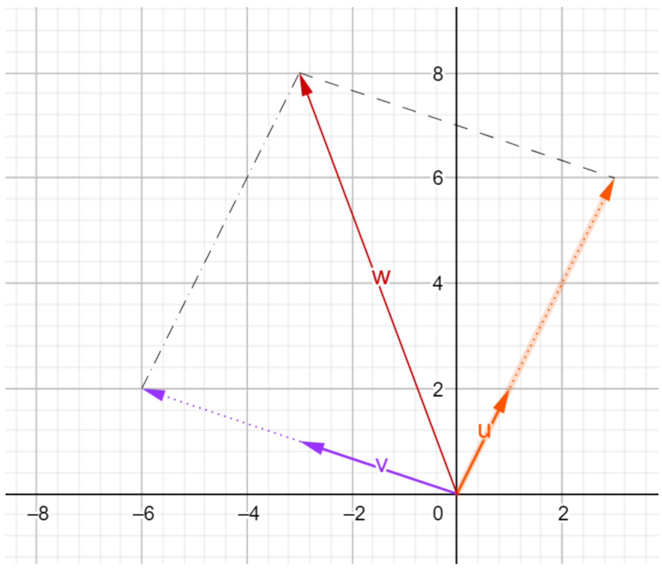
Passeport L1 vers L2
Algèbre linéaire

C. Vernier



1 Espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$

Définition 1

*Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide E, tel que :*

- *Il y a moyen de sommer deux éléments de E.*
- *Il y a moyen de multiplier un élément de E par un élément de $\mathbb{K}$.*

*Les éléments de E sont appelées les **vecteurs**, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les **scalaires**.*

ou, plus rigoureusement,

Définition 2

*Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide E muni de deux lois*

1. *une addition interne $+ : E \times E \to E$ qui vérifie*

   (A_1) $\forall\,(u,v,w) \in E^3,\ u + (v + w) = (u + v) + w.$
   (A_2) $\exists\, 0_E \in E$ *t.q.* $\forall u \in E,\ u + 0_E = u$ *: c'est le **vecteur nul** de E.*
   (A_3) $\forall u \in E\ \exists(-u) \in E$ *tel que* $u + (-u) = 0_E$ *: c'est **l'opposé** de u.*
   (A_4) $\forall\,(u,v) \in E^2,\ u + v = v + u.$

2. *une multiplication externe $\cdot : E \times \mathbb{K} \to E$ qui vérifie*

   (M_1) $\forall\, u \in E,\ 1 \cdot u = u.$
   (M_2) $\forall\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\, u \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u.$
   (M_3) $\forall\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall\, u \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u.$
   (M_4) $\forall\,(u,v) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot (u + v) = \lambda u + \lambda v.$

*Les éléments de E sont appelées les **vecteurs**, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les **scalaires**.*

Exemples fondamentaux

1. Pour tout n, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   $\rightsquigarrow$ Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est $(0, \dots, 0)$.
2. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   $\rightsquigarrow$ Le vecteur nul de $\mathbb{K}[X]$ est le polynôme constant égal à 0.
3. Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices $n \times p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   $\rightsquigarrow$ Le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice $n \times p$ à coefficients tous nuls.
4. Soit X un ensemble quelconque. Alors l'ensemble $\mathbb{K}^X$ des fonctions $X \to \mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   $\rightsquigarrow$Le vecteur nul de $\mathbb{K}^X$ est la fonction constante nulle.
5. Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E^X est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   $\rightsquigarrow$ En particulier, l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 3

Soient $u_1, \ldots, u_p, v$ des vecteurs de E. On dit que v est ***combinaison linéaire*** *de $u_1, \ldots, u_p$ s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$.*

Exemple 4

Vrai ou Faux ? Le vecteur v est combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, u_3 :

1. *Dans $\mathbb{R}[X]$, $v(X) = X^3 + 4X^2 + 2X + 5$, $u_1(X) = 1 + X$, $u_2 = 3 + X^2$, $u_3(X) = 3X^2 + X^3$*

   Vrai □ *Faux* □

2. *Dans $\mathbb{R}[X]$, $v(X) = X^3 - X + 1$, $u_1(X) = 1 + X$, $u_2 = 3 + X^2$, $u_3(X) = 3X^2 + X^3$*

   Vrai □ *Faux* □

3. *Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $v = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = I_2$*

   Vrai □ *Faux* □

4. *Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $v(x) = 1$, $u_1(x) = \cos^2(x)$, $u_2(x) = 3\sin^2(x)$, $u_3(x) = e^{5x}$.*

   Vrai □ *Faux* □

Exemple 5 (*A vous !*)

1. ***Vrai ou Faux ?*** *$\varnothing$ est un e.v.* Vrai □ Faux □
2. ***Vrai ou Faux ?*** *L'ensemble des couples (u_n, v_n) de suites réelles est un e. v.* Vrai □ Faux □
3. ***Vrai ou Faux ?*** *L'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ est un e.v.* Vrai □ Faux □

2 Sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 6

*Un sous-ensemble $F \subset E$ est un **sous-espace vectoriel (s.e.v.)** de E si $0_E \in F$ et*

$$\text{Pour tous } (u,v) \in F^2,\ \lambda \in \mathbb{R}, u + \lambda v \in F$$

$\rightsquigarrow$ *Un sous ensemble $F \subset E$ est un s.e.v. de E si, et seulement si F, muni des même lois que E est un espace vectoriel.*

Exemple 7 (*Vrai ou faux ?*)

1. ***Vrai ou Faux ?*** *$\varnothing$ est un s.e.v.* Vrai □ Faux □
2. ***Vrai ou Faux ?*** *$\{0_E\}$ est un s.e.v.* Vrai □ Faux □
3. ***Vrai ou Faux ?*** *L'ensemble $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré n est un s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$.* Vrai □ Faux □
4. ***Vrai ou Faux ?*** *L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$.*

   Vrai □ Faux □
5. ***Vrai ou Faux ?*** *Soit $F \subset E$ un s.e.v., et $u_1, \ldots, u_p \in F$. Si v est une combinaison linéaire de $u_1, ..., u_p$, alors $v \in F$.* Vrai □ Faux □

Exemple 8

Soient F, G deux s.e.v. de E. Vrai ou faux ?

1. *F et G peuvent être disjoints.* Vrai □ Faux □
2. *$F \cap G$ est un s.e.v. de E.* Vrai □ Faux □
3. *$F \cup G$ est un s.e.v. de E.* Vrai □ Faux □
4. *$E \setminus F$ est un s.e.v de E.* Vrai □ Faux □
5. *$F + G = \{u + v, u \in F, v \in G\}$ est un s.e.v. de E.* Vrai □ Faux □

Méthode 9

*Pour montrer que $F \subset E$ n'est **pas** un s.e.v. de E, on peut :*

- *Montrer que $0_E \notin F$*
- *Trouver u, v dans F tels que $u + v \notin F$*
- *Trouver $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u \notin F$. Penser à essayer $\lambda < 0$.*

Exemple 10 (*A vous !*)

Est-ce que F un s.e.v de E ?

1. $E = \mathbb{R}^3, F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = x + y - 3z = 0\}$ Vrai □ Faux □
2. $E = \mathbb{R}^3, F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + 2(z - 1) = 0\}$ Vrai □ Faux □
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2(x^2 + y^2) = 0\}$. Vrai □ Faux □
4. $E = \mathbb{R}_{35}[X], F = \{P \in \mathbb{R}_{35}[X],\ P'(1) + 2P(2) = 0\}$ Vrai □ Faux □
5. $E = \mathbb{R}_2[X], F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(X) - 2X = 0\}$. Vrai □ Faux □
6. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$ Vrai □ Faux □
7. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ Vrai □ Faux □

Brouillons, ratures, justifications

3 S.e.v engendré, familles génératrices

Définition 11

Soient $u_1, \ldots, u_p \in E$. On note

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = \{u \in E,\ \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, u = \sum \lambda_i u_i\}$$

l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des u_i.
$\rightsquigarrow$ *C'est un s.e.v. de E, appelé* ***sous-espace engendré*** par $u_1, ..., u_p$.

Exemple 12 (*Vrai ou faux ?*)

1. *Pour tout $i = 1, ..., p$, $u_i \in \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p)$* — *Vrai* □ *Faux* □
2. *Si F est un s.e.v. et $u_1, ...u_p \in F$ alors $\mathrm{Vect}(u_1, ...u_p) \subset F$* — *Vrai* □ *Faux* □
3. *Notons $u_1(X) = 1 + X, u_2 = 3 + X^2, u_3(X) = 3X^2 + X^3 \in \mathbb{R}[X]$.*
   - $P(X) = X^3 - X + 1 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ *:* — *Vrai* □ *Faux* □
   - $Q(X) = X^3 + 4X^2 + 2X + 5 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ *:* — *Vrai* □ *Faux* □

Exprimer un s.e.v. comme s.e.v. engendré

Considérons le s.e.v de $\mathbb{R}^3$ donné par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y - z = 0\}$
$\rightsquigarrow$ On cherche $u_1, \ldots, u_p$ telle que $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$.

1. On prend $u \in F$ quelconque, et on utilise l'équation de F pour exprimer une (ou plusieurs) coordonnées de u en fonction des autres.

   $\rightsquigarrow$ Ici $u = (x, y, z) \in F \Rightarrow z = 2x + y$.

2. On a donc $u \in F \Rightarrow u = (x, y, 2x + y)$.

   Maintenant, on sépare ce qui dépend de chaque coordonnée restante.

   $\rightsquigarrow$ On trouve que $u = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1)$: c'est une combinaison linéaire de $(1, 0, 2)$ et $(0, 1, 1)$.

3. Donc, si $u \in F$ alors $u \in \mathrm{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, 1))$. Donc $F \subset \mathrm{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, 1))$.

4. On montre que $(1, 0, 2) \in F$ et $(0, 1, 1) \in F$, d'où $\mathrm{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, 1)) \subset F$.

5. On a donc $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, 1))$.

Exemple 13

Pour chacun des s.e.v. F suivants, trouver une famille $\mathcal{A}$ de vecteurs tels que $F = \text{Vect}(\mathcal{A})$.

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = z + t, 2x - y - z + t = 0\}$

2. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], 2XP = (X^2 - 1)P'\}$.

3. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{P \in E, P(-X) = P(X)\}$.

4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \{M \in E, AM = MA\}$.

Trouver une équation d'un s.e.v. engendré

Considérons le s.e.v de $\mathbb{R}^3$ donné par $F = \text{Vect}(u_1 = (1,2,1), u_2 = (-1,0,1))$
$\rightsquigarrow$ On cherche une condition sur x, y, z qui garantit que $(x,y,z) \in F$.

1. On prend $u = (x,y,z) \in F$ quelconque, et on l'exprime en fonction de u_1 et u_2 :

   $\rightsquigarrow$ Ici $u \in F$ ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = u \iff (\mathcal{S}_u) \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = x \\ 2\lambda_1 & = y \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = z \end{cases}$$

2. Il s'agit donc de trouver les conditions pour que $(\mathcal{S}_u)$ ait des solutions : si, après échelonnage on a une ligne du type "0 = Truc(x,y,z)", alors le système a des solutions ssi "Truc$(x,y,z) = 0$", donc Truc(x,y,z) est une des équations de F. Ici, on a

$$(\mathcal{S}_u) \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = x \\ 2\lambda_2 & = y - 2x \\ 2\lambda_2 & = z - x \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = x \\ 2\lambda_2 & = y - 2x \\ 0 & = x - y + z \end{cases}$$

   $\rightsquigarrow$ L'équation de F est $x - y + z = 0$.

3. *Vérification :* on regarde si u_1 et u_2 vérifient cette équation.

Exemple 14

Pour chacun des s.e.v. F suivants, trouver une équation de F.

1. $F = \text{Vect}((1,0,1)) \subset \mathbb{R}^3$
2. $F = \text{Vect}(1 - X, 1 - X^2) \subset \mathbb{R}_2[X]$.
3. $F = \text{Vect}\left(I_2, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$

Enlever ou remplacer un vecteur

Exemple 15 (*A montrer :*)

- *Si* u_p *est combinaison linéaire de* $u_1, \dots, u_{p-1}$ *alors* $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1})$.
- *Si* $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$, *et* $\lambda_p \neq 0$, *alors* $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, v)$.

Exemple 16 (*Exemples*)

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$, *montrer que* $\mathrm{Vect}((1,2,3),(2,3,4)) = \mathrm{Vect}((1,2,3),(3,4,5))$.
2. *Dans* $\mathbb{R}_2[X]$, *montrer que* $\mathrm{Vect}(X, 1+X, 1-X+X^2, 1+X^2) = \mathrm{Vect}(1, 1+X, 1+X^2)$

Familles génératrices

Définition 17

Soit $\mathcal{A}$ une famille de vecteurs.

- ***Famille génératrice d'un s.e.v*** *Soit F un s.e.v. de E, $\mathcal{A}$ est une* **famille génératrice de** *F ssi $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{A})$.*
- ***Famille génératrice de l'e.v*** *E En particulier, $\mathcal{A}$ est* **famille génératrice de** *E (ou* **famille génératrice** *tout court) ssi $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{A})$, autrement dit si tout vecteur de E est combinaison linéaire des u_i :*
$$\forall\, x \in E,\ \exists\, \lambda_1 \ldots, \lambda_k \text{ tels que } x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k$$

Méthode 18 (*Trouver une famille génératrice d'un s.e.v.*)

Soit F un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. On a vu comment trouver des vecteurs $u_1, ..., u_p$ tels que $F = \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p)$.

$\rightsquigarrow$ *Une fois qu'on a fait ça, $\mathcal{A} = \{u_1, ..., u_p\}$ est une famille génératrice de F.*

Méthode 19 (*Montrer qu'une famille est génératrice tout court*)

Pour vérifier si une famille $\{u_1, \ldots, u_k\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$, on pose $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et on cherche $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$.

$\rightsquigarrow$ *Ceci donne un système linéaire d'inconnues $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ et de second membre $(x_1, \ldots, x_n)$.*

- *Soit il y a au moins une solution,*

  $\rightsquigarrow$ *La famille est génératrice, et on a trouvé l'expression des λ_i en fonction des x_i.*
- *Soit le système n'admet pas de solution : dans ce cas, la famille n'est pas génératrice.*

  $\rightsquigarrow$ *Le système comporte alors des lignes du type $0 = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, qui donnent des équations du s.e.v $\mathrm{Vect}(u_1, ..., u_k)$.*

Exemple 20 (*A vous !*)

La famille $\mathcal{A}$ est-elle génératrice de l'e.v. E ? Sinon, donner une équation de $\mathrm{Vect}(\mathcal{A})$.

- *Dans $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A} = \{(1,2,3), (2,3,4), (3,4,5)\}$.* *Génératrice* □ *Pas génératrice* □
- *Dans $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A} = \{(1,2,3), (2,3,4), (0,1,1)\}$.* *Génératrice* □ *Pas génératrice* □
- *Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{A} = \{(1,\ 1 + X,\ 1 + X^2\}$.* *Génératrice* □ *Pas génératrice* □
- *Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{A} = \{X, 1 + X, 1 - X + X^2, 1 + X^2\}$.* *Génératrice* □ *Pas génératrice* □

Brouillons, calculs, équations

4 Familles libres et bases

Définition 21

Soit E un e.v., et $\mathcal{A} = \{u_1, \dots, u_k\} \subset E$ une famille de vecteurs. La famille $\mathcal{A}$ est **libre** *si pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$,*

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = 0_E \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, k$$

Exemple 22 (*Vrai ou Faux ?*)

Soit $\mathcal{A} = \{u_1, \dots, u_k\}$ une famille libre.

- $u_1 \notin \mathrm{Vect}(u_2, \dots, u_k)$. *Vrai* □ *Faux* □
- *Si $v \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F} \cup \{v\}$ est libre.* *Vrai* □ *Faux* □
- *Si $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ alors $\mathcal{A}$ est aussi libre.* *Vrai* □ *Faux* □

Méthode 23

Pour vérifier si une famille $\{u_1, \dots, u_k\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre, on suppose que $\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{R}^n}$.
$\rightsquigarrow$ *Ceci donne un système linéaire homogène d'inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.*

- *Soit la seule solution est $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$*

  $\rightsquigarrow$ *La famille est libre.*

- *Soit il existe des solutions non nulles.*

  $\rightsquigarrow$ *La famille n'est pas libre, et les solutions non nulles permettent d'exprimer certains des (u_i) comme combinaison linéaire des autres.*

Remarque 24

Si on voit directement une façon d'écrire un des u_i comme combinaison linaire des autres, on en déduit que $\mathcal{A}$ n'est pas libre.
Par exemple, $\mathcal{A} = \{u_1 = (0,1,1), u_2 = (0,-2,-2), u_3 = (1,2,1)\}$ n'est pas libre.

Exemple 25 (*Vrai ou Faux*)

- *Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{A} = \{u_1 = (1,2,3), u_2 = (2,3,4), u_3 = (3,4,5)\}$ est libre.* *Vrai* □ *Faux* □
- *Le vecteur $u_4 = (0,1,1) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{A})$.* *Vrai* □ *Faux* □
- *La famille $\mathcal{A}' = \{u_1, u_2, u_4\}$ est libre.* *Vrai* □ *Faux* □
- *Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille $\{P_1(X) = 1,\ P_2(X) = 1 + X,\ P_3(X) = 1 + X^2\}$ est libre.* *Vrai* □ *Faux* □
- *Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille $\{X, 1 + X, 1 - X + X^2, 1 + X^2\}$ est libre.* *Vrai* □ *Faux* □

✎ **Brouillons, calculs, ratures**

Exemple 26 (*A vous !*)

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *La famille $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ est-elle libre ?* *Vrai* □ *Faux* □
2. *Est-elle génératrice ?* *Vrai* □ *Faux* □
   ⇝ *Donner un vecteur de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'appartient pas à* $\mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3, A_4)$.
3. *La famille $\{A_1, A_2, A_3\}$ est-elle libre ?* *Vrai* □ *Faux* □
4. *Est-elle génératrice ?* *Vrai* □ *Faux* □

Définition 27

- *Une **base de** E est une famille à la fois libre et génératrice.*

  $\rightsquigarrow$ *Donc $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E ssi, pour chaque $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$.*

- *On appelle le n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ **coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$.*

- *Si F est un s.e.v., la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est une **base de** F si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ et $\{u_1, \dots, u_k\}$ est libre.*

Exemples fondamentaux : les bases canoniques

1. $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base, les coordonnées de (x,y) sont (x,y).
2. $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   Dans cette base, les coordonnées de (x,y,z) sont x, y et z.
3. $\{e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.
4. $\{E_0(X) = 1, E_1(X) = X, E_2(X) = X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   Dans cette base, les coordonnées du polynôme $aX^2 + bX + c$ sont (c,b,a).
5. $\{E_0(X) = 1, E_1(X) = X, \dots, E_n(X) = X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, dans laquelle les coordonnées d'un polynôme sont ses coefficients.

   On l'appelle **base canonique de** $\mathbb{R}_n[X]$ (et en général, on ne donne pas de noms aux polynômes $1, X, ..., X^n$)
6. La famille ci-dessous est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

   $$\left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Dans cette base, les coefficients de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sont (a,b,c,d).
7. Plus généralement, la famille $\{E_{ij}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le p\}$, où E_{ij} est la matrice dont le coefficient en (i,j) vaut 1, et les autres 0, est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

   Dans cette base, les coordonnées d'une matrice A sont ses coefficients.

   On l'appelle **base canonique de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 28

$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *est libre et génératrice dans $\mathbb{R}^2$, donc c'est une base.*

De plus, les coordonnées de $u = (2,3)$ dans cette base sont $(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})$.

Exemple 29 (*Base d'un s.e.v*)

Considérons le s.e.v de $\mathbb{R}^3$ *donné par* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y - z = 0\} = \mathrm{Vect}((1,0,2),(0,1,1))$

$\rightsquigarrow$ *Est-ce que* $((1,0,2),(0,1,1))$ *est une base de* F *?* *Vrai* □ *Faux* □

Exemple 30 (*Vrai ou Faux ?*)

1. *La famille* $\mathcal{A} = \{(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$. *Vrai* □ *Faux* □
2. *La famille* $\mathcal{A}' = \{(1,2,3),(2,3,4),(0,1,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$. *Vrai* □ *Faux* □

   $\rightsquigarrow$ *Si oui, quelles sont les coordonnées de* $(1,2,3)$ *dans cette base ? Et celles de* $(3,4,5)$ *?*
3. *La famille* $\{(1, 1+X, 1+X^2\}$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$. *Vrai* □ *Faux* □

   $\rightsquigarrow$ *Si oui, quelles sont les coordonnées de* $1+X$ *dans cette base ? Et de* $3X + X^2$ *?*
4. *La famille*$\{X, 1+X, 1-X+X^2, 1+X^2\}$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$. *Vrai* □ *Faux* □

✎ ***Brouillons, calculs, ratures***

Dimension

Théorème 31

Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments ; on appelle ce nombre **dimension** de E.

Proposition 32

Dans un espace vectoriel E de dimension n, on a plus précisément :

- *les familles libres ont* au maximum n *éléments*
- *les familles génératrices ont* au minimum n *éléments*
- *les bases ont* pile n *éléments.*

Exemples fondamentaux

1. Pour tout n, la base canonique $\{e_1 = (1,0,\dots,0), e_2 = (0,1,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
   $\rightsquigarrow$ Donc $\boxed{\dim \mathbb{R}^n = n}$.
2. On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc $\boxed{\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1}$.
3. Pour tous entiers n, p, la famille $(E_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ des matrices dont les coefficients sont
$$(E_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j) = (k,l) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$
   est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Donc $\boxed{\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np}$.

Méthode 33

Pour vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de E, on peut :

- *Montrer que c'est une famille libre et génératrice (c'est long !)*
- *Si on sait déjà que E est de dimension n, on peut montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre à n vecteurs.*
- *Si on sait déjà que E est de dimension n, on peut montrer que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice à n vecteurs.*

Exemple 34 (*A vous !*)

Dans chacun des cas suivants, montrer que $\mathcal{B}$ est une base puis donner les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$.

1. $E = \mathbb{R}^3, \mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$, $v = (2,7,1)$
2. $E = \mathbb{R}_1[X], \mathcal{B} = (1-X, 1+X)$, $v(X) = 1+3X$
3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right)$, $v = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

Exemple 35 (*A vous !*)

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de E.

1. *Quelle est la dimension de E ?*
2. *Posons $w_1 = v_2 - v_3$, $w_2 = v_3 - v_1$, $w_3 = v_2 + v_1$. La famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est elle libre ? Est-ce une base de E ?*
3. *Même question pour $w_1 = v_2 - v_3$, $w_2 = v_3 - v_1$, $w_3' = v_1 - v_2$.*
4. *Quelle est la dimension de* $\mathrm{Vect}(w_1, w_2, w_3')$ *?*

Brouillons, calculs, ratures

Exemple 36

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n et $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subset E$ une famille de vecteurs.

1. *On suppose que $p > n$. Que peut-on dire de $\mathcal{F}$? Et si $n > p$? Et si $n = p$?*
2. *Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E, $u = e_1 + e_2 + ... + e_n$. Coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$?*
3. *Supposons que $p < n$ et que $\mathcal{F}$ est libre.* ***Vrai ou faux ?***
   - $\{v_1, \dots, v_{p-1}\}$ *est libre.* Vrai □ Faux □
   - *Pour tout* $1 \leq i \leq p$, $v_i \neq 0_E$ Vrai □ Faux □

Sous-espaces vectoriels et dimension

Proposition 37

Si E est de dimension finie et $F \subset E$ est un s.e.v., alors $\boxed{\dim F \leq \dim E}$, *et* $\boxed{\dim F \leq \dim E \iff F = E}$.

Exemple 38

Donner une base et la dimension des s.e.v F suivants :

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vect}((1,1,1))$
2. *Dans* $\mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = x + y - 3z = 0\}$
3. *Dans* $\mathbb{R}_3[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P'(1) + 2P(2) = 0\}$
4. *Dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$
5. *Dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $F = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), {}^tA = -A\}$

✎ **Brouillons, calculs, ratures**

Proposition 39 (*Somme et dimension*)

- *Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E, alors* $\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$
- *En particulier, $E = F \oplus G$ ssi ($\dim E = \dim F + \dim G$ et $\dim(F \cap G) = 0$).*
- *De plus, $E = F \oplus G$ ssi, en prenant l'union d'une base de F et d'une base de G, on obtient une base de E .*

Exemple 40

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z = 0, x-y = 0\}$.

1. *Déterminer une base de F. En déduire $\dim F$.*
2. *Déterminer une base de G. En déduire $\dim G$.*
3. *Déterminer $F \cap G$. En déduire $\dim(F \cap G)$.*
4. *Calculer $\dim(F+G)$.*
5. *Est-ce que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?*

✎ ***Brouillons, calculs, ratures***

5 Applications linéaires.

Définition 41

Soient E, F deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application.

- *On dit que f est **linéaire** si pour tous $u, v \in E$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

- *L'ensemble des applications linéaires $E \to F$ est noté $\mathcal{L}(E, F)$.*
- *Une application linéaire $f : E \to E$ est appelée **endomorphisme** de E.*
  On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes.
- *Une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme**.*

Exemple 42 (*A vous !*)

1. *$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2xy - 3z, xz) \in \mathbb{R}^2$ est linéaire.* Vrai □ Faux □
2. *$f : P \in \mathbb{R}_5[X] \mapsto P'(3) \in \mathbb{R}$ est linéaire.* Vrai □ Faux □
3. *$f : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto aX + (b - 3a) \in \mathbb{R}_1[X]$ est linéaire.* Vrai □ Faux □
4. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ deux matrices fixées.*
   Alors $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ est linéaire. Vrai □ Faux □
5. *$f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est linéaire.* Vrai □ Faux □

Calculs, corrections, lettres grecques

Image et noyau d'une application linéaire

Définition 43

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- *On appelle* ***image*** *de f, noté $\mathrm{Im}(f)$, le s.e.v*

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{v \in F,\ \exists u \in E \ tq \ v = f(u)\} \subset F$$

Si F est de dim finie, $\dim \mathrm{Im}(f)$ est appelée ***rang*** *de f, noté $\mathrm{rg}(f)$.*

- *On appelle* ***noyau*** *de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, le s.e.v.*

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E,\ f(u) = 0_F\} \subset E$$

Proposition 44

On suppose que E et F sont de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- ***Théorème du rang :*** $\boxed{\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f)}$
- *f est* ***injective*** *ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ ssi $\mathrm{rg}(f) = \dim E$.*
- *f est* ***surjective*** *ssi $\mathrm{Im}(f) = F$ ssi $\mathrm{rg}(f) = \dim F$.*
- *Si $\dim F = \dim E$, alors f est surjective ssi f est injective ssi f est bijective.*

Exemple 45

Considérons l'application $d : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_2[X]$.

- $\mathrm{Ker}(d) = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P' = 0\} = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P = a_0\}$
- $\mathrm{Im}(d) = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \exists Q \in \mathbb{R}_2[X], Q' = P\} = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P = a_0 + a_1 X\}$

$\rightsquigarrow$ *L'application $d \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ n'est ni surjective, ni injective. On a :*
$\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, $\dim \mathrm{Ker}(d) = 1$, $\dim \mathrm{Im}(d) = 2$.

Exemple 46 (*Vrai ou Faux ?*)

1. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $v \in Ker(f)$.*
   $\rightsquigarrow$ *Pour tout $u \in E$, on a $f(u - 2v) = f(u + v)$.* Vrai □ Faux □
2. *Soit $f : E \to F$ linéaire. Alors $0_F \in \mathrm{Im}(f)$.* Vrai □ Faux □
3. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ linéaire. Alors, si f n'est pas surjective, elle est nulle.* Vrai □ Faux □
4. *Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ linéaires. On suppose que $g \circ f$ est l'application nulle.*
   Alors $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Vrai □ Faux □

Exemple 47 (*Vrai ou Faux ?*)

1. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3[X]$ *linéaire. Alors* f *est injective ssi* $\mathrm{rg}(f) = 3$. *Vrai* □ *Faux* □

   $\rightsquigarrow$ *Dans ce cas,* f *est bijective.* *Vrai* □ *Faux* □

2. *Soit* $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ *une application linéaire telle que* $f(1, 42, -2, 3, 5) = 1$.

   Alors f *est surjective.* *Vrai* □ *Faux* □

3. *Soit* $f : \mathbb{R}^{21} \to \mathbb{R}^7$ *une application linéaire.*

   Il existe deux vecteurs distincts u *et* v *dans* $\mathbb{R}^{21}$ *tels que* $f(u) = f(v)$. *Vrai* □ *Faux* □

Exemple 48 (*A vous !*)

1. $f : P \in \mathbb{R}_5[X] \mapsto P'(3) \in \mathbb{R}$ *Injective* □ *Surjective* □ *Bijective* □
2. $f : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto aX + (b - 3a) \in \mathbb{R}_1[X]$ *Injective* □ *Surjective* □ *Bijective* □
3. $f : M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *Injective* □ *Surjective* □ *Bijective* □
4. $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *Injective* □ *Surjective* □ *Bijective* □

✎ ***Brouillons, calculs, ratures***

6 Représentation matricielle

Soient E et F 2 e.v. de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F.

Méthode 49

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On lui associe une matrice $A = A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ comme suit :

- ***Etape 1*** *Pour $j = 1, \dots, n$, on calcule $f(e_j) \in F$.*
- ***Etape 2*** *On calcule les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$: On trouve $a_{1j}, a_{2j}, ... a_{pj}$ tels que $f(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + ... + a_{pj} f_p$.*
- *La j-ème colonne de la matrice A est le vecteur-colonne $[f(e_j)]_{\mathcal{B}'} = {}^t \begin{pmatrix} a_{1j} & \dots & a_{pj} \end{pmatrix}$, donc*

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [f(e_1)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [f(e_n)]_{\mathcal{B}'} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ *A est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, et on la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.*
Dans le cas d'un endomorphisme, on choisit généralement la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.

Exemple 50

1. *Donner la matrice de l'application $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (3x + y, 3x - y + z) \in \mathbb{R}^2$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.*
2. *Donner la matrice de f dans les bases $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1)\}$ et $\mathcal{B}' = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (1, 1)\}$.*

✎ ***Brouillons, calculs, ratures***

Exemple 51

Dans chacun des cas suivants, donner la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

1. $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto(x,y,x+y)\in\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}=\{(1,1),(1,-1)\}$, $\mathcal{B}'=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$
2. $f:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto(x+y+z,x-y)\in\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}=\{(1,1,1),(1,-1,0),(0,0,1)\}$, $\mathcal{B}'=\{(3,0),(0,2)\}$
3. $f:P\in\mathbb{R}_3[X]\mapsto(P(1),P(2))\in\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}=\{1,X,X^2,X^3\}$, $\mathcal{B}'=\{(1,0),(0,1)\}$
4. $f:P\in\mathbb{R}_2[X]\mapsto\int_0^x P(t)dt\in\mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{B}=\{1,X,X^2\}$, $\mathcal{B}'=\{1,X,X^2,X^3\}$
5. $f:(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\mapsto(a+b+c)+aX+bX^2+cX^3\in\mathbb{R}_3[X]$,
   $\mathcal{B}=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, $\mathcal{B}'=\{1,1+X,1+X^2,1+X^3\}$

✎ **Brouillons, calculs, ratures**

Exemple 52 (***A vous !***)

On considère l'application

$$f : A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

1. *Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

2. *Donner la matrice de f dans la base*

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

3. *Y a-t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de f soit I_4 ?*

Brouillons, calculs, ratures

Opérations sur les matrices

Proposition 53

Soient E, F, G trois e.v. avec des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$

- *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)}$.

- *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}$.

  On en déduit, dans le cas où $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

- *Alors* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k\ fois}) = A^k}$.

- *Et f est un isomorphisme ssi A est inversible, et* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}}$.

Méthode 54 (*Matrice, image et noyau*)

Soit $f \in L(E, F)$ et A sa matrice dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

- *Soit $v \in E$. Alors $v \in$ Ker(f) ssi $A[v]_{\mathcal{B}} = 0$, où $[v]_{\mathcal{B}}$ est le vecteur des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$.*

  $\rightsquigarrow$ *En notant ces coordonnées $(x_1 \ldots, x_n)$, on se ramène donc à un système linéaire homogène, d'inconnues les x_i.*

- *Soit $v \in F$; $v \in \mathrm{Im}(f)$ ssi, il existe $x \in E$ tel que $A[x]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}'}$.*

  $\rightsquigarrow$ *On se ramène à un système linéaire d'inconnues $x_1, \ldots, x_n$ (les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$).*

- *Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.*

  $\rightsquigarrow$ *Les colonnes de A donnent les coordonnées d'une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ dans la base $\mathcal{B}'$.*

  ⚠ *Ce n'est pas forcément une famille libre !*

Exemple 55

On note $d : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_2[X]$, $t : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{R}_2[X]$

1. *Calculer la matrice de* t *dans la base canonique*
2. *Donner l'expression de l'application* $d + 3t \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ *et calculer sa matrice de deux façons différentes.*
3. *Calculer la matrice de* d^2 *et* d^3. *En déduire l'application* d^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.
4. *Calculer la matrice de* $d \circ t$ *et celle de* $t \circ d$. *Que peut-on en déduire ? Est-ce qu'on aurait pu s'en douter ?*

Exemple 56

On considère l'application

$$f : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto (P(1), P'(0)) \in \mathbb{R}^2$$

1. *Montrer que* f *est linéaire.*
2. *Donner la matrice de* f *dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}_2[X]$ *et* $\mathbb{R}^2$.
3. *En déduire une base de* $\mathrm{Ker}(f)$ *et une base de* $\mathrm{Im}(f)$.
4. f *est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

Exemple 57

On considère les applications linéaires suivantes :

$$f : P \in \mathbb{R}_1[X] \mapsto (P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^2$$
$$g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - 2y, 2x - y) \in \mathbb{R}^2$$

1. *Donner la matrice de* f *dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}_1[X]$ *et de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Donner la matrice de* g *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.
3. *Calculer la matrice de* $g \circ f$ *dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}_2[X]$ *et de* $\mathbb{R}^2$ *de deux manières différentes.*

✎ **Brouillons, calculs, ratures**

Changement de base

La matrice A dépend de quelles bases on a choisi sur E et F.

Pour calculer la matrice de f dans un autre choix de bases, on peut utiliser des matrices de passage :

Définition 58

- *Soient $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_p), \mathcal{B}_1 = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de E.*
  *La **matrice de passage** de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}_1$, notée $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1}$ est la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont la j-ème colonne est donnée par les coordoonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}_0$.*
-
- *$P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1}$ est inversible, et $P^{-1}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_0}$*
- *Soit $\mathcal{B}_2$ une troisième base. Alors $P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1} \cdot P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$*

Proposition 59

Soient $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ deux bases de E, $\mathcal{B}'_0, \mathcal{B}'_1$ deux bases de F. On note $P = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1},\ Q = P_{\mathcal{B}'_0,\mathcal{B}'_1}$.

- *Soit $u \in E$, on note $X = [u]_{\mathcal{B}_0}$ et $X' = [u]_{\mathcal{B}_1}$ les coordonnées de u dans $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$. Alors $\boxed{X = PX'}$.*
- *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on note $A = [f]_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}'_0},\ B = [f]_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1}$. Alors $\boxed{B = Q^{-1}AP}$.*
- *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $A = [f]_{\mathcal{B}_0},\ B = [f]_{\mathcal{B}_1}$. Alors $\boxed{B = P^{-1}AP}$.*

Exemple 60

1. *Donner la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $((1,0),(1,1))$.*
2. *Calculer la matrice de passage de $((1,0),(1,1))$ à la base canonique.*
3. *Donner la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$.*
4. *Calculer la matrice de passage de $((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$ à la base canonique.*
5. *En utilisant la formule de changement de base, retrouver la matrice de l'application $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (3x+y, 3x-y+z) \in \mathbb{R}^2$ dans les bases $((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$ et $((1,0),(1,1))$.*

Exemple 61

On considère l'endomorphisme

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$$

1. *Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
2. *On considère la base $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}_1$.*
3. *Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$ de deux façons différentes :*
   - *Directement, avec la définition,*
   - *A l'aide de la matrice de passage calculée en 2.*

Exemple 62

On considère l'application

$$f : A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

1. *Donner la matrice de passage de la base canonique à la base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. *Donner la matrice de ϕ dans cette base.*

Brouillons, calculs, ratures