

Licence 1 AES
Université de Paris I – Panthéon-Sorbonne

Méthode quantitatives – Boîte à outils de calcul

Pierre Clément – Olivier Touzet

Dans cette boîte à outils, vous retrouverez les automatismes de calcul nécessaires pour réussir certains exercices de la matière « Méthodes Quantitatives pour les Sciences Sociales » du premier semestre.

Définition – Définir une **fonction** sur l'ensemble $\mathcal{D}$, c'est **associer** à tout nombre x de l'ensemble $\mathcal{D}$ un unique nombre réel, appelé **image de x par f** , noté $f(x)$ et prononcé « **f de x** ». On peut alors écrire : $x \mapsto f(x)$.

Ex – Si la fonction f associe à 2 le nombre 5, on peut noter l'association de quatre façons :

a) $f : 2 \mapsto 5$ b) 2 a pour **image** 5 c) l'**image** de 2 est égale à 5 d) $f(2) = 5$

Définition – Dans l'association : $a \mapsto b$, qui s'écrit aussi $f(a) = b$, on dit que a est un **antécédent de b** .

A savoir – $f : \underline{a} \mapsto \underline{b}$ s'écrit aussi $f(\underline{a}) = \underline{b}$

a est un **antécédent** de b b est **l'image** de a dans les parenthèses : **antécédent** de l'autre côté : **image**

Remarque – Pourquoi cette différence entre **l'image** et un antécédent ? **L'image** d'un nombre est **unique**. Par contre, si on a : $2 \mapsto 4$ et $12 \mapsto 4$, alors 4 a plusieurs antécédents : un nombre peut avoir **plusieurs** antécédents. L'association réalisée par la fonction peut se faire de plusieurs manières :

Un tableau de valeurs

Image de -2 ? **10** Image de 0 ? **-1**

Antécédent(s) de 2 ? **1 et 3**

x	-2	1	0	3	antécédents
$f(x)$	10	2	-1	2	images

Une formule – Par exemple, si une fonction f associe à tout nombre réel x son double $2 \times x$ (ce qui donne $1 \mapsto 2 \times 1 = 2$; $3 \mapsto 2 \times 3 = 6$; $5 \mapsto 2 \times 5 = 10$ etc), on note $x \mapsto 2 \times x$, ou encore $f(x) = 2 \times x$.

A) Pour calculer l'image d'un nombre a par une fonction f , on **remplace** x par a dans la formule de la fonction f .

Exemple : si $f(x) = 3 \times x + 6$, alors **l'image de 2** est le nombre : $f(2) = 3 \times 2 + 6 = 12$.

B) Pour vérifier que le nombre a est **un antécédent** d'un nombre b , on vérifie que l'image de a est égale à b , c'est-à-dire que : $f(a) = b$.

Exemple : on reprend $f(x) = 3 \times x + 6$. On veut vérifier que 10 est un antécédent de 36.

On calcule l'image de 10 : $f(10) = 3 \times 10 + 6 = 36$. Donc 10 est bien un antécédent de 36.

C) La règle des signes permet de connaître le **signe du résultat d'une multiplication** (appelé **produit**).

$\oplus \times \oplus = \oplus$ $\oplus \times \ominus = \ominus$ $\ominus \times \oplus = \ominus$ $\ominus \times \ominus = \oplus$

On peut retenir que « le **produit** de deux nombres de **même signe** est **positif**, tandis que le **produit** de deux nombres de **signes différents** est **négatif** ».

Exemple : le produit $(-3) \times (-5)$ est positif ; ce qui se vérifie à la calculatrice : $(-3) \times (-5) = 15$.

D) Le carré d'un nombre a , noté a^2 et lu « a au carré », est le produit $a \times a$.

Exemple : $4^2 = 4 \times 4 = 16$.

E) Pour appliquer une formule, on remplace les lettres par les nombres donnés sans oublier de faire apparaître les opérations « cachées » : par exemple, deux lettres écrites à la suite sont multipliées.

Exemple : $2a = 2 \times a$; $4x = 4 \times x$ et $ab = a \times b$.

F) Pour réduire une expression algébrique, on additionne ensemble les termes « semblables », c'est-à-dire qu'on « regroupe » les x élevés à la même puissance.

Exemple : $2x^2 + 6x + 1 + 3x^2 + 2x + 4 = 2x^2 + 3x^2 + 6x + 2x + 1 + 4 = 5x^2 + 8x + 5$.

G) Lorsqu'un nombre est multiplié par une parenthèse, on le **distribue** de la manière suivante :

$$2 \times (a + b) = 2 \times a + 2 \times b$$

$$2 \times (a - b) = 2 \times a - 2 \times b$$

Exemple : $6 \times (3 + b) = 6 \times 3 + 6 \times b = 18 + 6b$ et $6 \times (4 - b) = 6 \times 4 - 6 \times b = 24 - 6b$.

H) Lorsqu'on **distribue un nombre négatif**, on retrouve parfois un nombre négatif précédé d'un autre signe $-$.

On peut alors remplacer le signe $-$ par -1 et appliquer la règle des signes : $-(-15) = -1 \times (-15) = +15$.

Exemple : $(-5) \times (x - 3) = (-5) \times x - (-5) \times 3 = -5x - (-15) = -5x + 15$.

I) Pour retirer des **parenthèses précédées d'un signe $-$** , on peut remplacer le signe $-$ par -1 puis **le distribuer**.

$$\text{Exemple : } 6x + 3 - (2x - 7) = 6x + 3 - 1 \times (2x - 7) = 6x + 3 - 2x + 7 = 4x + 10.$$

Ci-dessus, on a sauté des étapes de calcul pour aller plus vite en appliquant directement la règle des signes.

J) On appelle « **puissances** » de 10 les différents résultats obtenus en multipliant 10 par lui-même. **L'exposant** indique le nombre de fois que 10 se retrouve dans la multiplication. Par **exemple**, $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$ car l'exposant de cette puissance vaut 3. On retiendra que $10^0 = 1$, que $10^1 = 10$, et qu'on peut aussi manipuler des puissances à exposants négatifs de la manière suivante :

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01 \quad \text{et} \quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0,001 \quad \text{etc.}$$

K) Il existe une règle de calcul pour multiplier **deux puissances du même nombre**. Lorsque a est un nombre réel non nul et m et n deux nombres entiers, on a la relation :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Exemple : $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$.

L) Il existe une autre règle pour **calculer la puissance d'un produit** : elle est notamment utile pour calculer le carré d'un grand nombre. Lorsque a et b sont deux nombres réels non nul et m un nombre entier, on a la relation :

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m.$$

Exemple : $50^2 = (5 \times 10)^2 = 5^2 \times 10^2 = 25 \times 100 = 2\,500$.

M) Si x est un nombre réel, on rappelle que $x \times x = x^2$ et que $x = x^1$. On a donc : $x \times x^2 = x^1 \times x^2 = x^{1+2} = x^3$ mais aussi : $x^2 \times x^2 = x^{2+2} = x^4$ etc. Vous avez alors les outils pour **distribuer** « du x » dans une parenthèse.

Exemple : $x \times (3 + 5x^2) = x \times 3 + x \times 5x^2 = 3 \times x + 5 \times x^1 \times x^2 = 3x + 5 \times x^{1+2} = 3x + 5x^3$.

N) Factoriser une expression, c'est **transformer une somme en un produit** : cela revient à faire le *contraire* du calcul du point précédent. Dans la formule ci-dessous, k est appelé « **facteur commun** ».

Formule	
$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$	
Exemple classique avec une somme	$2x + 10 = 2 \times x + 2 \times 5 = 2 \times (x + 5)$
Avec une différence	$4x - 24 = 4 \times x - 4 \times 6 = 4 \times (x - 6)$
Facteur commun : x !	$2x^2 - 3x = 2x \times x - 3 \times x = x \times (2x - 3)$

Exercices

Exercice A – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 7$. Calculer l'image de 10, puis celle de -4 .

.....

Exercice B – Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3$. Vérifier que 3 et -3 sont deux antécédents de 42.

.....

Exercice C – Compléter le tableau suivant en indiquant **d'abord** le signe du résultat, puis le résultat. Vous pouvez vous aider de la calculatrice pour déterminer ce résultat.

Produit	Signe	Résultat	Produit	Signe	Résultat
8×4			$2 \times (-8)$		
$(-2) \times 6$			$(-7) \times (-9)$		

Exercice D – Donner la valeur de chacune des expressions suivantes :

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a) $5^2 =$ | b) $6^2 =$ |
| c) $(-5)^2 =$ | d) $(-6)^2 =$ |
| e) $-(-5)^2 =$ | f) $-(-6)^2 =$ |

Exercice E – Calculer différentes valeurs de Δ (« delta ») avec les valeurs données de a , b et c .

$\Delta = b^2 - 4ac$			
$a = 1$	$b = 3$	$c = 2$	$\Delta =$
$a = -2$	$b = 7$	$c = 5$	$\Delta =$
$a = 8$	$b = -6$	$c = 4$	$\Delta =$
$a = -3$	$b = -2$	$c = -7$	$\Delta =$

Exercice F – Réduire les expressions suivantes. On peut entourer les termes « semblables » d’une même couleur.

- a) $6x^2 + 3x^2 + 4x + 5x + 6 =$
- b) $3x^2 + 7x + 1 + 5x^2 + 2x + 4 =$
- c) $7x^2 + 8x - 5 - 4x^2 - 6x + 9 =$
- d) $3x^2 + 6x + x^2 - x =$

Exercice G – Distribuer chacune des expressions suivantes.

- a) $2 \times (x + 3) =$
- b) $7 \times (x - 8) =$
- c) $5 \times (2x + 4) =$
- d) $10 \times (3x - 9) =$
- e) $4(3 - 2x) - 2x - 5 =$

Exercice H – Distribuer les nombres négatifs suivants pour développer les expressions.

- $(-4) \times (x - 8) =$
- $(-2) \times (7x - 5) =$
- $(-3) \times (9 - 6x) =$
- $(-5) \times (2x^2 - 3x + 7) =$

Exercice I – Retirer les parenthèses dans les expressions suivantes et réduire les expressions obtenues.

- $8x - 5 - (3x - 8) =$
- $12 - 7x - (-9 + 2x) =$
- $9x^2 + 3x - (5x^2 - 2x) =$
- $4x - 6 - (7x^2 - 6x - 1) =$

Exercice J – Calculer ces puissances, sachant que les outils de la boîte s’appliquent pour d’autres nombres que 10.

$10^4 =$	$2^3 =$	$5^0 =$
$4^3 =$	$12^1 =$	$3^4 =$
$2^{-3} =$	$2^{-4} =$	$10^{-5} =$

Exercice K – Exprimer sous la forme d’une seule puissance les expressions suivantes.

- a) $3^7 \times 3^4 =$ b) $3^6 \times 3^5 =$
- c) $3^{10} \times 3 =$ d) $3^{11} \times 3^0 =$

Exercice L – Calculer les carrés des grands nombres suivants en utilisant la décomposition proposée.

- $60^2 = (6 \times 10)^2 =$
- $80^2 = (8 \times 10)^2 =$

Exercice M – Distribuer pour transformer le produit en somme : on dit qu'on a **développé** l'expression algébrique.

$$x \times (2 + 4x) = \dots\dots\dots$$

$$x \times (9 + 3x^2) = \dots\dots\dots$$

$$x \times (7x^2 - 2x) = \dots\dots\dots$$

$$x^2 \times (8 - 5x^2) = \dots\dots\dots$$

Exercice N – Factoriser à l'aide d'un facteur commun les expressions. **N'oubliez pas les parenthèses !**

$$3x + 18 = 3 \times x + 3 \times 6 = \dots\dots\dots$$

$$5x - 35 = 5 \times x - 5 \times 7 = \dots\dots\dots$$

$$4x^2 + 9x = 4x \times x + 9 \times x = \dots\dots\dots$$

$$2x + 20 = \dots\dots\dots$$

$$6x - 12 = \dots\dots\dots$$

$$5x^2 + 13x = \dots\dots\dots$$

$$8x - 8 = \dots\dots\dots$$