TD du 20/10/2026.

Exercice 7. On considère l'application *der* de dérivation d'un polynôme de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 dans lui même.

(1) Ecrire la matrice de *der* dans la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

(2) *der* est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

(3) Quelle est la dimension de $Im(der)$? Et de $Ker(der)$?

$E = \mathbb{R}_3[X]$ = espace des polynômes de degré ≤ 3.

$\dim E = 4$. , base canonique = $\{1, X, X^2, X^3\}$

$der(P) = P'$.

1/ $der(X^i) = iX^{i-1}$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2/ • $\in Ker(der)$ et $1 \neq \vec{0}$ donc der n'est pas injective.

• $Im(der) = Vect(\{1, 2X, 3X^2\}) = \mathbb{R}_2[X]$ (c_2, c_3 ch)

$\neq \mathbb{R}_3[X]$

donc der n'est pas surjective.

3/ $\dim Im(der) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$ - D'après le théorème du rang, $\dim(Ker(der)) = 4 - 3 = 1$.

$Ker(der) = Vect\{1\}$

Exercice 8. Soit

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) & \to & (x+2y+3z, 2x+4y+6z, -x+y+3z, 3x-2y-7z) \end{array}$$

(1) Est-ce que φ est surjective ?
(2) Ecrire la matrice associée à φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.
(3) Décrire $Im(\varphi)$ et calculer sa dimension.
(4) Décrire $Ker(\varphi)$.

1/ $\dim(\text{Ker}\,\varphi) + \dim(\text{Im}\,\varphi) = \dim(\text{espace de départ})$

$= 3$

$\Rightarrow \dim(\text{Im}\,\varphi) \leq 3 \Rightarrow \varphi$ n'est pas surjective.

2/. $\varphi(x,y,z) = A \cdot (x,y,z)^t$

Ici, on a

$$\varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 2x+4y+6z \\ -x+y+3z \\ 3x-2y-7z \end{pmatrix}$$

matrice de φ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

3/. $\text{Im}\,\varphi = \text{Vect}\{c_1, c_2, c_3\}$ avec

$c_1 = (1,2,-1,3)$, $c_2 = (2,4,1,-2)$

et $c_3 = (3,6,3,-7)$. On a $c_3 = 2c_2 - c_1$

$\text{Im}\,\varphi = \text{Vect}(\{c_1, c_2\})$ et $\{c_1, c_2\}$ forme une famille libre donc $\dim(\text{Im}\,\varphi) = 2$.

4/. $\dim(\ker\varphi) = \dim\mathbb{R}^3 - \text{rg}\,\varphi = 3 - 2 = 1$.

Or, $c_3 = 2c_2 - c_1$, i.e $c_1 - 2c_2 + c_3 = \vec{0}$.

$c_i = \varphi(e_i)$ où $\{e_i, 1 \leq i \leq 3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

donc $\varphi(e_1) - 2\varphi(e_2) + \varphi(e_3) = \vec{0}$

$\varphi(e_1 - 2e_2 + e_3) = \vec{0}$

$e_1 - 2e_2 + e_3 = (1, -2, 1) \in \ker\varphi$.

On en déduit que $\ker\varphi = \text{Vect}(\{(1, -2, 1)\})$

Exercice 9. Dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on considère l'application *dec*, qui associe à un polynôme $P(x)$ le polynôme $P(x+1)$.

(1) Ecrire la matrice A de *dec* dans la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.
(2) En utilisant le point précédent, calculer l'image de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$.
(3) Montrer que la famille $\{1, 1+x, 1+2x+x^2; 1+3x+3x^2+x^3\}$ forme une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

$E = \mathbb{R}_3[X]$ $(\dim 4)$.

$\text{dec} : E \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ (E).

$P \longmapsto \text{dec}(P)$ tq $\text{dec}(P)(X) = P(X+1)$.

$\text{dec}(1) = 1$, $\text{dec}(X) = 1 + X$

$\text{dec}(X^2) = (1+X)^2 = 1 + 2X + X^2$

$\text{dec}(X^3) = (1+X)^3 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$

$\text{Im}(\text{dec}) \subset \mathbb{R}_3[X]$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de dec relativement à la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

2/. $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$, $dec(P)$?

Pour calculer l'image de P par dec, on détermine les coord. de P dans $\{1, X, X^2, X^3\}$ qui sont $(1, 0, -3, 2)$ et on calcule

$$A(1, 0, -3, 2)^t = (6, 0, 3, 2)^t.$$

Autrement dit, $dec(P)(X) = 6 + 3X^2 + 2X^3$.

3/. $Im(dec) = Vect(\{dec(1), dec(X), dec(X^2), dec(X^3)\})$.

$= Vect(\{1, 1+X, 1+2X+X^2, 1+3X+3X^2+X^3\})$.

$Im(dec) = \mathbb{R}_3[X]$ ssi dec est surjective

ssi dec est injective

ssi A est inversible

ssi $\det A \neq 0$.

A est triangulaire donc $\det A = 1 \neq 0$ et on peut conclure.

Exercice 11. En $\mathbb{R}^3$, soit $\varphi(x,y,z) = A(x,y,z)^T$, où $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. φ est-elle injective ? Surjective ? Donner une base de $Ker(\varphi)$ et une base de $Im(\varphi)$.

On calcule le déterminant de A en développant par rapport à la 1ère colonne :

$$\det(A) = -3 \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 1 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -3(4-3) - 1\cdot(1-4) = -3+3 = 0.$$

A n'est donc pas inversible et ainsi φ n'est ni injective, ni surjective (la 1ère ne s'applique que parce que A est une matrice carrée).

$(x,y,z) \in Ker\varphi$ ssi $A(x,y,z)^t = (0,0,0)^t$

$$\text{i.e} \begin{cases} -3x+y+2z = 0 \\ 2y+z = 0 \\ -x+3y+2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{i.e} \begin{cases} z = -2y \\ -3x-3y = 0 \\ -x-y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases}$$

$$Ker\varphi = Vect\{(-1,1,-2)\}.$$

$-c_1 + c_2 - 2c_3 = \varphi(-e_1 + e_2 - 2e_3) = \vec{0}$ $\in \ker\varphi$

Autrement dit, $c_2 = c_1 + 2c_3$ donc

$\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}\{c_1, c_2, c_3\}$

$= \mathrm{Vect}(\{c_1, c_3\})$.

De plus, $\dim(\mathrm{Im}\varphi) = 3 - 1 = 2$ (th. du rang)

On en déduit que $c_1 = (3, 0, -1)$

$c_3 = (2, 1, 2)$

forment une base de $\mathrm{Im}\varphi$.

Exercice 12. Soit $m \neq 0$. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$

(1) Calculer $M^2 - M - 2I$. En utilisant le déterminant, déduire que M est inversible.
(2) Exprimer M^{-1} en fonction de M et de I et finalement trouver l'expression de M^{-1}.
(3) Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

1/.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & m & m^2 \\ 1/m & 2 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 2 \end{pmatrix} = M + 2I.$$

et donc $M^2 - M - 2I = 0$.

$$\det M = -\frac{1}{m}\det\begin{pmatrix} m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{m^2}\det\begin{pmatrix} m & m^2 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$= 1 + 1 = 2 \neq 0$

Méthode alternative : $M^2 - M = 2I$

i.e $M(M-I) = 2I$

$\Rightarrow \det(M(M-I)) = \det(2I) = 8$

$\Rightarrow (\det M)(\det(M-I)) = 8 \neq 0$

$\Rightarrow \det M \neq 0$.

M est inversible puisque $\det M \neq 0$.

- $N = M^{-1}$ ssi $MN = I$

Or, $M \times \left(\frac{1}{2}(M-I)\right) = I$ donc $M^{-1} = \frac{1}{2}(M-I)$

1. Pour $m = 1$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = M^{-1} = \frac{1}{2}(M-I)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$