
G
O
D
O
O
O
O
D

A. Celisse : CM après les vacances
(2 contrôles normalement)

B. Nazaret : TD après vacances

Changement de base

Pb : Ds $\mathbb{R}^2$ on considère la base canon.
$\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$

On veut changer de base : $\tilde{\mathcal{B}} = \{(1,1), (1,3)\}$
($\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$)

$(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$
$(1,3) = 1(1,0) + 3(0,1)$

exprimés dans la base canon.

Si $\vec{v} = x(1,0) + y(0,1)$, peut-on

et comment l'exprimer dans $\mathcal{B}$?

On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\vec{v} = \alpha(1,1) + \beta(1,3) = (x,y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha + 3\beta = y \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{3x-y}{2} \\ \beta = \dfrac{y-x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{matrice dont} \\ \text{les colonnes sont} \\ \tilde{b}_1, \tilde{b}_2 \text{ exprimés} \\ \text{dans la base } \mathcal{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{matrice dont les colonnes} \\ \text{sont } \tilde{b}_1, \tilde{b}_2 \text{ exprimés dans} \\ \text{la base } \mathcal{B} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rappel : Si on a $\varphi : E \to F$ lin.

base $\mathcal{A}$ de E — base $\mathcal{B}$ de F

peut se représenter à travers la matrice

$$\begin{pmatrix} \varphi(\vec{a}_1) \text{ dans } \mathcal{B} & \varphi(\vec{a}_2) \text{ dans } \mathcal{B} & \cdots \end{pmatrix}$$

(*)

On peut penser d'avoir

Identité : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

base $\tilde{\mathcal{B}}$ — base canonique $\mathcal{B}$

$\vec{v} \longrightarrow \vec{v}$

La matrice associée à cette applic. lin. est

$$\begin{pmatrix} \varphi(\tilde{b}_1) \text{ dans } \mathcal{B} & \varphi(\tilde{b}_2) \text{ dans } \mathcal{B} \end{pmatrix}$$

Plus en général :

Déf : Soit E un e.v. de dim n.
Soient $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ deux bases de E.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$ est $P_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}}$ qui représente l'appl. lin.

Identité : $E \longrightarrow E$

base $\tilde{\mathcal{B}}$: $\vec{v} \longrightarrow$ base $\mathcal{B}$: $\vec{v}$



N.B. Les colonnes de $P_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}}$ sont les coord. de $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots \tilde{b}_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Réf. biblio : livre de Grifone (EPI)

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$ on a

$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1 ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3\}$: base can.

$\mathcal{F} = \{\vec{e}_1 - \vec{e}_2 ; 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3 ;$

$-2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$

2 bases

La matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ exprimé dans $\mathcal{E}$

$2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$ exprimé dans $\mathcal{E}$

$-2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ exprimé dans $\mathcal{E}$

Rem : La matrice de passage de $\tilde{\mathcal{B}}$ à $\mathcal{B}$ est la matrice qui représente l'identité

$$\text{identité} : \underbrace{E}_{\text{base } \mathcal{B}} \longrightarrow \underbrace{E}_{\text{base } \tilde{\mathcal{B}}}$$

$$\vec{v} \longrightarrow \vec{v}$$

Cette appl. est l'inverse de l'appl. de la déf (en bleu)

$$\Downarrow$$

$$P^{-1}_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}} = P_{\tilde{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}}$$

Que peut-on dire sur les coord. d'un vecteur ???

Thm : Soit $\vec{v} \in E$. Les coord de $\vec{v}$ dans $\tilde{\mathcal{B}}$ sont

$$\left(P_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } \vec{v} \text{ dans} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix}$$

Rem : Les coord de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$ sont données par $P_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}} \begin{pmatrix} \text{coord de } \vec{v} \\ \text{dans } \tilde{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$

Exemple : Soit $\mathcal{B}$ la base can. de $\mathbb{R}^4$

Soit $\tilde{\mathcal{B}} = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0),$
$(1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$ est

$$P_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ écrit dans $\mathcal{B}$

L'exprimer dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$:

on va utiliser le thm précédent (en rouge) :

$$P^{-1}_{B \to \tilde{B}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 - a_1 \\ a_1 - a_2 \\ a_2 - a_3 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Changem. de base dans la matrice associée à une applic. lin.

Pb : Soit $\varphi : E \to E$ appl. lin.

Soient $\mathcal{B}$, $\tilde{\mathcal{B}}$ deux bases de E.

On peut associer à φ la matrice $A_{\mathcal{B}}$ qui la représente dans $\mathcal{B}$.

Comment écrire $A_{\tilde{\mathcal{B}}}$ (matrice qui représente φ dans $\tilde{\mathcal{B}}$) ???

Rappel : $A_{\mathcal{B}}$ est la matrice dont les colonnes sont les coord dans $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots\}$ des vecteurs $\varphi(\vec{b}_1), \dots \varphi(\vec{b}_n)$.

Rappel : $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ est la matrice dont les colonnes sont les coord. de $b_1', b_2', \dots b_n'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Les coord de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}'$ sont :

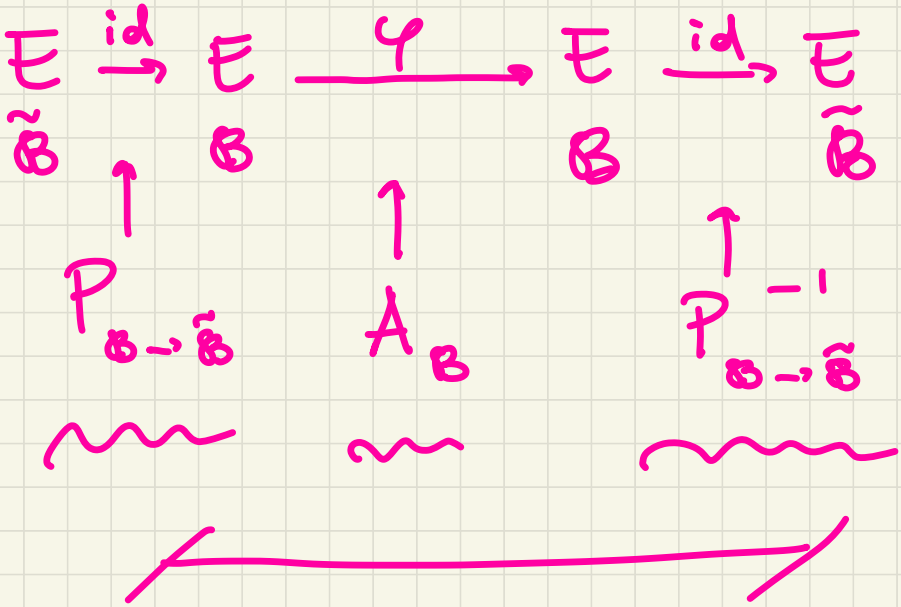
$$P^{-1}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \, \vec{v}_{\mathcal{B}}$$

Thm : La matrice qui représente φ dans $\tilde{\mathcal{B}}$ est donnée par

$$P^{-1}_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}} \, A_{\mathcal{B}} \, P_{\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}}$$

ou l'utilisera dans la diagonalisation

Rem : On peut penser d'avoir



Exemple : Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longrightarrow \begin{pmatrix} 2y-z \\ 3x-2y \\ -2x+2y+z \end{pmatrix}$$

La matrice associée à φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\tilde{\mathcal{B}} = \{(1,1,1), (4,3,-2), (2,-3,2)\}$

Ecrire la matrice associée à φ dans $\tilde{\mathcal{B}}$.

On va utiliser le théorème ci-dessus:

$$P^{-1} A P, \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ -5 & 0 & 5 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$