En fait, ce n'est pas seulement « céder ». On pourrait très bien dire que c'est la quantité de bien (2) par unité de bien (1) que le consommateur doit « acquérir » pour « céder » une quantité marginale de bien (1).

Pourtant, on dit généralement « céder ». Pourquoi ?

Parce que, *si l'agent tente d'obtenir le maximum de satisfaction* (on dit alors qu'il est **rationnel**) et *s'il préfère plus à moins*, comme on le suppose dans le modèle, alors…

le **TMS** du bien (2) au bien (1) est la quantité *maximale* de bien (2) que le consommateur est prêt à céder en échange d'une unité de bien (1). C'est donc son ***prix de réserve – en bien (2) – pour l'achat du bien (1)*** : le prix maximum en bien (2) que l'agent est susceptible d'accepter de payer pour acquérir chaque unité bien (1), et ce, quelle que soit la quantité de bien (1) qu'il acquiert.

En effet, quelle que soit cette quantité, y compris donc très petite, si le prix du bien (1) en bien (2) est supérieur au TMS, alors l'agent ne désirera pas acheter du bien (1).

Connaître le TMS d'un agent à son panier de dotations initiales est donc connaître *ses dispositions à l'échange en fonction des prix affichés*[1].

Supposons que le TMS de l'agent à son panier de dotations initiales soit égal à 4. Cela signifie qu'il est prêt à céder au maximum 4 unités de bien (2) par unité de bien (1) qu'il acquiert, sans quoi sa satisfaction diminuera. Si donc $p_1/p_2 = 5$, alors le bien (1) est trop cher pour lui. Il ne désirera pas en acheter. En revanche, il est susceptible d'en acheter si $p_1/p_2 = 3$.

3. Les fonctions d'utilité (rappels)

a. une fonction ordinale

Comme la relation de préférence est un pré-ordre complet, on peut la *représenter par une* fonction, que l'on a pris l'habitude d'appeler *fonction d'utilité*, et que l'on note généralement $u(\cdot)$. Cette fonction de $(\mathbb{R}_+)^n$ dans $\mathbb{R}_+$ respecte les préférences du consommateur. Autrement, dit, à chaque panier de bien Q, elle associe un réel $u(Q)$ tel que :

$$Q \succsim Q' \Leftrightarrow u(Q) \geq u(Q')$$
$$Q \sim Q' \Leftrightarrow u(Q) = u(Q').$$

[1] **Attention** : de même que le prix d'un bien en euros est la quantité d'euros qu'il faut céder pour acquérir une unité de ce bien, le prix du bien (1) en bien (2) – que l'on note p_1/p_2 – est la quantité de bien (2) qu'il faut céder pour acquérir une unité de bien (1).

Exemple

Soit un individu dont les préférences obéissent aux hypothèses habituelles (complétude, réflexivité, transitivité) et qui, face aux paniers de biens $Q_1 = (2\ ,\ 8)$, $Q_2 = (4\ ,\ 2)$, $Q_3 = (3\ ,\ 3)$, dit avoir les préférences suivantes :

$$Q_1 \succ Q_3,\ Q_1 \sim Q_2.$$

Ces préférences peuvent-elles être représentées par les fonctions d'utilité suivantes :

$$u_1(q_1\ ,\ q_2) = q_1^2 q_2,\ u_2(q_1\ ,\ q_2) = q_1 \times \sqrt{q_2},\ u_3(q_1\ ,\ q_2) = 2\ln q_1 + \ln q_2,\ u_4(q_1\ ,\ q_2) = 2q_1 + q_2\ ?$$

Comme on a : $u_1(Q_1) = 32$, $u_1(Q_2) = 32$, $u_1(Q_3) = 27$, la fonction $u_1(.)$ représente les préférences de ce consommateur, puisque l'on a :

$$u_1(Q_1) = u_1(Q_2) > u_1(Q_3).$$

Il en va donc de même pour $u_2(.)$ et $u_3(.)$. En effet, dans le modèle de concurrence parfaite, l'approche est **ordinale** et non **cardinale**[2] : ce qui importe, ce n'est pas que $u_1(Q_1) = 32$, mais que $u_1(Q_1) = u_1(Q_2) > u_1(Q_3)$; une infinité de fonctions peuvent dès lors convenir. En fait, si on en trouve une, on sait que toutes les transformations strictement croissantes de cette fonction font aussi l'affaire.

En effet, $f(.)$ est une **fonction strictement croissante** si et seulement si,

pour tout couple $(x\ ,\ x')$ tel que $x > x'$,

on a : $f(x) > f(x')$.

C'est donc une fonction qui *préserve l'ordre*.

Or :

. $u_2(\cdot) = f[u_1(\cdot)]$ avec $f(x) = \sqrt{x}$ (et la fonction racine carrée est croissante) et

. $u_3(\cdot) = f[u_1(\cdot)]$ avec $f(x) = \ln x$ (et la fonction logarithme népérien est croissante).

En revanche, la fonction $u_4(\cdot)$ ne représente pas les préférences de ce consommateur. En effet, on a : $u_4(Q_1) = 12 > u_4(Q_2) = 10$ ce qui est incompatible avec $Q_1 \sim Q_2$.

Dans les TD, on travaillera beaucoup avec des fonctions d'utilité de type Cobb-Douglas. Voir encadré ci-dessous LA FONCTION DE TYPE COBB-DOUGLAS.

LA FONCTION DE TYPE COBB-DOUGLAS

La fonction Cobb-Douglas tire son nom de Charles W. Cobb (mathématicien) et Paul H. Douglas (économiste). Elle est de la forme :

$$u(q_1, q_2) = q_1^{\alpha} q_2^{\beta},\ \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0.$$

[2] Vous reviendrez sur cette question en TD.

Si les préférences d'un agent peuvent être représentées par une telle fonction $u(\cdot)$ définie par :

$$u(q_1, q_2) = q_1^{\alpha} q_2^{\beta}, \qquad \text{avec } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0,$$

alors, cette fonction étant ordinale dans ce modèle, ces préférences peuvent également être représentées (entre autres) par les fonctions :

- $v(\cdot)$ définie par $v(q_1, q_2) = [u(q_1, q_2)]^{\gamma}$ avec $\gamma > 0$, ce qui donne : $v(q_1, q_2) = q_1^{\alpha\gamma} q_2^{\beta\gamma}$.
- et $w(\cdot)$ définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $w(q_1, q_2) = \ln[u(q_1, q_2)] = \alpha \ln q_1 + \beta \ln q_2$. Cette dernière fonction est dite **loglinéaire** car c'est une combinaison linéaire des logarithmes des variables. *La fonction $u_3(\cdot)$ de l'exemple précédent est de ce type.*

b. Fonction d'utilité et courbes d'indifférences

Rappel de L1. Lorsque les préférences de l'agent sont représentés par la fonction d'utilité u(·), la courbe d'indifférence passant par le panier Q_0 relie tous les paniers de biens (q_1 , q_2) apportant à l'agent la même satisfaction que le panier Q_0. Elle a donc pour équation : $u(q_1 , q_2) = u(Q_0)$.

Exemple

Soit un agent A dont les préférences peuvent être représentées par la fonction $u_A(\cdot)$ définie par :

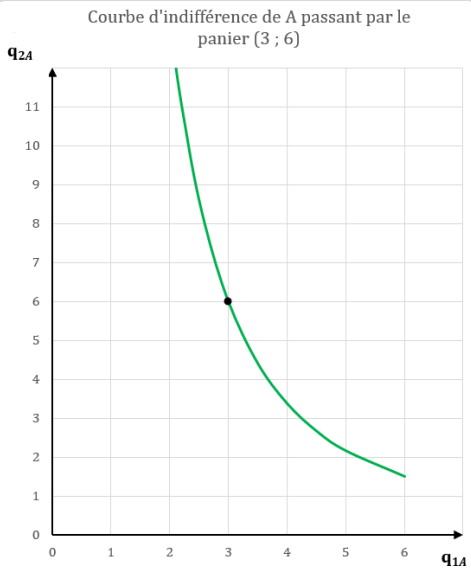
$$u_A(q_1, q_2) = q_1^2 q_2 .$$

Si les dotations initiales de A sont : $Q_{0A} = (3 , 6)$. La courbe d'indifférence de A passant par ce panier a pour équation : $u_A(q_1, q_2) = u_A(3 , 6) = 3^2 \times 6 = 54$, ce qui donne :

$$q_1^2 q_2 = 54,$$

$$\text{ou encore : } q_2 = \frac{54}{q_1^2}$$

Voir graphe ci-contre.



Lorsque les fonctions d'utilité sont de type *Cobb-Douglas* ou *loglinéaires*, les courbes d'indifférence sont toujours continues, décroissantes, convexes et asymptotes aux axes. Voir encadré ci-dessous : COURBES D'INDIFFERENCE DES FONCTIONS DE TYPE COBB-DOUGLAS.

COURBES D'INDIFFERENCE DES FONCTIONS DE TYPE COBB-DOUGLAS

Lorsque les préférences d'un agent peuvent être représentées par une *fonction d'utilité de type Cobb-Douglas*, les *courbes d'indifférence* ont donc une équation de la forme :

$$q_1^{\alpha} q_2^{\beta} = c$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et où c est une constante strictement positive pour $q_1 > 0$ et $q_2 > 0$[3]. Or :

$q_1^{\alpha} q_2^{\beta} = c \Rightarrow q_2^{\beta} = \frac{c}{q_1^{\alpha}} \Rightarrow q_2 = \left(\frac{c}{q_1^{\alpha}}\right)^{1/\beta} = \frac{c^{1/\beta}}{q_1^{\alpha/\beta}} = k \times q_1^{-\alpha/\beta}$, où $k = c^{1/\beta}$ est une constante positive.

Les courbes d'indifférence ont donc une équation de la forme :

$$q_2 = k \times q_1^{-\alpha/\beta}$$

Et les courbes d'indifférence de la fonction loglinéaire $w(\cdot)$ définie par $w(q_1, q_2) = \alpha \ln q_1 + \beta \ln q_2$ ont évidemment une équation de la même forme.

Ces courbes d'indifférence sont *continues* (fonction puissance), *décroissantes*, *convexes* et *asymptotes aux axes* :

- Elles sont décroissantes : la fonction $g(\cdot)$ définie par $g(q_1) = k \times q_1^{-\alpha/\beta}$ est décroissante sur IR_+^* car sa dérivée première est négative sur cet ensemble. En effet :

$$g'(q_1) = k \times \frac{-\alpha}{\beta} q_1^{\frac{-\alpha}{\beta}-1} = -\frac{k\alpha}{\beta} q_1^{-\frac{\alpha+\beta}{\beta}} < 0 \text{ car } k > 0, \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0.$$

- Elles sont convexes : la fonction $g(\cdot)$ définie par $g(q_1) = k \times q_1^{-\alpha/\beta}$ est strictement convexe sur IR_+^* car sa dérivée seconde est positive sur cet ensemble. En effet :

$$g''(q_1) = -\frac{k\alpha}{\beta}\left(-\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right) q_1^{\frac{\alpha}{\beta}-2} = \frac{k\alpha(\alpha+\beta)}{\beta^2} q_1^{\frac{\alpha}{\beta}-2} > 0 \text{ car } k > 0, \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0$$

- Elles sont asymptotes aux axes : en effet, comme $k > 0, \alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a :

$$g(q_1) = k \times q_1^{-\alpha/\beta} \xrightarrow[q_1 \to 0^+]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad g(q_1) = k \times q_1^{-\alpha/\beta} \xrightarrow[q_1 \to +\infty]{} 0^+.$$

c. Lien entre fonction d'utilité et taux marginal de substitution

Rappel de L1. Si les préférences d'un agent peuvent être représentées par la fonction d'utilité $u(\cdot)$, alors on a :

$$\mathrm{TMS}_{2/1}(q_1, q_2) = \frac{u'_{q_1}(q_1, q_2)}{u'_{q_2}(q_1, q_2)}.$$

Le TMS en Q_0 est donc égal au rapport des dérivées partielles de la fonction d'utilité en Q_0.

Dans le cadre d'une approche cardinale, on dirait que c'est le rapport des utilités marginales. L'approche étant ici ordinale, le concept d'utilité marginale n'a cependant pas de sens.

---

[3] Si $q_1 = 0$ ou $q_2 = 0$ alors $q_1^{\alpha} q_2^{\beta} = 0$. Tous les paniers de la forme $(q_1, 0)$ ou $(0, q_2)$ sont donc situés sur la même courbe d'indifférence, qui est donc confondues aux axes (à la partie positive des axes, plus précisément). On examine donc ici le cas où $q_1 > 0$ et $q_2 > 0$.

Dans le cas des fonctions d'utilité de type Cobb-Douglas, le taux marginal de substitution a une forme bien spécifique. Lorsque la fonction d'utilité $u(\cdot)$ est définie par $u(q_1, q_2) = q_1^{\alpha} q_2^{\beta}$, avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a, en effet :

$$\text{TMS}_{2/1}(q_1, q_2) = \frac{u'_{q_1}(q_1, q_2)}{u'_{q_2}(q_1, q_2)} = \frac{\alpha q_1^{\alpha-1} q_2^{\beta}}{\beta q_1^{\alpha} q_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha q_2^{\beta} q_2^{1-\beta}}{\beta q_1^{\alpha} q_1^{1-\alpha}} = \frac{\alpha q_2^{\beta+1-\beta}}{\beta q_1^{\alpha+1-\alpha}} = \frac{\alpha q_2}{\beta q_1}.$$

TMS DANS LE CAS D'UNE FONCTION DE TYPE COBB-DOUGLAS

Lorsque la fonction d'utilité $u(\cdot)$ est définie par $u(q_1, q_2) = q_1^{\alpha} q_2^{\beta}$, avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a :

$$\text{TMS}_{2/1}(q_1, q_2) = \frac{\alpha q_2}{\beta q_1}.$$

Et on obtient évidemment exactement le même TMS pour la fonction loglinéaire $w(\cdot)$ définie par $w(q_1, q_2) = \alpha \ln q_1 + \beta \ln q_2$.

Dans le cas de l'exemple de l'agent A vu plus haut, où $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, on a :

$$\text{TMS}_{2/1}(q_1, q_2) = \frac{2q_2}{q_1}.$$

Si on avait eu $\alpha = 4$ et $\beta = 2$, le TMS aurait été le même, puisque :

$$\text{TMS}_{2/1}(q_1, q_2) = \frac{4q_2}{2q_1} = \frac{2q_2}{q_1}.$$

Ceci est parfaitement normal. En effet, les fonctions d'utilité étant ordinales, la fonction définie par $u(q_1, q_2) = q_1^4 q_2^2$ représente les mêmes préférences que la fonction $u_A(q_1, q_2) = q_1^2 q_2$ dont elle est une transformation croissante.

II. Le problème de l'échange

Le modèle de concurrence parfaite est fondamentalement un modèle d'échange. La question de l'échange se subdivise elle-même en deux questions (qui sont liées) : celle des prix auxquels les biens sont échangés (le taux d'échange) et celle du gain de chacun à l'échange, autrement dit du partage du gain à l'échange.

On va raisonner dans le cas le plus simple d'une économie à deux agents A et B et à deux biens (1) et (2).

Chaque agent est caractérisé par ses goûts (ses préférences, sa carte d'indifférence) et ce qu'il possède (ses dotations initiales).

- Les dotations initiales de A sont : $(q_{10A}, q_{20A}) = Q_{0A}$; celles de B : $(q_{10B}, q_{20B}) = Q_{0B}$.
- On suppose que les courbes d'indifférence ont la forme « habituelle », *i.e.* qu'elles sont de type hyperbolique.

Pour « concrétiser » un peu, on va donner des valeurs à ces dotations initiales et définir les fonctions d'utilité, mais c'est exactement le même raisonnement pour des dotations initiales quelconques et des fonctions d'utilité telles que les courbes d'indifférence sont continues, décroissantes, convexes et asymptotes aux axes.

On va donc reprendre l'exemple de l'agent A rencontré plus haut : ses dotations initiales sont : (3 , 6) et ses préférences peuvent être représentées par la fonction $u_A(q_1, q_2) = q_1^2 q_2$. La courbe d'indifférence de A passant par (3 , 6) a donc pour équation : $q_2 = \frac{54}{q_1^2}$ (voir plus haut).

On suppose que les dotations initiales de B sont : (5 , 5) et que $u_B(q_1, q_2) = q_1\, q_2^4$. La courbe d'indifférence de B passant par le panier (5 , 5) a donc pour équation :

$$u_B(q_1, q_2) = u_B(5 ; 5),$$

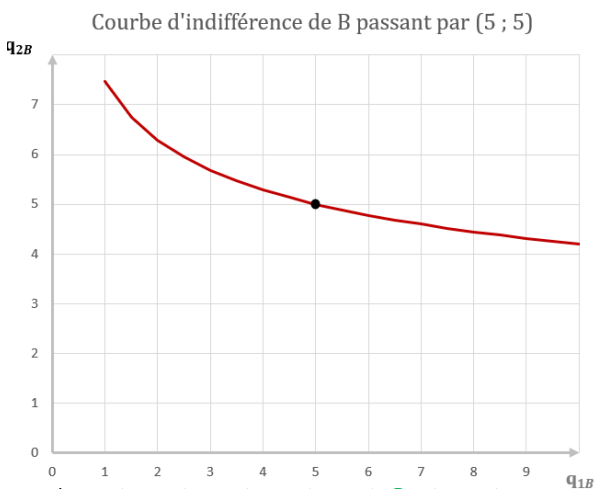
ce qui donne :

$$q_1\, q_2^4 = 3125$$

à savoir :

$q_2 = \frac{5^{5/4}}{q_1^{1/4}}$ (voir graphique ci-contre).

Remarque : TMS(5 ; 5) = ¼.



On va maintenant supposer que, dans cette économie, il n'y a *pas de production* : c'est donc une *économie d'échange pur*.

La quantité de bien (1) disponible dans l'économie, que l'on note $\overline{q_1}$, est donc la somme des dotations initiales en bien (1) des deux agents :

$$\overline{q_1} = q_{10A} + q_{10B} = 3 + 5 = 8.$$

Même chose pour $\overline{q_2}$, la quantité de bien (2) disponible dans l'économie. C'est la somme des dotations initiales en bien (2) des deux agents :

$$\overline{q_2} = q_{20A} + q_{20B} = 6 + 5 = 11.$$

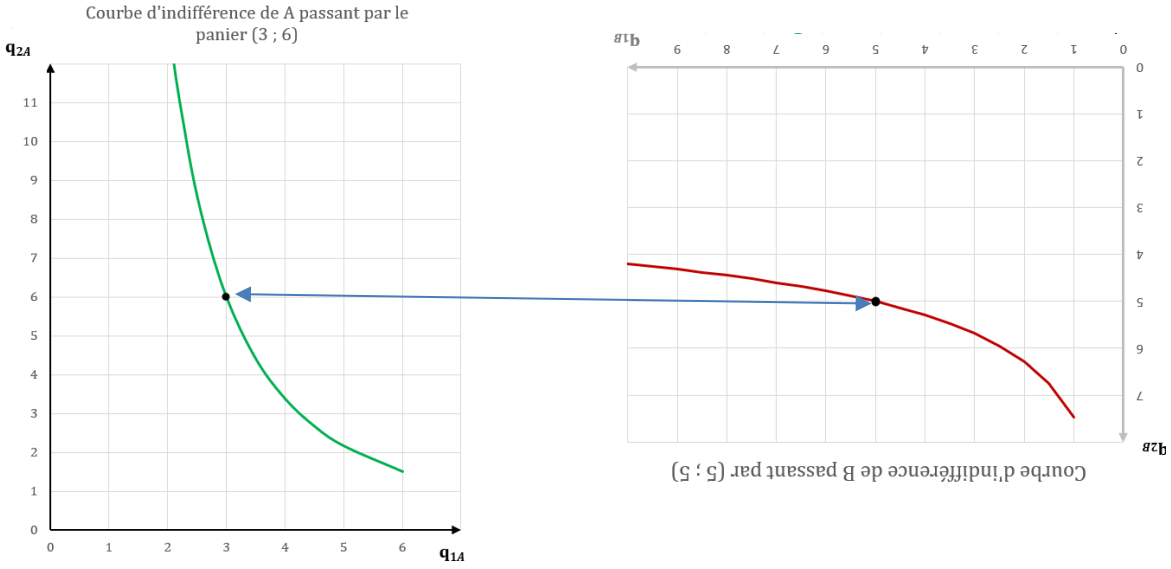
Dans la théorie néoclassique, on s'intéresse à la satisfaction que le consommateur retire de la consommation des biens et on suppose que le consommateur est **rationnel**, au sens particulier où *il tente d'obtenir la plus grande satisfaction possible*. On s'intéresse donc ici à la façon dont A et B se coordonnent pour améliorer leur satisfaction.

A ce stade, tout est possible. Pour améliorer sa situation, A peut tuer – ou voler – B et consommer tous les biens disponibles dans l'économie. Ce cas est exclu par la théorie néoclassique. On suppose, en effet, qu'il existe un certain nombre de règles sociales. On pourrait imaginer qu'on met tout en commun et qu'on répartit selon les besoins des individus. Ce ne sont pas les règles qui sont retenues dans le modèle. On y suppose que *A et B respectent la propriété privée des dotations et ne peuvent améliorer leur satisfaction que par un échange volontaire*. Il s'agit donc d'une société marchande.

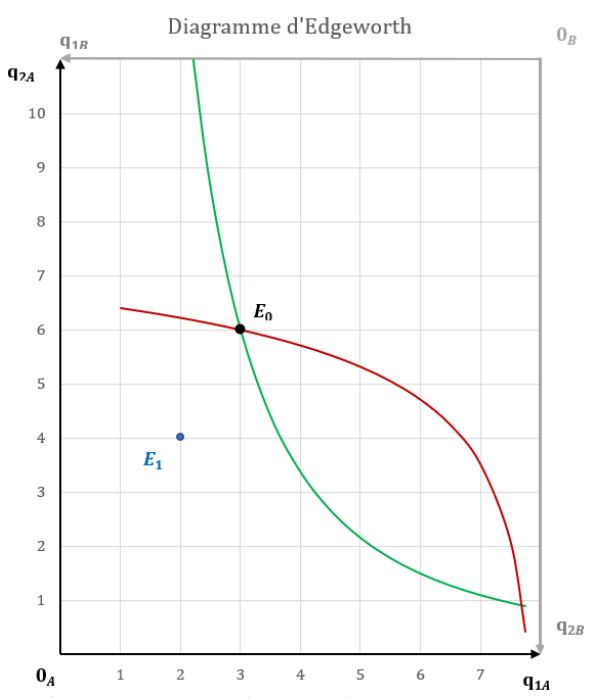
Analyse graphique

Pour représenter cette situation, et les échanges possibles, on utilise un schéma appelé **diagramme d'Edgeworth** ou **boîte d'Edgeworth**.

Graphiquement, on construit une boîte d'Edgeworth en *retournant* la courbe d'indifférence de B et en la *superposant* à celle de A *de façon à ce que les deux paniers de dotations initiales* $Q_{0A} = (3 ; 4)$ *et* $Q_{0B} = (5 ; 5)$ *se superposent*.



Ce qui donne le rectangle suivant où **Q_{0A} et Q_{0B} sont un seul et même point renommés Q_0**. C'est ce rectangle qu'on appelle *boîte* – ou *diagramme* – *d'Edgeworth*.



La base – ou longueur – de ce rectangle représente la quantité de bien (1) disponible dans l'économie, $\overline{q_1}$, à savoir 8. Sa hauteur – ou largeur – représente la quantité de bien (2) disponible dans l'économie, $\overline{q_2}$, à savoir 11. **Bien vérifier cela !**

Chaque point de ce diagramme est une allocation possible des ressources de l'économie entre A et B. On appelle une telle allocation un **état réalisable** de l'économie.

Soit une économie à deux agents, A et B, et deux biens, (1) et (2), disponibles en quantités $\overline{q_1}$ et $\overline{q_2}$ respectivement.
On appelle **état réalisable** de cette économie, tout ensemble E :

$$\boldsymbol{E = \{(q_{1A}\,,\, q_{2A})\,,\, (q_{1B}\,,\, q_{2B})\} \text{ avec } q_{1A} + q_{1B} = \overline{q_1} \text{ et } q_{2A} + q_{2B} = \overline{q_2}},$$

où $(q_{1A}\,,\, q_{2A})$ est le panier de biens que possède A et $(q_{1B}\,,\, q_{2B})$, le panier de biens que possède B.
C'est donc *une allocation des ressources disponibles entre les deux agents A et B*.

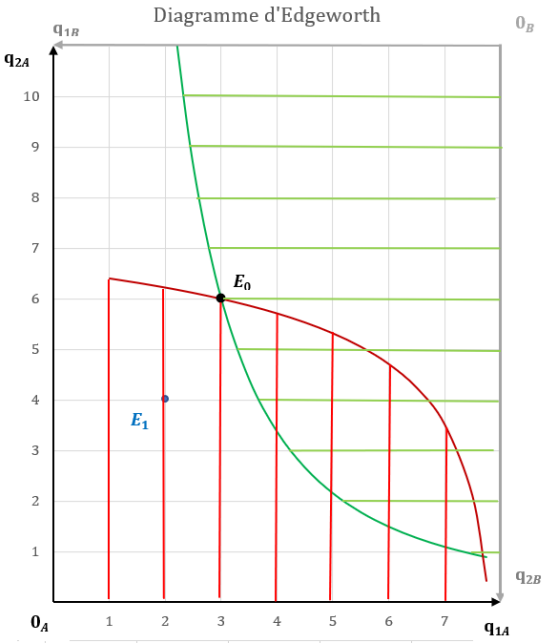
Dans notre exemple, un état réalisable est :

$$E = \{(q_{1A}\,,\, q_{2A})\,,\, (q_{1B}\,,\, q_{2B})\} \text{ avec } q_{1A} + q_{1B} = 8 \text{ et } q_{2A} + q_{2B} = 11.$$

Ainsi, par exemple, l'allocation initiale $Q_0 = \{Q_{0A}, Q_{0B}\} = \{(3\,;\,6)\,,\,(5\,;\,5)\}$ est un état réalisable de cette économie (et pour cause), qui apparaît comme le point (3 ; 6) quand on regarde le diagramme d'Edgeworth à l'endroit, et comme le panier (5 ; 5) quand on le regarde à l'envers.
De même, l'état réalisable $E_1 = \{(2\,;\,4)\,,\,(6\,;\,7)\}$, le point bleu sur le graphique ci-dessus, apparaît comme le point (2 ; 4) lorsqu'on regarde ledit graphique à l'endroit (A a alors deux biens (1) et

quatre biens (2)) et comme le point (6 ; 7) lorsqu'on le regarde à l'envers (B a alors six biens (1) et sept bien (2)). Et on a bien (8 ; 11) = (2 ; 4) + (6 ; 7) : à eux deux, A et B possèdent bien l'ensemble des ressources disponibles de l'économie.

L'ensemble des états réalisables que A préfère à son panier de dotations initiales, Q_{0A} = (3 ; 6), est situé au-dessus de sa courbe d'indifférence passant par Q_{0A}. Ce sont les états de la zone hachurée en vert dans le graphique ci-dessous.
L'ensemble des états réalisables que B préfère à son panier de dotations initiales, Q_{0B} = (5 , 5), est situé au-dessus de sa courbe d'indifférence passant par Q_{0B}. Mais, cette courbe étant à l'envers, dans le diagramme d'Edgeworth, cette zone est située sous cette courbe d'indifférence. Ce sont donc les états réalisables de la zone hachurée en rouge dans le graphique ci-dessous.



Comment A et B vont-ils se coordonner ? Quel taux d'échange va-t-il en résulter ?

Si les échanges sont volontaires, l'ensemble des états réalisables que A et B sont susceptibles de tous deux trouver acceptables sont ceux situés dans la zone hachurée à la fois en vert et en rouge, appelée la *lentille*, en raison de sa forme. Car passer de l'état réalisable $\boldsymbol{E}_0$ à tout état réalisable de la lentille les avantage tous les deux.

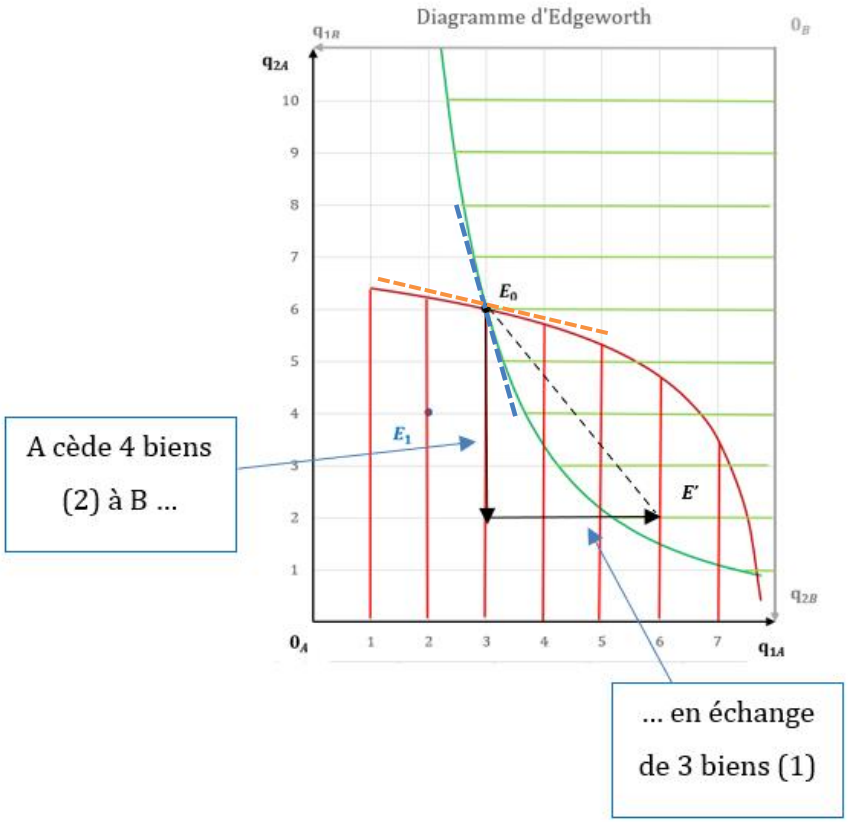
Comment A et B vont-ils se coordonner ? Quel taux d'échange va-t-il en résulter ?

Si les échanges sont volontaires, l'ensemble des états réalisables que A et B sont susceptibles de tous deux trouver acceptables sont ceux situés dans la zone hachurée à la fois en vert et en rouge,

appelée la *lentille*, en raison de sa forme. Car passer de l'état réalisable $\boldsymbol{Q}_0$ à tout état réalisable de la lentille les avantage tous les deux.

Exemple : supposons que A cède 4 unités de bien (2) à B en échange de 3 unités de bien (1) (le taux d'échange – autrement dit le prix du bien (1) en bien (2) – est alors égal à 4/3 ; ce taux d'échange est représenté par la valeur absolue de la pente du segment $[E_0E']$ sur le graphique ci-dessus) :

- A se retrouve alors avec le panier $Q'_A = Q_{0A} + (+3 ; -4) = (3 ; 6) + (3 ; -4) = (6 ; 2)$
- et B, avec $Q'_B = Q_{0B} + (-3 ; +4) = (5 ; 5) + (-3 ; 4) = (2 ; 9)$.
- Sur le graphique ci-dessous, ils sont donc passés de l'état réalisable $E_0 = \{(3 ; 6) , (5 ; 5)\}$ à l'état réalisable $E' = \{(6 ; 2) , (2 ; 9)\}$, qui est dans la lentille.



Certes, ils préfèrent tous deux l'état réalisable $\boldsymbol{E'}$ à l'état initial $\boldsymbol{E_0}$ (puisque E' est dans la lentille), mais il n'y a aucune raison qu'ils se mettent d'accord sur cette allocation des ressources plutôt qu'une autre. Qui propose cet échange ? Pourquoi l'accepteraient-ils ? Si c'est B qui propose cet échange, A ne va-t-il pas trouver qu'il doit donner beaucoup de bien (2) pour trop peu de bien (1) ? Qu'il aurait pu en céder trois, voire même deux, et cependant améliorer la satisfaction de B ? Et puis est-ce « rationnel » au sens, défini plus haut, où il s'agit de la satisfaction la plus grande qu'ils puissent obtenir ?

Bref, si l'on n'ajoute aucune hypothèse, on ne peut pas dire quelles quantités A et B vont échanger, ni *a fortiori* sur quel taux d'échange ni sur quelle allocation ils vont se mettre d'accord, si tant est qu'ils se mettent d'accord d'ailleurs.