Rappels mathématiques

La **concurrence parfaite** est facilement modélisable par l'outil mathématique. En effet, l'absence de cadre socio-culturel qui caractérise ce modèle et l'hypothèse de rationalité permettent de formaliser simplement les problèmes microéconomiques avec le langage mathématique. Attention, la finalité de la microéconomie n'est pas la maîtrise des mathématiques mais comprendre et expliquer comment existe et fonctionne une économie décentralisée idéale. En d'autres termes, les mathématiques sont un instrument au service de la microéconomie.

1. L'utilisation des fonctions Cobb-Douglas nécessite de maitriser les **règles de calcul sur les puissances**. Soient $n, m \in \mathbb{Q}$, alors :

- $x^0 = 1, \forall x \in \mathbb{R}^*$
- $x^1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$
- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- $x^n \times x^m = x^{n+m}$
- $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
- $(x^n)^m = x^{(n \times m)}$
- $(x \times y)^n = x^n \times y^n$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
- $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

2. Les « meilleurs choix » des consommateurs et des producteurs sont le résultat de **calculs d'optimisation**. Mathématiquement, le « meilleur choix » est la ou les valeur(s) x_0 qui annule(nt) la **dérivée première** d'une fonction $f(x)$. Le signe de la **dérivée seconde** en x_0 nous indique s'il s'agit d'un minimum, d'un maximum ou d'un point d'inflexion.

2.1. Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Une fonction f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement, $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, admet une limite finie, l, lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors **le nombre dérivé de** f en x_0 et est notée $f'(x_0)$:

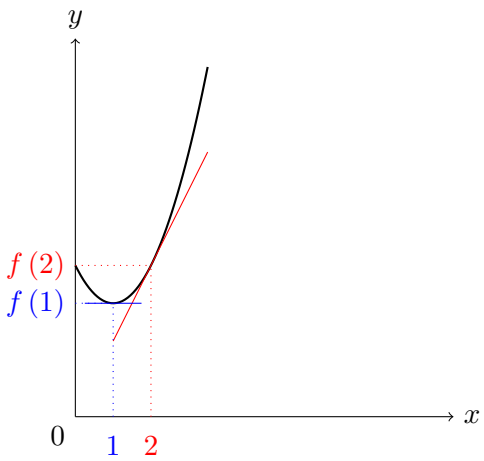
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = l$$

Déterminons le nombre dérivé de $f(x) = x^2$ en x_0
$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 \times \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} =$
$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0$

Remarque (Théorème) : Si la fonction f est dérivable en x_0, alors la fonction f est continue en x_0. La réciproque est fausse.

2.2. Lorsque la fonction f est dérivable en x_0, la courbe représentative de la fonction f admet au point $A = (x_0, f(x_0))$ une **tangente** dont l'équation est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Si une fonction est dérivable, sa courbe représentative admet une tangente en chacun de ses points.

Quelles sont les équations des tangentes à la fonction $f(x) = x^2 - 2 \times x + 4$ en $x = 1$ et en $x = 2$ (cf. Fig. ci-dessous) ?
Le nombre dérivé de $f(x)$ en x_0 est $f'(x_0) = 2 \times x_0 - 2$. La tangente en $x = 1$ a pour équation : $y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$ d'où $y = 3$. Elle est horizontale (droite bleue) car le point $(1, 3)$ est un extremum (cf. 2.5). La tangente en $x = 2$ a pour équation : $y = f'(2) \times (x - 2) + f(2)$ d'où $y = 2 \times x$ (droite rouge).



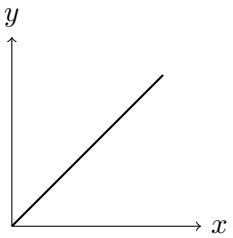
2.3. Le signe de la dérivée première permet de connaître le **sens de variation** de la fonction.
Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors :
Si $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$est constante ;
Si $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante ; $f'(x) > 0 \Rightarrow f$est strictement croissante ;
Si $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante ; $f'(x) < 0 \Rightarrow f$est strictement décroissante.

Une fonction f est **monotone** sur $]a, b[$ si elle est croissante, décroissante ou constante sur $]a, b[$. Ainsi, une **transformation monotone croissante** d'une fonction est la modification d'une fonction f par une autre fonction g dont la dérivée première est strictement positive, $g'(x) > 0$, sur l'ensemble du domaine de définition de f.

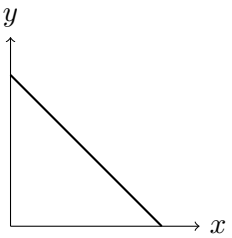
2.4. La **concavité/convexité** de la fonction dépend du signe de la dérivée seconde. La **dérivée seconde** est la dérivée de la dérivée première si elle existe. Ainsi,
si $f''(x) < 0$ sur l'intervalle I, alors la fonction est concave sur I. La tangente est au-dessus de la courbe représentative de f.
si $f''(x) > 0$ sur l'intervalle I, alors la fonction est convexe sur I. La tangente est en dessous de la courbe représentative de f.
si $f''(x) = 0$, alors la fonction admet un point d'inflexion en x. La tangente traverse la courbe représentative de f.

2.5. x_0 est un **point candidat à un extremum** si la dérivée première s'annule en x_0 : $f'(x_0) = 0$. Pour savoir s'il s'agit d'un **minimum**, d'un **maximum** ou d'un point d'inflexion, on calcule la valeur de la dérivée seconde au point candidat :
Si $f''(x_0) < 0$ alors le point candidat est un minimum.
Si $f''(x_0) > 0$ alors le point candidat est un maximum.
Si $f''(x_0) = 0$ alors le point candidat est un point d'inflexion.

Fonctions linéaires

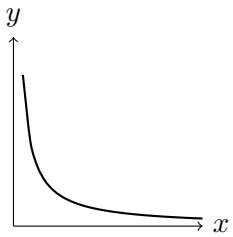


$f'(x) > 0$
$f''(x) = 0$

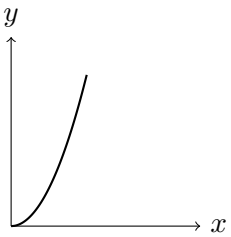


$f'(x) < 0$
$f''(x) = 0$

Fonctions convexes

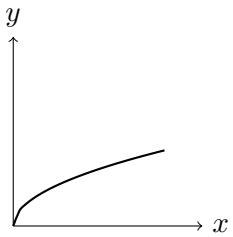


$f'(x) < 0$
$f''(x) > 0$

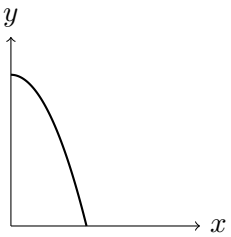


$f'(x) > 0$
$f''(x) > 0$

Fonctions concaves



$f'(x) > 0$
$f''(x) < 0$



$f'(x) < 0$
$f''(x) < 0$

Dérivées premières des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n-1}} = -n \cdot x^{-(n-1)}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$			
Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	$k \cdot u(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \cdot u'(x)$
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	$\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $v(x) \neq 0$	$\frac{u(x)' \times v(x) - u(x) \times v(x)'}{v(x)^2}$
$u(x)^n$	$n \times u(x)' \times u(x)^{n-1}$	$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u(x)'}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = \ln u(x)$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

3. Les fonctions d'utilité et les fonctions de production sont des fonctions à deux variables. Une **fonction à deux variables**, $z = f(x, y)$, est définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. En microéconomie, les arguments des fonctions étant des quantités de biens ou des quantités d'inputs, on peut réduire le domaine de définition à $(R_+^*)^2$. Le consommateur et le producteur effectuent, sans arrêt, des calculs d'**optimisation sous contrainte**. Les premiers cherchent à maximiser leur utilité sous contrainte budgétaire alors que les seconds souhaitent minimiser les coûts sous contrainte technique. Mathématiquement, on souhaite optimiser (maximiser ou minimiser) la fonction $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = c$. Deux méthodes sont envisageables pour optimiser sous contrainte une fonction à deux variables : la méthode par substitution et le multiplicateur de Lagrange.

3.1. La **méthode par substitution** consiste, tout d'abord, à exprimer y en fonction de x (ou l'inverse) dans la contrainte puis à substituer la contrainte dans la fonction objectif à optimiser. On se retrouve alors avec un problème d'optimisation sans contrainte d'une fonction d'une variable (cf. 2.5).

Optimiser la fonction $f(x, y) = x^2 + y$ sous la contrainte $x^3 + y = 0$.
On exprime y en fonction de x dans la contrainte (plus facile que x en fonction de y) et on substitue dans la fonction objectif : $x^3 + y = 0 \Rightarrow y = -x^3$ donc $f(x, y(x)) = x^2 - x^3 = x^2(1 - x) = g(x)$.

On dérive par rapport à la seule variable x et on annule la dérivée (condition de premier ordre) : $g'(x) = 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - 3x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{2}{3}$.

On en déduit les deux points candidats à un extremum : quand $x_1 = 0$, alors $y_1 = 0$ et quand $x_2 = \frac{2}{3}$, alors $y_2 = \frac{-8}{27}$. Les points $(0,0)$ et $(\frac{2}{3}, \frac{-8}{27})$ sont candidats à un extremum.

On calcule la valeur de la dérivée seconde au(x) point(s) candidat(s) pour déterminer la nature des extremum :

$g''(x) = 2 - 6x$, donc $g''(0) = 2 > 0$ d'où $(0,0)$ est un minimum. Et, $g''\left(\frac{2}{3}\right) = -2 < 0$ d'où $\left(\frac{2}{3}, \frac{-8}{27}\right)$ est un maximum.

3.2. La méthode de Lagrange ou Lagrangien nécessite le calcul des **dérivées partielles premières**. Les dérivées partielles premières mesurent l'influence des variations d'une variable quand l'autre est fixe. Elles permettent de conduire un raisonnement toutes choses égales par ailleurs. Lorsque la fonction comprend deux variables, il existe deux dérivées partielles premières : $f'_x(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$. Techniquement, on dérive la fonction f par rapport à x en considérant y comme un paramètre (c'est-à-dire comme une constante). Analytiquement, on étudie les effets d'une variation de x sur $f(x,y)$ quand y est constant. Symétriquement, la dérivée partielle de f par rapport à y s'obtient en considérant x comme un paramètre : $f'_y(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Soit une fonction Cobb-Douglas : $f(x,y) = x^\alpha \times y^\beta$ avec $\alpha, \beta > 0$. Les dérivées partielles premières sont $f'_x(x,y) = \alpha \times x^{\alpha-1} \times y^\beta$ et $f'_y(x,y) = \beta \times x^\alpha \times y^{\beta-1}$.

3.3. Chaque dérivée partielle première peut à son tour être dérivée par rapport à l'une ou l'autre des variables donc il existe quatre **dérivées partielles secondes** pour une fonction à deux variables.
$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial f'_x(x,y)}{\partial x}$. Techniquement, il s'agit de dériver la dérivée partielle première par rapport à x à nouveau par rapport à x en considérant y comme un paramètre. Analytiquement, on étudie les effets d'une variation de x sur $f'_x(x,y)$ lorsque y est constant. On calcule les trois autres dérivées partielles secondes en appliquant la même méthode : $f''_{yy}(x,y) = \dfrac{\partial f'_y(x,y)}{\partial y}$; $f''_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial f'_x(x,y)}{\partial y}$; $f''_{yx}(x,y) = \dfrac{\partial f'_y(x,y)}{\partial x}$. On vérifie que : $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$ selon le théorème de Schwartz (à la condition que les dérivées partielles secondes soient définies et continues au voisinage du point considéré).

Soit la fonction Cobb-Douglas précédente. Les dérivées partielles secondes sont :

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial\left(\alpha \times x^{\alpha-1} \times y^\beta\right)}{\partial x} = \alpha \times (\alpha-1) \times x^{\alpha-2} \times y^\beta ;$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial\left(\beta \times x^\alpha \times y^{\beta-1}\right)}{\partial y} = \beta \cdot (\beta-1) \cdot x^\alpha \cdot y^{\beta-2} ;$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial\left(\alpha \times x^{\alpha-1} \times y^\beta\right)}{\partial y} = \alpha \times \beta \times x^{\alpha-1} \times y^{\beta-1} ;$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial\left(\beta \times x^\alpha \times y^{\beta-1}\right)}{\partial x} = \alpha \times \beta \times x^{\alpha-1} \times y^{\beta-1}.$$

3.4. L'optimisation de la fonction $f(x,y)$ sous contrainte $g(x,y) = c$ en appliquant la **méthode de Lagrange** nécessite de construire une nouvelle fonction, appelée le **Lagrangien** :

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) \pm \lambda(c - g(x,y))$. On commence par écrire la fonction à optimiser, ensuite on additionne **ou** on soustrait la contrainte annulée à droite **ou** à gauche. La présence des deux « ou » dans la phrase précédente implique qu'il existe quatre manières d'écrire le lagrangien (lorsque la contrainte est une égalité) où λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte.

Les conditions nécessaires impliquent que les trois dérivées partielles premières s'annulent :
$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$ La résolution de ce système permet de trouver le ou les couple(s) (x_0, y_0) candidat(s) à un extremum.

Afin de déterminer la nature des couples candidats, on construit la matrice hessienne bordée composée des dérivées partielles secondes du Lagrangien et des dérivées partielles premières de la contrainte : $H_b(x,y) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}''_{xx} & \mathcal{L}''_{xy} & g'_x \\ \mathcal{L}''_{yx} & \mathcal{L}''_{yy} & g'_y \\ g'_x & g'_y & 0 \end{pmatrix}$

On calcule le déterminant de cette matrice pour les points candidats :
$|H_b(x_0,y_0)| = \mathcal{L}''_{xx}(x_0,y_0) \cdot \left(g'_y(x_0,y_0)\right)^2 + \mathcal{L}''_{xy}(x_0,y_0) \cdot g'_x(x_0,y_0) \cdot g'_y(x_0,y_0) + g'_x(x_0,y_0) \cdot \left(\mathcal{L}''_{xy}(x_0,y_0) \cdot g'_y(x_0,y_0) - \mathcal{L}''_{yy}(x_0,y_0) \cdot g'_x(x_0,y_0)\right)$. Le signe de ce déterminant indique la nature du ou des couple(s) candidat(s) à un extremum :
- Si $|H_b(x_0,y_0)| > 0$, alors (x_0,y_0) est un maximum ;
- Si $|H_b(x_0,y_0)| < 0$, alors (x_0,y_0) est un minimum ;
- Si $|H_b(x_0,y_0)| = 0$, on ne peut pas conclure.

Optimiser la fonction $f(x,y) = x^2 + y$ sous la contrainte $x^3 + y = 0$.
On construit le Lagrangien : $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y + \lambda\left[0 - (x^3 + y)\right]$.
$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0 & \Rightarrow 2x - 3\lambda x^2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0 & \Rightarrow 1 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 & \Rightarrow -x^3 - y = 0 \end{cases}$

Avec les deux premières équations, on exprime x en fonction de y (ou l'inverse). La seconde équation nous donne $\lambda = 1$. On substitue dans la première équation et on obtient : $2x - 3x^2 = 0$ donc $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{2}{3}$. On substitue, ensuite, dans la troisième équation afin de déterminer la valeur de y : quand $x_1 = 0$, alors $y_1 = 0$ et quand $x_2 = \frac{2}{3}$ alors $y_2 = \frac{-8}{27}$. On retrouve les deux points candidats précédents : $(x_1 = 0, y_1 = 0, \lambda = 1)$ et $\left(x_2 = \frac{2}{3}, y_2 = \frac{-8}{27}, \lambda = 1\right)$.

On calcule les quatre dérivées secondes : $\mathcal{L}''_{xx}(x,y,\lambda) = 2 - 6\lambda x$; $\mathcal{L}''_{xy}(x,y,\lambda) = 0$; $\mathcal{L}''_{yx}(x,y,\lambda) = 0$; $\mathcal{L}''_{yy}(x,y,\lambda) = 0$. Et les dérivées premières de la contrainte : $g'_x = 3x^2$ et $g'_y = 1$.

On construit la matrice hessienne bordée : $H_b(x,y) = \begin{pmatrix} 2-6\lambda x & 0 & 3x^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3x^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
On calcule le déterminant de la matrice : $|H_b(x,y)| = (2-6\lambda x)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix} + 3x^2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3x^2 & 1 \end{pmatrix} = (2-6\lambda x)\cdot(-1) = -2+6\lambda x$. On sait que $\lambda = 1$, donc $|H_b(x,y)| = -2-6x$
On calcule la valeur du déterminant pour les points candidats : $|H_b(0,0)| = -2 < 0$. C'est un minimum. Et $|H_b\left(\frac{2}{3}, \frac{-8}{27}\right)| = 2 > 0$. C'est un maximum.

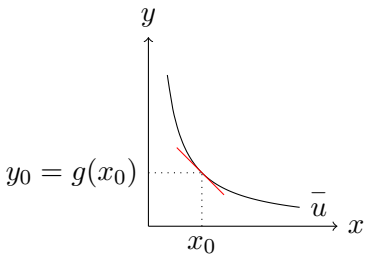
3.5. La **différentielle totale** d'une fonction à deux variables indique les effets d'une variation conjointe de x et y sur $f(x,y)$. En supposant que $f(x,y)$ soit dérivable par rapport à x et à y et en posant dx et dy les variations de x et y, alors la différentielle totale de la fonction f est égale à $df(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \times dx + \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \times dy$.

Soit $f(x,y) = x \times y$, alors $df = y \times dx + x \times dy$. Si f est une fonction d'utilité, alors le long d'une courbe d'indifférence le niveau d'utilité est constant par définition, donc $df = 0$ d'où $y \times dx + x \times dy = 0$. On exprime ainsi le TMS associé à cette fonction d'utilité : $\dfrac{-dy}{dx} = \dfrac{y}{x} = TMS$. Pour montrer que le TMS est le rapport des utilités marginales, il faut utiliser le théorème des fonctions implicites (cf. 3.7).

3.6. Une fonction est dite **homogène** de degré k si : $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k \times f(x,y)$ avec $\lambda > 1$. Si une fonction est homogène de degré k, alors ses dérivées partielles premières, si elles existent, sont homogènes de degré $k-1$. Cette propriété des fonctions homogènes permet d'énoncer la **relation d'Euler**. Si $f(x,y)$ est homogène de degré k et admet des dérivées partielles alors : $x \cdot f'_x(x,y) + y \times f'_y(x,y) = k \times f(x,y)$.

Soit $f(x,y) = x \times y$ une fonction de production. Les dérivées partielles premières expriment les productivités marginales des inputs : $f'(x) = y$ et $f'(y) = x$. Cette fonction est homogène de degré 2. En effet, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \times \lambda y = \lambda^2 \times f(x,y)$. Donc $x \times f'_x(x,y) + y \times f'_y(x,y) = x \times y + y \times x = 2 \times x \times y$ et $2 \times f(x,y) = 2 \times x \times y$. La relation d'Euler est bien vérifiée. En termes économiques, il s'agit de la règle d'épuisement du produit.

3.7. Le calcul du TMS et du TMST repose sur le **Théorème des fonctions implicites**. Quand on écrit $f(x,y) = x \times y$, alors la fonction f est explicitement définie par x et y ainsi en connaissant x et y on peut calculer directement les valeurs de $f(x,y)$. Il arrive qu'une fonction existe sans que l'on connaisse sa forme. Par exemple, soit $U(x,y)$ une fonction d'utilité et sa courbe de niveau (courbe d'indifférence), passant par le point (x_0, y_0), $U(x_0, y_0) = \bar{u}$. Peut-on écrire l'équation, $U(x,y) = \bar{u}$, sous la forme $y = g(x)$ au voisinage de (x_0, y_0) (cf. Fig. ci-dessous) ? Si oui, quelle est la pente (l'équation) de la tangente à g au voisinage de (x_0, y_0) ? Si la fonction g existe, on dit que c'est la fonction implicite définie par l'équation $U(x,y) = \bar{u}$.



Théorème : Soit une fonction $f(x, y)$ à dérivées partielles continues au voisinage d'un point (x_0, y_0) telle que $f(x_0, y_0) = a$ avec a fixé et $a \in \mathbb{R}$, et $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, alors, il existe une fonction g telle que $g(x_0) = y_0$ et telle que $f(x_0, g(x_0)) = a$ pour x se trouvant dans un voisinage de a. En outre cette fonction est continue et dérivable dans ce voisinage avec : $df(x, g(x)) = f'_x \cdot 1 + f'_y \times \dfrac{dg(x)}{dx} = 0$ d'où $\dfrac{-dg(x)}{dx} = g'(x) = \dfrac{f'_x}{f'_y}$. Ainsi, on peut calculer la dérivée en un point de la fonction g sans connaitre explicitement cette fonction.

Soit une fonction d'utilité $U(x, y) = x \times y^2$ passant par le point $(2, 2)$. La courbe d'indifférence passant par ce point est de niveau 8.
Les dérivées partielles de $U(x, y)$ sont continues et strictement positives sur son domaine de définition, $(\mathbb{R}^*_+)^2$. On peut appliquer le théorème des fonctions implicites. Ainsi, la courbe de niveau passant par le point $(2, 2)$ admet une tangente de pente : $g'(x) = -\dfrac{U'_x(2,2)}{U'_y(2,2)} = -\dfrac{y^2}{2 \times x \times y} = -\dfrac{2^2}{2 \times 2 \times 2} = \dfrac{-1}{2}$. Soit, la valeur du TMS pour le panier de biens $(2, 2)$. L'équation de la tangente passant par $(2, 2)$: $y = g'(2)(x - 2) + g(2) = \dfrac{-1}{2}x + 3$.