots\dots$.

Opérations sur les dérivées **Propriété** – On considère deux fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$.

Opération étudiée	Si $f(x)$ s'écrit :	alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)$ est égale à :
Somme : $u + v$	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Différence : $u - v$	$f(x) = u(x) - v(x)$	$f'(x) = u'(x) - v'(x)$
Produit de u par un nombre réel k : $k \times u$	$f(x) = k \times u(x)$	$f'(x) = k \times u'(x)$

Remarques – a) Pour dériver une fonction s'écrivant comme une somme, on détermine la dérivée de chaque terme puis on les ajoute.

b) Pour dériver le produit d'une fonction puissance par un nombre réel, on multiplie la dérivée de la fonction puissance par le nombre réel en question.

Exemples – Compléter les expressions des dérivées suivantes.

1) Si $f(x) = x^2 + x^3$, alors $f'(x) = \dots\dots\dots$

2) Si $f(x) = x^4 - 3$, alors $f'(x) = \dots\dots\dots$

3) Si $f(x) = 5x^2$, alors $f'(x) = \dots\dots\dots$

4) Si $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1$, alors :

$f'(x) = \dots\dots\dots$

$f'(x) = \dots\dots\dots$

5) Si $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$, alors :

$f'(x) = \dots\dots\dots$

$f'(x) = \dots\dots\dots$

6) Si $f(x) = -3,5x^2 + x + 100$, alors :

$f'(x) = \dots\dots\dots$

$f'(x) = \dots\dots\dots$

C) Du signe d'une fonction affine aux variations d'une fonction de degré 2

Une entreprise fabrique un modèle de meuble en bois. Elle peut produire au maximum 100 meubles par jour.

Le bénéfice, exprimé en euros, réalisé par la fabrication et la vente de x **meubles** est noté $B(x)$ et est donné par :

$$B(x) = -2,5x^2 + 305x - 20.$$

On veut déterminer le nombre de meubles que l'entreprise doit fabriquer et vendre afin de réaliser le plus grand bénéfice possible. Pour cela, il faut déterminer le tableau de variations de la fonction B .

Fonctions polynômes de degré 2

Définition – Une fonction f est une fonction polynôme de degré 2 lorsqu'il existe trois réels a , b et c (avec $a \neq 0$) tels que f puisse s'écrire « sous la forme » : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemples – a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$; f est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = \dots\dots$, $b = \dots\dots$ et $c = \dots\dots$.

b) $B(x) = -2,25x^2 + 305x - 20$; B est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = \dots\dots$, $b = \dots\dots$ et $c = \dots\dots$.

Principe d'étude d'une fonction polynôme de degré 2 – D'après le paragraphe B, la dérivée d'une fonction polynôme de degré 2 est une fonction affine. Grâce au tableau de signes de la fonction affine que l'on établit grâce au paragraphe A, on peut construire le tableau de variations de la fonction en utilisant la méthode vue Fiche n°2 !

Etude de la fonction bénéfice

Etudions notre fonction bénéfice B définie sur $[0 ; 100]$ par : $B(x) = -2,5x^2 + 305x - 20$.

① On calcule la dérivée de la fonction B : $B'(x) = \dots\dots\dots$

$B'(x) = \dots\dots\dots$

② On étudie le signe de $B'(x) = \dots\dots\dots$,

affine avec $a = \dots\dots\dots$ et $b = \dots\dots\dots$.

On résout : $B'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

x	0	$\dots\dots$	100
Signe de $B'(x)$	$\dots\dots$	$\oplus$	$\dots\dots$
Variations de B			

On complète alors le tableau en mettant la solution obtenue « au-dessus » de 0, et en rajoutant le signe de $a \dots\dots 0$ « à droite » du 0.

③ On en déduit les variations de B sur $[0 ; 100]$ en complétant le tableau. Reste à calculer les trois images :

$\dots\dots\dots$

④ On en déduit le maximum de B sur $[0 ; 100]$ puis on interprète le résultat par une phrase dans le cadre du contexte de l'exercice.

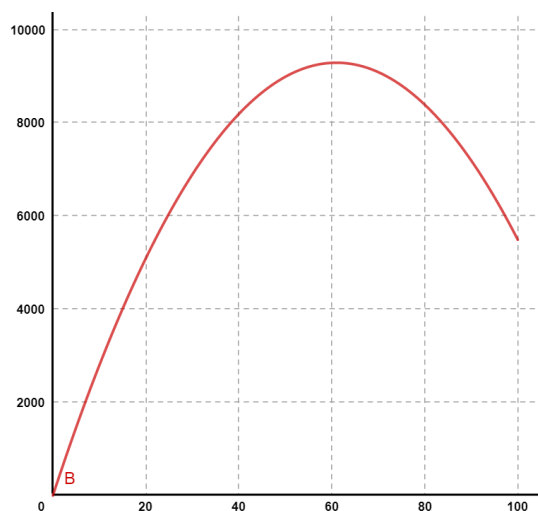
.....

.....

.....

.....

La courbe de la fonction B tracée ci-contre permet de vérifier que le résultat obtenu par le calcul est cohérent.



Méthode 6 : étudier les variations d'une fonction polynôme de degré 2

- ① On **dérive** la fonction à étudier (voir B). La dérivée sera dans ce paragraphe une fonction affine.
 - ② On construit le **tableau de signes de la dérivée** : on résout $ax + b = 0$; on met le signe de a « à droite » de 0.
 - ③ On en déduit les **variations de la fonction**, puis on calcule les images qui apparaissent dans le tableau.
- Utilisez bien l'expression de la fonction « de départ » et pas celle de la dérivée pour calculer les images !**
- ④ Si demandé, on donne la valeur **du maximum/du minimum** et on interprète.

Exemple 6 – Soit f définie sur $[0 ; 10]$ par : $f(x) = 3x^2 - 12x + 10$. Déterminer les variations de la fonction f et en déduire le minimum de la fonction f sur $[0 ; 10]$.

① $f'(x) =$

② $f'(x) = ax + b$ affine avec $a =$ et $b =$

On résout : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

.....

.....

a 0 donc on obtient le tableau :

③ On calcule les images :

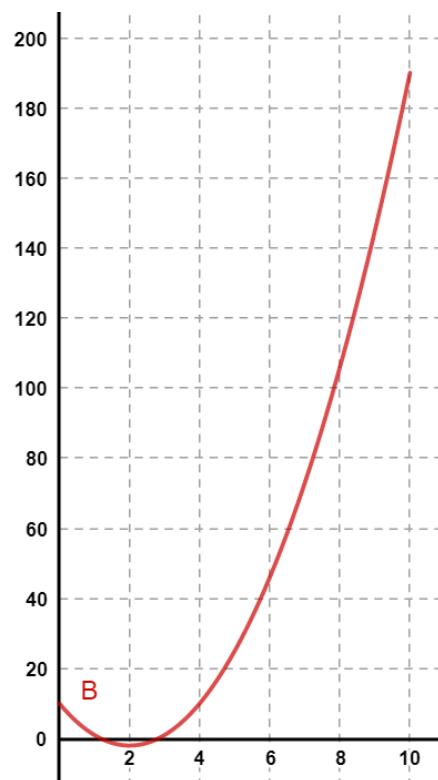
.....

.....

.....

④ Quel est le maximum de f sur $[0 ; 10]$?

.....



Exercices d'entraînement

Exercice 6 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - 18x + 1$.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$, en déduire les variations de f .
3. Quel est le minimum de f sur $\mathbb{R}$? En quelle valeur est-il atteint ?

Exercice 7 – Une entreprise produit et vend entre 2 et 24 montres par jour. On note x le nombre journalier de montres produites et vendues, on a alors : $2 \leq x \leq 24$. Le bénéfice journalier B réalisé suite à la fabrication et la vente de x montres est défini par : $B(x) = -x^2 + 24x - 80$.

1. Calculer l'expression de B' , dérivée de la fonction B .
2. Etudier le signe de $B'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction B .
3. Combien de montres l'entreprise doit-elle produire et vendre afin de réaliser un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

Exercice 6 – 1. $f'(x) = 6x - 18$.

$f'(x) = 6x - 18$ est affine avec $a = 6$ et $b = -18$.

2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 18 \Leftrightarrow x = 3$.

$a = 6$ donc $a > 0$ donc on a le tableau :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	–	$\emptyset$	+
var de f			

avec $f(3) = 3 \times 3^2 - 18 \times 3 + 1 = -26$.

3. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est -26 , atteint en 3.

Exercice 7 – 1. $B'(x) = -2x + 24$.

$B'(x) = -2x + 24$ est affine avec $a = -2$ et $b = 24$.

2. $B'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 24 = 0 \Leftrightarrow -2x = -24 \Leftrightarrow x = 12$.

$a = -2$ donc $a < 0$ donc on a le tableau :

x	2	12	24
$B'(x)$	+	$\emptyset$	–
var de $B(x)$			

$B(2) = -2^2 + 24 \times 2 - 80 = -36$; $B(12) = 64$; $B(24) = -80$

3. Le bénéfice est maximal pour 12 montres produites et vendues par jour : ce bénéfice est de 64 euros.

D) Notion d'extremum local

Pour une fonction polynôme de degré 2 f définie sur $\mathbb{R}$, on est nécessairement dans l'un des deux cas suivants :

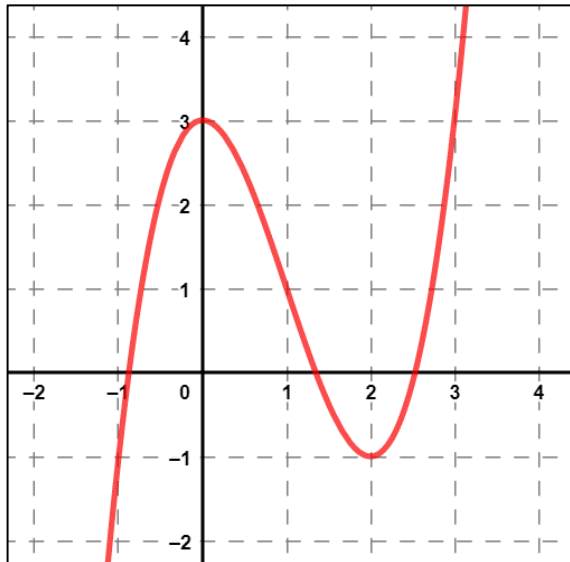
Lorsque $a > 0$...			
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	–	$\emptyset$	+
Variations de f			

On dit que $f(x_0)$ est le **minimum global** de f sur $\mathbb{R}$: toutes les images sont plus grandes que $f(x_0)$.

Lorsque $a < 0$...			
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	$\emptyset$	–
Variations de f			

On dit que $f(x_0)$ est le **maximum global** de f sur $\mathbb{R}$: toutes les images sont plus petites que $f(x_0)$.

Pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe ci-après, on peut définir les notions de « **maximum local** » et de « **minimum local** »...



x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	+	$\oplus$	-	$\oplus$	+
Variations de f					

→ 3 est un **maximum local** de f : même si on voit graphiquement que f prend des valeurs supérieures à 3, on remarque qu'« autour de 0 », par exemple sur l'intervalle ouvert $] -1; 1[$, 3 est la valeur maximale atteinte par f .

→ -1 est un **minimum local** de f : même si on voit graphiquement que f prend des valeurs inférieures à -1, on remarque qu'« autour de 2 », par exemple sur l'intervalle ouvert $]0; 3[$, -1 est la valeur minimale atteinte par f .

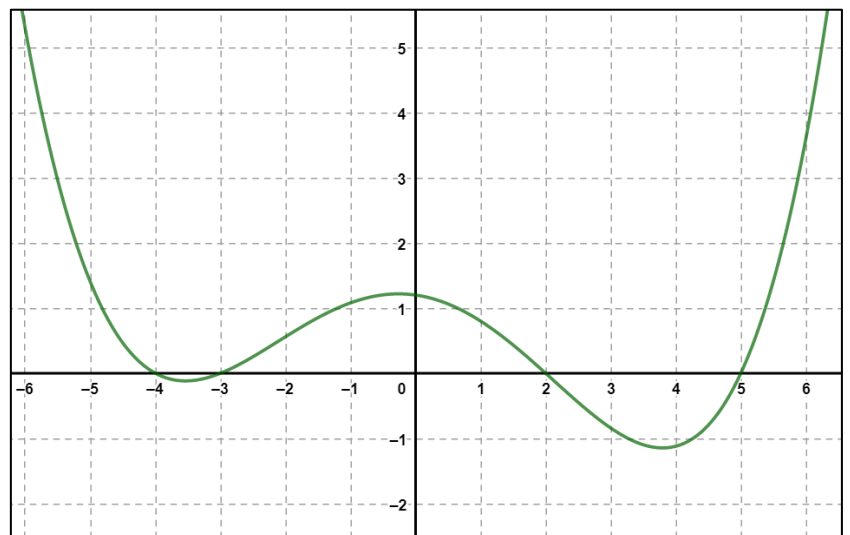
Avec ces nouvelles définitions, la fonction f admet deux nouveaux **extrema** (pluriel d'extremum) **locaux**, en 0 et en 2. On remarque qu'en ces deux valeurs, 0 et 2, la dérivée $f'(x)$ s'annule et change de signe.

Exemple 7 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$. On a représenté ci-dessous la courbe de sa fonction dérivée, f' .

1. Compléter ci-dessous le tableau de signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire le tableau de variations de f . Comme on n'a pas la formule de f , on ne donnera pas la valeur des images qui apparaissent dans le tableau.

2. Combien f va-t-elle admettre d'extrema locaux ? Préciser leur nature (maximum ou minimum).

.....



x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	