
G
O
D
O
O
O
O
D

Chapitre "applications linéaire" :

Thm : Toute applic. linéaire $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est de la forme

$$\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$x \to Ax$$

où A est une matrice dans $\mathbb{R}^{n \times m}$ dont les colonnes sont les images par φ des vecteurs de la base canonique :

$$A = \left(\varphi(\vec{e}_1) \mid \varphi(\vec{e}_2) \mid \dots \mid \varphi(\vec{e}_m) \right)$$



ce thm est un cas particulier de :

Thm : Soit $\varphi : E \to F$ une appl. linéaire

Soit $\mathcal{A}$ une base de E

Soit $\mathcal{B}$ " " " F

$\vec{v} = \varphi(\vec{u})$, $\vec{v} \in F$, $u \in E$ $\Longleftrightarrow$

$A\bar{U} = \bar{V}$ où :

- $\bar{U}$ est un vecteur colonne formé par les coord. de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{A}$
- $\bar{V}$ est un vecteur colonne formé par les coord. de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$
- A = matrice dont les colonnes sont les coord de $\varphi(\vec{a}_1)$, $\varphi(\vec{a}_2)$ ... $\varphi(\vec{a}_n)$ dans la base $\mathcal{B}$

N.B. Pour le thm précéd. prendre $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ et bases canoniques !



Preuve : On va écrire $\varphi(\vec{a}_i)$ dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} \varphi(\vec{a}_1) = a_{11}\vec{b}_1 + a_{21}\vec{b}_2 + \dots + a_{m1}\vec{b}_m \leftarrow \\ \varphi(\vec{a}_2) = a_{12}\vec{b}_1 + a_{22}\vec{b}_2 + \dots + a_{m2}\vec{b}_m \\ \vdots \\ \varphi(\vec{a}_n) = a_{1n}\vec{b}_1 + a_{2n}\vec{b}_2 + \dots + a_{mn}\vec{b}_m \end{cases}$$

On peut créer la matrice dont la colonne j est composée par les coord de $\varphi(\vec{a}_j)$ dans $\mathcal{B}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \varphi(\vec{a}_1) & \varphi(\vec{a}_2) & & \varphi(\vec{a}_n) \end{pmatrix}$$

$\vec{v} \in E \Rightarrow$ on peut l'écrire dans la base $\mathcal{A}$:

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \dots + \lambda_n \vec{a_n}$$

λ_i : coord de $\vec{v}$ dans $\mathcal{A}$

$$\vec{w} = \varphi(\vec{v}) = \lambda_1 \varphi(\vec{a_1}) + \lambda_2 \varphi(\vec{a_2}) + \dots \lambda_n \varphi(\vec{a_n})$$

par linéarité

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathcal{B}$

$$= A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

par définition du produit entre une matrice et un vecteur colonne

Rem : On vient de voir qu'à toute appl. lin. on peut associer une matrice

Vice versa, à toute matrice on peut associer une appl. linéaire.

Exemple : E : e.v. de base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

F : ---- ---- $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$

Soit φ une appl. lin. t. q.

$$\varphi(\vec{e}_1) = 3\vec{e}'_1 + 4\vec{e}'_2 \quad \longleftarrow$$
$$\varphi(\vec{e}_2) = -8\vec{e}'_1 + 5\vec{e}'_2 \quad \longleftarrow$$
$$\varphi(\vec{e}_3) = 7\vec{e}'_1 - 2\vec{e}'_2 \quad \longleftarrow$$

La matrice associée à φ est :

$$\begin{pmatrix} 3 & -8 & 7 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$ (par le thm précéd.)

Déf : Le rang de la matrice associée à une appl. linéaire φ est le rang de φ (déjà vu)

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \varphi = \dim \varphi(E) =$$

$$= \dim \left(\operatorname{Vect} \left(\{ \varphi(\vec{e}_1), \dots \varphi(\vec{e}_n) \} \right) \right)$$

$$= \operatorname{rg} \{ \varphi(\vec{e}_1), \dots, \varphi(\vec{e}_n) \}$$

où $\{ \vec{e}_1, \dots \vec{e}_n \}$ = base de $\vec{E}$,

si $\varphi : \vec{E} \to F$

Rappel : $\dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \varphi(\vec{E}) = \dim \vec{E}$ (thm du rg)

Exemple :

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{(avec bases canoniques)}$$
$$(x,y) \longrightarrow (x+y,\ x-y,\ x+2y)$$

La matrice associée à φ est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(coeff devant x ↓, coeff devant y ↓)

Son rg est $\operatorname{rg}\{\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2})\}$

$= 2$

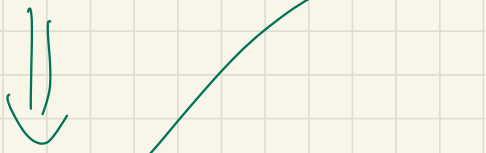
car les 2 vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont lin. ind.

Propriété : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^t)$

$\leq \min\{n, p\}$ si A est

de taille $n \times n$

Rem : Si $\varphi : E \to F$ est une appl. linéaire, $\varphi(E)$ est engendré par les vecteurs colonne de la matrice associée à φ



Supposons d'appliquer la méthode du pivot à cette matrice ⟹ Les vecteurs colonne non nuls ainsi obtenus sont libres et donc ils forment une base de $\varphi(E)$.



Le rg de A est égal au nombre maximal de vecteurs colonnes lin. ind.

Déf : Les mineurs d'une matrice sont les déterminants de ses sous-matrices carrées.

Ex : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & -5 \\ -4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

Voici des mineurs d'ordre 2 (des exemples)

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 0 \quad ; \quad \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = -7$$

Voici un mineur d'ordre 3 :

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & 7 & -3 \end{pmatrix} = 5$$

Thm : Le rg d'une matrice est égal au plus grand ordre d'un mineur non nul, c'est-à-dire l'entier r t.q. il existe un mineur

non nul d'ordre r et que tout mineur d'ordre strict. supérieur à r est 0

Exemple : On va calculer grâce au théorème précédent, le rg de

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right) :$$

$\det A = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} \leq 2$

$\operatorname{rg} A = 2$ car $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 8 \neq 0$

↑ matrice 2×2

Petit retour sur les syst. lin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Thm : Seulement l'un des trois cas suivant peut se produire :

1) $\nexists$ solution

2) $\exists !$ solution

3) $\exists$ une infinité de solutions, toutes de la forme $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \vec{f_1} + \dots + \lambda_p \vec{f_p}$ où

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{b}$ et $A \vec{f_i} = \vec{0}$

Pourquoi ??? ?

$A \rightsquigarrow$ applic. lin. $Ax = \varphi$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ peut appartenir à l'image de φ ou pas

① ②

② : dans ce cas, $\nexists$ sol

① : dans ce cas, φ peut être injective ⓐ ou pas ⓑ

② Dans ce cas, $\exists!$ cad (car il existe un seul x : $Ax = b$)

ⓑ S'il existe $\vec{x}$ t.q. $A\vec{x} = b$ alors

$A(\vec{x} + \text{vecteur appartenant à } \ker\varphi) =$

$= A\vec{x} + 0 = \vec{b}$

En effet il n'y a pas d'autre type de solutions car si

$A\vec{x} = b$ et $A\vec{y} = b$ alors

$A(\vec{x} - \vec{y}) = 0 \Longrightarrow \vec{x} = y +$

$+ \ker\varphi$

Thm (Roudé - Fontenez / Roudé - Capelli)

Un syst. linéaire de la forme $Ax = b$ admet une solution ssi

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A \mid b)$$

"matrice augmentée"

Preuve : $Ax = b$ admet une sol ssi

$\exists \vec{a} : A\vec{a} = \vec{b} \iff$

$\sum_{i=1}^{n} a_i A_{(i)} = b \implies b$ est une comb. linéaire de $A_{(1)}, A_{(2)}, \dots A_{(n)}$

$\iff \operatorname{Vect}\{A_{(1)}, \dots A_{(n)}\} =$

$= \operatorname{Vect}\{A_{(1)}, \dots A_{(n)}, b\}$

$\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$

Exemple :

$$\begin{cases} x_1 + c\,x_4 = 1 \\ x_2 + c\,x_4 = 0 \\ c\,x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & c \\ c & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rg} A = 3$ car $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$

La matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 1 & 0 & c & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$: le rg reste 3

Par le thm de Rouché-Fontener le syst. admet une solution.

Exemple : Soit t un paramètre. On souhaite étudier

$$\begin{cases} tx = (-1) \\ -x + 3ty = (2) \\ x - ty = (0) \\ 3x = (t) \\ x + 2ty = (t) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ -1 & 3t \\ 1 & -t \\ 3 & 0 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} t & 0 & -1 \\ -1 & 3t & 2 \\ 1 & -t & 0 \\ 3 & 0 & t \\ 1 & 2t & t \end{pmatrix}$$

On remarque que $\operatorname{rg} A = 1$ ssi $t = 0$;

$rg\ A = 2$ ssi $t \neq 0$ (à montrer) (*)

On va distinguer les cas $t = 0$, $t \neq 0$:

1) Par $t = 0$, $(A|b)$ a $rg = 2$

(à montrer)

Par le thm précéd. le syst n'a pas de solutions, par $t = 0$.

2) Par $t \neq 0$, montrer que

$rg(A|b) = 2$ ssi $t = 0$

Par conséquent par $t \neq 0$ $rg(A|b) = 3$

On a déjà vu (*) $rg\ A = 2$ par $t \neq 0$

$\Downarrow$ thm R-F

Le syst. n'a pas de sol pour $t \neq 5$

Par conséquent le syst n'a jamais de sol.

Exemple : Résoudre $\begin{cases} x_1 - 2\lambda x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ 2\lambda x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Suggestions

Le rg de la matrice associée peut être 2 ou 3

A montrer que : $rg\, A = 2$ si $\lambda = 1$

Dans ce cas, on trouve $(t-4s, s, t-2s, t)$

avec $s, t \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda \neq 1$, alors on trouve

$t(\lambda-1)(-4\lambda(\lambda+1),\ 3,\ -2\lambda,\ 4\lambda)$

$\forall\, t \in \mathbb{R}$

Exercice : Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

Dire combien de sol admet le syst

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = b \\ a x_1 + a x_3 - 2x_4 = 0 \\ a x_1 + (a-1) x_4 = a \end{cases}$$

Suggestions : montrer que $\operatorname{rg} A \geq 1$

Distinguer les cas $a = 0$, $a \neq 0$

$\boxed{a \neq 0}$: montrer que le rg $A = 2$

rg de la matrice augm. $= 2$ ssi $b = 2$

--- conclure

$\boxed{a = 0}$ rg $A = 2 =$ rg de la matrice augm.

--- conclure

En résumé : rg $A = 2$ $\forall a$

rg de la matrice augm $= 2$ ssi $b = 2$

$\Downarrow$ thm R-F

Si $b \neq 2$, $\nexists$ sol

Si $b = 2$, on a une infinité de sol

Exercice : Trouver un syst lin. homogène ($Ax = 0$) en $(x_1, \dots, x_4)$ dont l'ensemble des sol est

$(t, s, 0, t+s)$, $s, t \in \mathbb{R}$

Suggestions : l'ensemble des sol est un s.e.v. de base $(1, 0, 0, 1) = \vec{a}$

$(0, 1, 0, 1) = \vec{b}$

$\rightleftarrows$

$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ ssi les mineurs d'ordre 3 sont 0 $\Longleftrightarrow$ ....

↑ ↑ ↑

$\longleftrightarrow$

On va reprendre les opérations élém. faites sur les lignes des syst. lin. (cf. 1er chap):

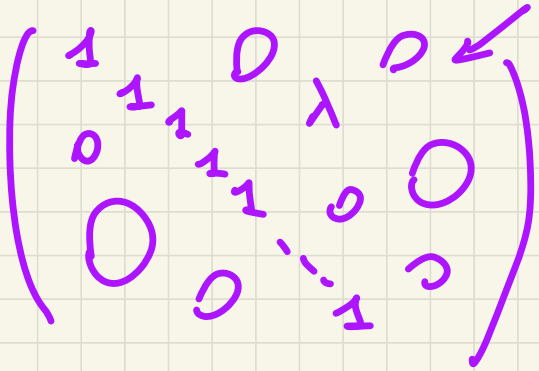
Déf : On appelle "matrice élém." une matrice $n \times n$, d'un des 3 types suivants :

$D_k(\lambda)$: matrice diagonale dont tous les élém. de la diagonale valent 1, sauf celui en position (k,k) qui vaut λ :

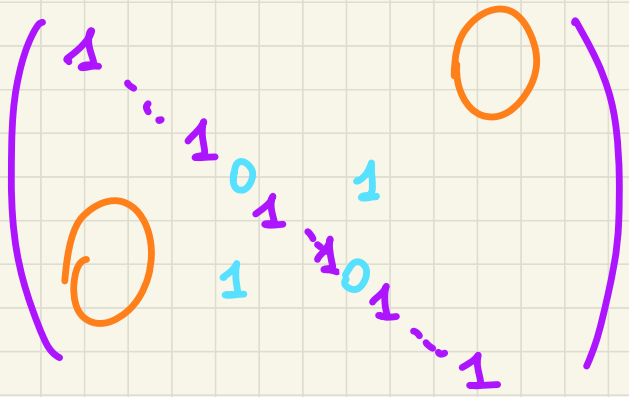
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$T_{kl}(\lambda)$: pour $k \neq l$, $\lambda \in \mathbb{R}$, il s'a

qit de la matrice dont tous les coeff. diagonaux sont égaux à 1, le coeff (K, ℓ) vaut λ, et tous les autres sont 0 :



$R_{K\ell}$ $K \neq \ell$: matrice dont les coeff diagonaux valent 1, sauf les coeff (K,K) et (ℓ, ℓ) qui valent 0 ; les coeff (K,ℓ) et (ℓ, K) valent 1 ; tous les autres coeff valent 0



Prop : Les matrices précédentes sont inversibles

$$\left[D_k(\lambda)\right]^{-1} = D_k\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\left[T_{kl}(\lambda)\right]^{-1} = T_{kl}(-\lambda)$$

$$\left(R_{kl}\right)^{-1} = R_{kl}$$

Prop : Les opérations élém. correspondent à des multipl. à gauche par les matrices élém. ci-dessus.

Autrement dit, si on part de $Ax = b$

en effectuant une opération élém. on a fait que calculer

$$MAx = Mb$$

M ↑ inversible

Puisque M est inversible, on ne change pas le syst. des solutions du système!

Correspondance entre matrices et applicat. lin.

$\varphi : E \to F$ lin. peut être représentée par une matrice A

E, F : e.v.

$\psi : E \to F$ lin. peut être représentée par une matrice B

1) $\lambda\varphi \longrightarrow \lambda A$
2) $\varphi + \psi \longrightarrow A + B$
3) $\varphi(\psi) \longrightarrow AB$
4) $\psi(\varphi) \longrightarrow BA$

(matrices corresp)

5) $\varphi^{-1} \to A^{-1}$ (si φ est bijective)

Une applic. du thm de Rouché-Fauteux:

Prop : Soit A une matrice avec m lignes et n colonnes

Soit $b \in \mathbb{R}^m$.

Le système $Ax = \vec{b}$, $x \in \mathbb{R}^n$ admet une sol $\Leftrightarrow$ toute comb. lin. satisfait par les lignes de A est satisfait par les lignes de $(A|b)$.

Preuve

$\Rightarrow$) $Ax = \vec{b}$ admet une sol par

hyp $\Rightarrow \vec{b}$ est comb. lin. des colonnes de A :

$$(A|b) = \left(A \;\middle|\; \begin{matrix} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{2i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{mi} \end{matrix} \right)$$

$$= \left(\begin{matrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vdots \\ \vec{l}_m \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \vec{\alpha} \cdot \vec{l}_1 \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{l}_2 \\ \vdots \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{l}_m \end{matrix} \right)$$

↑ lignes de A

Si $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \vec{l}_i = \vec{0}$ alors $\vec{\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{m} \beta_i \vec{l}_i = \vec{0}$

$= \sum_{i=1}^{m} \beta_i \overrightarrow{\alpha_i} \cdot \overrightarrow{l_i}$: la matrice aug. satisfait la même relat. lin. que les lignes de A

$\Leftarrow$) Les lignes de A et de $(A|b)$ satisfont la même relation linéaire

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$

$\Downarrow$ thm R-F.

$Ax = b$ admet une sol.

19/10 : contrôle à 10h (1 heure)