Exercice 11.

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$.

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3.$$

On cherche les coordonnées de P relativement à la famille $F = \{1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3\}$, autrement dit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{aligned} P(X) &= \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 (1+X) + \lambda_3 (1+X+X^2) \\ &\quad + \lambda_4 (1+X+X^2+X^3). \\ &= \lambda_4 X^3 + (\lambda_3+\lambda_4) X^2 + (\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4) X \\ &\quad + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4) \cdot 1 \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients (puisque $\{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$),

on obtient

$$\begin{cases} \lambda_4 = a_3 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = a_2 \Rightarrow \lambda_3 = a_2 - a_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = a_1 \Rightarrow \lambda_2 = a_1 - a_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = a_0 \Rightarrow \lambda_1 = a_0 - a_1 \end{cases}$$

Exercice 12

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + z = 0\}.$$

$$= \{(x, x+z, z),\ x, z \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \text{Vect}\{(1,1,0); (0,1,1)\}.$$

Or, $\forall x, z \in \mathbb{R}$, $x(1,1,0) + z(0,1,1) = (0,0,0)$

ssi $(x, x+z, z) = (0,0,0)$

i.e $\begin{cases} x = 0 \\ x + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z = 0.$

Cette famille est libre et génératrice dans S, c'est donc une base de S.

Exercice 15 Dans $\mathbb{R}^4$,

$$U = \text{Vect}\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$$

où $\vec{u_1} = (1, 2, -1, 3)$
$\vec{u_2} = (2, 4, 1, -2)$
$\vec{u_3} = (3, 6, 0, 1)$

$$W = \text{Vect}\{\vec{w_1}, \vec{w_2}\}$$

où $\vec{w_1} = (1, 2, -4, 11)$
$\vec{w_2} = (2, 4, -5, 14)$.

dim W ? On sait déjà que $\dim W \leq 2$

On vérifie que $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}\}$ est une famille libre et donc c'est une base de W, d'où

$$\dim W = 2.$$

On remarque que $\vec{u_3} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$ donc $\dim U \leq 2$

De plus, $\begin{cases} \vec{w_1} = 3\vec{u_1} - \vec{u_2} \in U \\ \vec{w_2} = 4\vec{u_1} - \vec{u_2} \in U \end{cases}$

d'où $W = \text{Vect}\{\vec{w_1}, \vec{w_2}\} \subset U \Rightarrow \begin{cases} \dim U = 2 \\ W = U. \end{cases}$

Exercice 16 dans $\mathbb{R}^4$

$\vec{x_1} = (1,0,1,0)$, $\vec{x_3} = (1,1,1,0)$

$\vec{x_2} = (0,1,0,0)$, $\vec{x_4} = (0,1,1,0)$

$U_1 = \text{Vect}\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}$, $U_2 = \text{Vect}\{\vec{x_3}, \vec{x_4}\}$.

On remarque $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}$ et $\{\vec{x_3}, \vec{x_4}\}$ forment 2 familles libres dans $\mathbb{R}^4$ d'où $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$.

$U_1 + U_2 = \{\vec{u_1} + \vec{u_2}$, $\vec{u_1} \in U_1$ et $\vec{u_2} \in U_2\}$.

$= \text{Vect}\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4}\}$.

$\in U_1 \cap U_2$

Or, $\vec{x_3} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$ donc $U_1 + U_2 = \text{Vect}\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_4}\}$

On peut vérifier que cette famille est libre d'où

$\dim(U_1 + U_2) = 3$ (c'est une base).

Formule de Grassman : $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$

$\Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = 4 - 3 = 1$.

Rq : $U_1 \cap U_2 = \text{Vect}\{\vec{x_3}\}$.

Exercice 17. Dans $\mathbb{R}_3[X]$. (dim 4).

$$F = \{ P_1(X) = 1+X+X^2+X^3,\ P_2(X) = 1-X-X^3,\ P_3(X) = 1-X^2-X^3,$$
$$P_4(X) = 3-X^3 \} \subset \mathbb{R}_3[X] \ (\subset \mathbb{R}_4[X]).$$

F contient 4 vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$, lui-même de dimension 4 et on en déduit que F engendre $\mathbb{R}_3[X]$ ssi F est libre (→ base).

Or, $P_4 = P_1 + P_2 + P_3$ donc F n'est pas une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ et donc pas une famille génératrice.

Elle n'est pas libre non plus dans $\mathbb{R}_4[X]$.

On vérifie que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est libre et est donc une base de $\mathrm{Vect}\{F\}$.

Exercice 18 (dans $\mathbb{R}^6$)

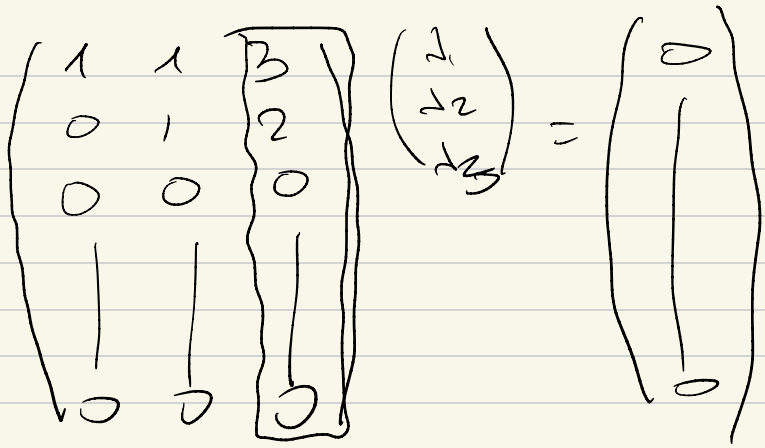
Pour vérifier si une famille est libre, on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss à la matrice dont les colonnes sont données par les composantes des vecteurs

$\vec{V_1} = (1, 2, -3, 4, 0, 1)$
$\vec{V_2} = (1, 3, -4, 6, 5, 4)$
$\vec{V_3} = (3, 8, -11, 16, 10, 9)$

$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \vec{V_i} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ -3 & -4 & -11 \\ 4 & 6 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ \lambda_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En particulier, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ convient, i.e $\vec{v_1} - 2\vec{v_2} + \vec{v_3} = \vec{0}$

Les vecteurs ne forment pas 1 famille libre. Par contre, on peut vérifier que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ est libre d'où

$$\dim(\text{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}) = 2.$$

et que $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ en est une base.

Exercice 19 dans $\mathbb{R}^4$.

$\vec{u_1} = (1, -1, 2, 0)$
$\vec{u_2} = (2, 1, -1, 1)$
$\vec{u_3} = (0, 1, 2, 3)$
$\vec{u_4} = (3, -1, -1, 1)$.

$F = \{\vec{u_i}, 1 \leq i \leq 4\}$.

$\text{rg } F = \dim(\text{Vect}(F))$.

Pour vérifier si la famille est libre on applique le pivot de Gauss au système :

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 17 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

On en déduit que la famille est libre et que, par conséquent $\operatorname{rg} = 4$.