Cours de mathématiques avancées - Magistère d'économie

TD sur les applications linéaires

Exercice 1. Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \to & (x-z, 2x+y-3z, -y+2z) \end{array}$$

Trouver une base de $Ker\varphi$ et une base de $Im(\varphi)$.

$$\varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ 2x+y-3z \\ -y+2z \end{pmatrix}$$

$\varphi(\vec{e_1})$ $\varphi(\vec{e_2})$ $\varphi(\vec{e_3})$

$Ker\varphi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \varphi(x,y,z) = (0,0,0)\}$.

On doit résoudre le système

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 2z \\ \Rightarrow 2z + 2z - 3z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = y = z = 0$, i.e $Ker\varphi \subset \{(0,0,0)\}$

et ainsi $Ker\varphi = \{(0,0,0)\}$ (car $Ker\varphi$ est un sev de $\mathbb{R}^3$).

$Im\varphi = Vect(\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \varphi(\vec{e_3}))$

= calcul ---

$\dim Ker\varphi + rg\varphi = 3$

$\Rightarrow rg\varphi = 3$. $Im\varphi = \mathbb{R}^3$ → la base canonique est une base de $Im\varphi$

$\varphi(\vec{e_1}) = (1,2,0)$

$\varphi(\vec{e_2}) = (0,1,-1)$

$\varphi(\vec{e_3}) = (-1,-3,2)$

$Im\varphi = Vect\{(1,2,0), (0,1,-1), (-1,-3,2)\}$.

$\dim Im\varphi = 3$ → famille libre

Exercice 2. Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z,t) & \to & (x-z, y-t, x+y-z-t, 2x+3y-2z-3t) \end{array}$$

(1) Trouver une base de $Ker\varphi$.
(2) Montrer que $\{\vec{e_1} = (1,0,1,0), \vec{e_2} = (0,1,0,1), \vec{e_3} = (1,0,2,0), \vec{e_4} = (0,1,0,2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(3) Montrer que $\{\varphi(\vec{e_3}), \varphi(\vec{e_4})\}$ est une base de $Im(\varphi)$.
(4) φ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
(5) Déterminer un sous-espace A de $\mathbb{R}^4$ tel que la restriction de φ à A soit injective.

1/ $Ker\varphi = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } \varphi(x,y,z,t) = \vec{0}\}$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \\ 2x + 3y - 2z - 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = t \\ 2z + 3t - 2z - 3t = 0 \end{cases}$$

$0 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = t \end{cases}$, ie $Ker\varphi = Vect\{(1,0,1,0), (0,1,0,1)\}$.

On vérifie que ces 2 vecteurs forment une famille, de sorte que c'est une base.

2/ Pour montrer que $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ forment une base de $\mathbb{R}^4$, il suffit de montrer que c'est une famille libre.
Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tq $x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} + t\vec{e_4} = \vec{0}$

$\Rightarrow (x+z, y+t, x+2z, y+2t) = (0,0,0,0)$

$\Rightarrow x = -z$, $y = -t$, $z = 0$, $t = 0 \Rightarrow x = y = z = t = 0$ ☐

3/ Pour déterminer une base de $Im\varphi$ il suffit de considérer $(\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \varphi(\vec{e_3}), \varphi(\vec{e_4}))$ car $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.
Or $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de $Ker\varphi$ donc $\varphi(\vec{e_1}) = \varphi(\vec{e_2}) = \vec{0}$ d'où $Im\varphi = Vect\{\varphi(\vec{e_3}), \varphi(\vec{e_4})\}$

$\varphi(\vec{e_3}) = (-1, 0, -1, -2)$, $\varphi(\vec{e_4}) = (0, -1, -1, -3)$.

D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}\varphi = 4 - \dim \ker\varphi = 2$.

On en déduit que $(\varphi(\vec{e_3}), \varphi(\vec{e_4}))$ est une base de $\mathrm{Im}\varphi$.

4/ φ n'est pas injective car $\ker\varphi \neq \{\vec{0}\}$

φ n'est pas surjective car $\mathrm{rg}\varphi = 2 \neq 4$.

5/ $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}\{\varphi(\vec{e_3}), \varphi(\vec{e_4})\}$. (dim 2).

$(\vec{e_3}, \vec{e_4})$ forme une famille libre et donc une base de $\mathrm{Vect}\{\vec{e_3}, \vec{e_4}\} = A$.

On considère $\varphi_{|A} : A \to \mathrm{Im}\varphi$. surjective

Or, $\dim \ker(\varphi_{|A}) = \dim A - \dim \mathrm{Im}\varphi$

$= 2 - 2 = 0$

$\Rightarrow \varphi_{|A}$ injective

Exercice 3. Dans l'espace des polynômes, on considère l'application *der*, de dérivation d'un polynôme.

(1) *der* est elle linéaire ?
(2) Trouver $Im(der)$.
(3) Trouver $Ker(der)$.
(4) Est-ce que *der* est un isomorphisme ?

$E = \mathbb{R}[X]$ = espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1/ $\mathrm{der} : E \to E$, $P \mapsto P'$

$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\mathrm{der}(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)'$

$= P' + \lambda Q'$

donc der est linéaire de E vers E

(endomorphisme).

2/ Une base de E est donnée par $\{X^i, i \in \mathbb{N}\}$

$\forall i \in \mathbb{N}$, $\text{der}(X^i) = i X^{i-1}$ (ex. $i=0$ donne 0).

On en déduit que $\text{Im}(\text{der}) = \{X^{i-1}, i \in \mathbb{N}^*\}$

$= \mathbb{R}[X]$.

Autrement dit, der est surjective.

3/ $\text{Ker}(\text{der}) = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \text{der}(P) = 0\}$.

$= \{P \in \mathbb{R}[X],\ P' = 0\} = \text{Vect}\{1\}$.

(dim 1).

4/ der est surjective mais non injective, ce n'est donc pas 1 isomorphisme.

Exercice 5. En $\mathbb{R}^3$ on considère la base canonique et la seule application linéaire telle que $\varphi(e_i) = f_i$, où $\vec{f_1} = (1, 0, -1), \vec{f_2} = (0, 1, 2), \vec{f_3} = (2, 1, 1)$.

(1) Ecrire la matrice A de cette application linéaire.
(2) Décrire $Im(\varphi), Ker(\varphi)$.

- $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi) = \left(\varphi(\vec{e_1}) \,\middle|\, \varphi(\vec{e_2}) \,\middle|\, \varphi(\vec{e_3}) \right)$ exprimés dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

1/. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2/. $\text{Im}\varphi = \text{Vect}\{(\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \varphi(\vec{e_3})\}$.

$= \text{Vect}\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$.

et $\text{Ker}\varphi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \text{ tq } \varphi(x,y,z) = \vec{0}\}$.

On a $(x,y,z) \in \text{Ker}\varphi \iff \begin{cases} x+2z=0 \\ y+z=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$.

$\Rightarrow x=y=z=0$, i.e $\text{Ker}\varphi = \{\vec{0}\}$.

On pourrait aussi montrer que $\det A \neq 0$.

. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $\text{Ker}\varphi = \{\vec{0}\} \Rightarrow \text{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$ (th. du rang).

Exercice 6. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y = 0, x - y + t + z = 0\}$.

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel donné par le noyau d'une application linéaire. Exprimer la matrice correspondante à l'application linéaire.
(2) Calculer la dimension de F.

On remarque que $F = \{(x,y,z,t) \text{ tq } (2x-y, x-y+t+z) = (0,0)\}$. On peut introduire $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z,t) \longmapsto (2x-y, x-y+z+t)$.

Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_4}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors $F = \text{Ker}\varphi$ et c'est donc un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.

D'après le théorème du rang, on a

$$\begin{cases} \dim \text{Ker}\varphi + \text{rg}\,\varphi = 4 \\ \text{rg}\,\varphi = \dim(\text{Im}\varphi) \in \{0,1,2\}. \end{cases}$$

$rg\,\varphi \neq 0$ car $\varphi \neq 0$

$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}\{(2,1), (-1,-1), (0,1)\}$.

$= \mathbb{R}^2 \Rightarrow rg\,\varphi = 2$ d'où $\dim F = 2$.