


UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE
OMNIBUS SAPIENTIA UNICUIQUE EXCELLENTIA

Université Paris 1 Panthéon Sorbonne,
Institut de démographie



Cours d'analyse démographique niveau : **Master de démographie**
par Alexandre Avdeev, (IDUP) ; avec la contribution et participation de
Jitka Rychtaříková (DDG, Université Charles à Prague) et
Irina Troitskaia (Université d'Etat Lomonosov à Moscou, Faculté d'économie)

Chapitre 11

Modèles de croissance et de la structure de population par âge

- Modèles de croissance
 - un aperçu historique de la notion de population
 - une idée générale : population est une fonction mathématique ;
 - la croissance exponentielle comme une loi générale de croissances démographique ;
 - limites de croissance et une idée de la croissance logistique
- Modèles de structures
 - la table de mortalité comme un modèle d'une population stationnaire (idéal des utopistes)
 - population stable comme un modèle général d'évolution de la structure par âge

Lecture :

- Jean Bourgeois-Pichat – *La dynamique des populations: populations stables, semi-stables et quasi-stables*. Cahier de l'INED "Travaux et documents" n°133, Paris, PUF, 1994, 311 p.
- Samuel H. Preston, Patrick Heuveline and Michel Guillot – *Demography. Measuring and Modeling Population Processes*. Blackwell Publishing, 2000, p138-190
- Henry Leridon et Laurent Toulemon, *Démographie. – Approche statistique et dynamique des populations*. Economica, Paris, 1997, p.32-74
- Léon Tabah "Relationships between age structure, fertility, mortality and migration. Population replacement and renewal". United Nations World Population Conference. Beograd, 1965. Background paper B.7/15/E/476
- Brian Charlesworth - *Evolution in age-structured population*. Cambridge. 1980, Cambridge University Press, 300 p.
- Alfred Lotka - *Théorie analytique des associations biologiques*. I. Principes (1934) ; II. Analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine (1939), Hermann, Paris
- On-line manual: **Population Analysis for Policies & Programmes**. IUSSP <https://papp.iussp.org/index.html>

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

1

1

I. Modèles de croissance

Aperçu historique (rappel) :
**population comme un nombre ou
une fonction**

2

2

L'apparition du mot et de la notion « population »



1612 – invention du mot « population » par
Sir Francis Bacon (22.01.1561–09.04.1626).
Dans « *Essays, Civil and Moral* » 2e édition (avec 38
essais), 1612, Essai XV : « Of seduction and troubles »
[« Sur séduction (tentation) et troubles »] :

"Generally, it is to be foreseen that **the population** of a kingdom (especially if it be not mown down by wars) do not exceed the stock of the kingdom which should maintain them. Neither is the population to be reckoned only by number; for a smaller number that spend more and earn less do wear out an estate sooner than a greater number that live lower and gather more. Therefore the multiplying of nobility and other degrees of quality in an over proportion to the common people doth speedily bring a state to necessity; and so doth likewise an overgrown clergy; for they bring nothing to the stock; and in like manner, when more are bred scholars than preferments can take off." →

« Généralement on doit veiller que **la population** d'un Royaume, (spécialement si elle n'est pas fauchée par les guerres) n'excède pas les ressources du royaume nécessaires à leur entretien ».

Cependant, dans les premières éditions françaises ce mot a été traduit en *peuple* ou *monde*.

Les contemporains de F.Bacon: *Galileo Galilei* (1564-1642), Italie, *René Descartes* (1596-1650), France

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

3

3

La stabilité est une règle, la croissance est une anomalie

Dans l'Antiquité: un nombre est une quantité fixe

Platon (428-348 av.J.-C.) dans *La République* et *Les Lois* imagine une population stationnaire (5040 famille, ~20 000 citoyens libres) et une politique qui maintient cette stationnarité



Gravure de Ambrosius Holbein pour une édition de 1518.
Dans le coin en bas à gauche le voyageur Raphael
Hythlodæus décrivant l'île.

Les même idées sont retenues et développées par :

- Aristote (384-322 av.J.-C.), *La Politique*
- Sir Thomas More (1478-1535)
Utopia, 1518, Londres (en latin), traduction française en 1550 à Paris: *l'Utopie ou le traité de la meilleure forme de gouvernement*
- Tommaso Campanella (1568-1639)
Civitas solis, 1623, Francfort, (appendice à la *Philosophia realis*). Traduction française en 1841

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

4

4

Croissance comme une propriété intrinsèque de la population

Problème de Fibonacci (XIII s.) : multiplication des lapins
 Leonardo Pisano, Fibonacci (en italien : Figlio Buono Nato Ci) ~1170 – ~1250 : *Liber abaci*, (Livre des calculs) rédigé en 1202, on ne dispose qu'une édition de 1228...

La croissance de lapins (des arbres) :
 « Possédant initialement un couple de lapins, combien de couples obtient-on dans douze mois, si chaque couple engendre un nouveau couple chaque mois à partir du second mois de son existence ? »
Réponse : 144 couples 1, 1, (1+1=2), (1+2=3), (2+3=5), = 1,1,2,3,5,8,13,21, etc... ($n_i = n_{i-1} + n_{i-2}$, $i > 2$)

La croissance de lapins durant 25 mois (75 025 couples)

La suite de Fibonacci est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui précèdent. Elle commence généralement par les termes 0 et 1 (parfois 1 et 1) et ses premiers termes sont : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc.

La formule de Binet : $F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{2\varphi - 1}$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803399$ (« nombre d'or »)

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

5

Les lois de la population ou « l'ordre divin »

John Graunt (24.04.1620 – 18.04.1674) "Natural and political observations. Mentioned in a following Index and made upon the Bills of Mortality", 1662. → origine de la science de démographie : espérance de vie à Londres était 27 years, avec 65% de décès avant l'âge de 16 ans (il ne connaît pas le mot "population")

Johann Peter Süßmilch (03.09.1707-22.03.1767) «Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Geburt, Tod und Fortpflanzung des selben erwiesen... », 1741 Berlin, (L'Ordre divin dans les changements du genre humain, prouvé par la naissance, la mort et la propagation de l'espèce...),

L.Fibonacci 1202

J.Graunt 1662

J.P.Süßmilch 1741

B.Franklin 1751

T.Maltus 1798

Statistik (G. Achenwall, 1748)

Population (1612)

Démographie (1855)

Problème de la multiplication des lapins (progression)

Table de mortalité, population stationnaire

Croissance géométrique (exponentielle)

Lecture recommandée pour en savoir plus : Jacques et Michel Dupâquier (1985) *Histoire de la démographie (Statistique de la population dès origines à nos jours)*, Paris, Edition Perrin, 462 p.


Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

6

Notice historique :

Thomas Robert Malthus

(né le 13-14 février 1766 décédé le 29 décembre 1834)




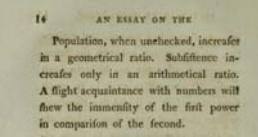
Première édition anonyme de 1798

Parcours académique :

en 1784 T.R. (Bob) Malthus est admis au *Jesus College de l'Université de Cambridge* en 1784 et y diplômé 1788, il obtient le grade de **master en 1791** et élu le membre du Collège en 1793. En 1819 il est élu à la *Royal Society*, en 1821 devient le membre du *Political Economy Club*, en 1833 il est élu à l'*Académie Française des Sciences Morales et Politiques*

La première version de "*An Essay on the Principle of Population as It Affects the Future Improvement of Society, with Remarks on the Speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and Other Writers*" a été publié anonymement en 1798 par l'édition de J. Janson, mais après son immense succès Malthus a décidé de la republier sous son nom en 1803.






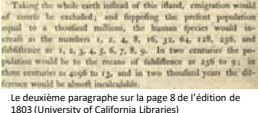
Le premier paragraphe de la page 14 de l'édition de 1798 (Boston Public Library).

L'opposition de la loi de croissance de la population (humaine et non-humaine) à celle des moyens de subsistance sur la page 14 du premier chapitre dans la première édition anonyme de 1798.

"Population, when unchecked, increases in a geometrical ratio. Subsistence increases only in an arithmetical ratio. A slight acquaintance with numbers will shew the immensity of the first power in comparison of the second."



édition de 1803



Le deuxième paragraphe sur la page 8 de l'édition de 1803 (University of California Libraries)


Dans l'édition de 1803 déjà signée T.R.Malthus, les propos théoriques ont été développés et un exemple numérique a été ajouté à la fin du premier chapitre :

"Taking the population of the world at any number, a thousand millions, for instance, the human species would increase in the ratio of - 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, etc. and subsistence as - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. In two centuries the population would be by the means of subsistence in 256 to 91, in three centuries in 4096 to 13, and in two thousand years the difference would be almost incalculable."

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP) 7

7

Rapport des sexes: une découverte de première importance



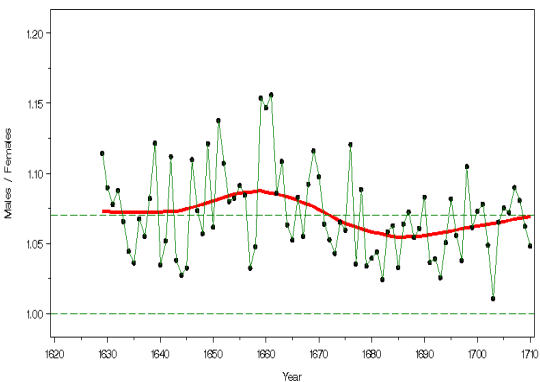
1711 - John Arbuthnot (1667-1735), Ecosse.

Il a réalisé le premier test statistique de signification (la différence entre les observations et une hypothèse « nulle ») pour démontrer « the **guiding hand of a divine** » qui maintenait un rapport des sexes à la naissance presque constant à Londres en 1629-1710

Cette priorité est cependant contestée au profit de J.P.Süssmich, auteur de « L'ordre divine... » paru 40 ans après:

«Le pasteur Süssmich a été le premier à tenter de traiter systématiquement la question du taux de masculinité, et il a introduit à ce sujet le constat que «pour 1000 fillettes nées, il vient 1050 garçons», une formule promise au succès parmi les démographes malgré ses problèmes évidents»

Source: Wikipedia avec une référence à « Le sexisme de la première heure. Hasard et sociologie », Éric Brian et Marie Jaisson, *Raisons d'agir*, 2007, page 22



Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP) 8

8

John Graunt, John Arbuthnott, and the human sex ratio.

[Notice historique](#)

[Campbell RB.](#)

Source

Department of Mathematics, University of Northern Iowa, Cedar Falls 50614-0506, USA.

Abstract

John Graunt was the first person to compile data that showed an excess of male births over female births. He also noticed spatial and temporal variation in the sex ratio, but the variation in his data is not significant. John Arbuthnott was the first person to demonstrate that the excess of male births is statistically significant. He erroneously concluded that there is less variation in the sex ratio than would occur by chance and asserted without a basis that the sex ratio would be uniform over all time and space.

<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/11512687>

[Hist Sci Med.](#) 1996;30(4):459-66.

[Dr. John Arbuthnot, inventor of statistical testing].

[Article in French]

[Bouckaert A.](#)

Abstract

John Arbuthnot, Queen Anne's medic was very fond of probabilities and statistics expectations. Showing a great interest to new born's sex forecast, he devised a new way: the statistics. Then, he ruled out the case according to uncertain fluctuations connected with an average of 50% male births the excess of male births during 82 years in London. In that mind, he forged ahead to demonstrate Providence deed.

<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/11625046>

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtaříková (Université Charles)

9

9

[Notice historique](#)

John Graunt (né le 24 avril 1620, mort le 18 avril 1674) était un riche mercier londonien, surtout connu pour avoir été avec son ami William Petty l'un des **premiers démographes**. Il analysa les registres de mortalité de la ville et se livra à la première estimation de la population d'une ville sur des bases statistiques. Le premier ouvrage de statistique et de démographie publié en **1662: les Observations Naturelles et Politiques... sur les Bulletins de Mortalité...** « Les bulletins de mortalité de Londres comptent parmi les premiers relevés démographiques.

« Graunt, lui, établit, chiffres à l'appui, qu'il y a un léger excédent masculin à la naissance et au décès; que Londres peut contenir 380 000 habitants, mais pas des millions; que Paris est plus peuplé que Londres; que les décès dus aux épidémies de peste sont compensés en deux ans; que, malgré les mortalités exceptionnelles, la population de l'Angleterre ne cesse de croître, et celle de Londres encore plus vite; que la mortalité est plus forte à Londres qu'en province et que la population londonienne n'augmente que grâce à une importante immigration; que la folie et la syphilis tuent beaucoup moins qu'on le dit, etc. »

Vilquin Éric. « Une édition critique en français de l'œuvre de John Graunt (1620-1674). Présentation d'un ouvrage hors collection de l'INED ». In: *Population*, 33e année, n°2, 1978 pp. 413-423.

William Petty (économiste, scientifique, médecin, philosophe, homme d'affaires, membre du parlement et de la Société Royale britannique), né 1623 et mort 1687, est surtout connu pour son ouvrage sur l'**arithmétique politique**, qui pose les bases de l'économie politique et de la **démographie** en quelque sorte de l'économétrie, en proposant l'utilisation des statistiques en matière de gestion publique. Ami de John Graunt, il lui avait suggéré l'idée de faire des recherches très ingénieuses sur les bulletins de mortalité sur Londres.

Thomas Robert Malthus, né 1766 et mort 1834, est un économiste britannique de l'École classique, et également un pasteur anglican. **La population s'accroît de manière géométrique alors que les biens ne s'accroissent que de manière arithmétique.**

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtaříková (Université Charles)

10

10

Modèles de croissance

Population moyenne

11

11

Principes de modélisation de la croissance (de la variation)

Problème 1 : comment estimer l'effectif de la population entre les dates d'observation (i.e. entre deux recensements) ?

Problème 2 : comment prévoir la croissance de l'effectif à partir des observations historiques (série des données disponibles) ?

Observations:
 l'accroissement de la population ΔP sur l'intervalle de temps Δt

$$\frac{P(3) - P(1)}{t(3) - t(1)} = \frac{\Delta P(t)}{\Delta t} \rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = P'(t) = \tan \beta$$

$$r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P(t)}{P(t) \cdot \Delta t} = \frac{P'(t)}{P(t)} = [\ln P(t)]' \rightarrow P(t) = e^{r \cdot T}$$

Soit $P(t)$ – la fonction de l'effectif de la population
 le taux d'accroissement s'exprime alors comme suit $r = \frac{dP}{dt}$

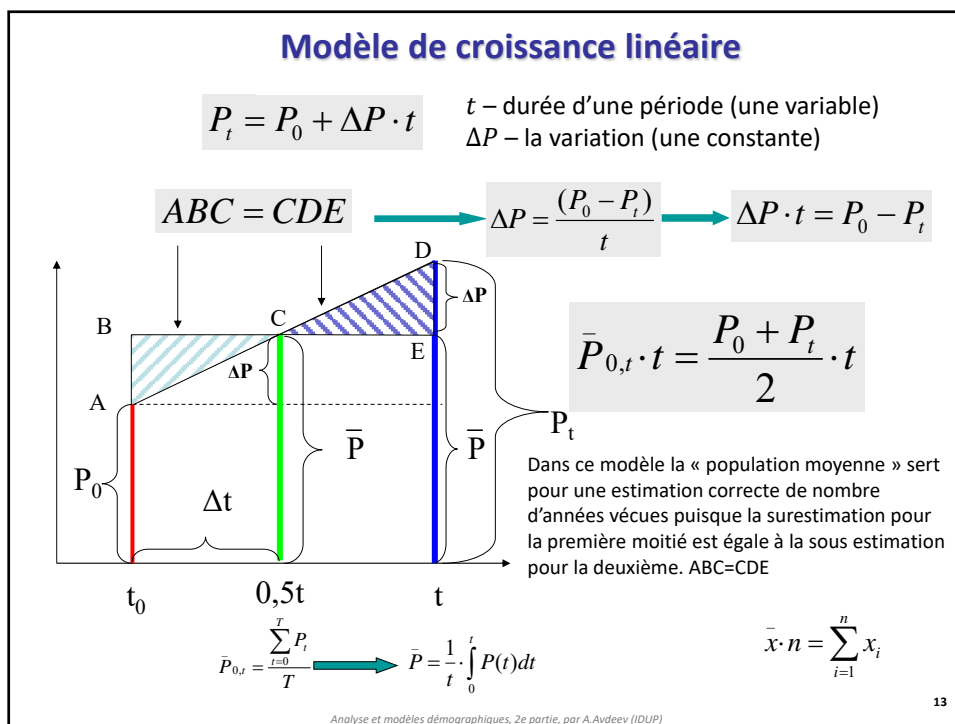
Soit $P(t, x)$ – la fonction de l'effectif de la population de t – période (temps universel) et de x – âge étant temps individuel que l'on peut écrire sous forme générique $P = f(t, x)$

Donc la population varie dans la dimension t avec x constante comme suit : $r_t = \frac{dP(t, x)}{dt} \cdot \frac{1}{P(t, x)}$
 dans la dimension x avec t constante comme suit : $r_x = \frac{dP(t, x)}{dx} \cdot \frac{1}{P(t, x)}$
 La variation de la population devient donc : $dP(t, x) = \frac{dP(t, x)}{dt} dt + \frac{dP(t, x)}{dx} dx$, etc. pour le développement voir EDM, p.111-115

La croissance : approche en discret et en continu...

12

12



13

Exemple 1: Croissance de la population en progression arithmétique

Période	Population au début de période	Population moyenne	Taux d'accroissement (variable décroissante)	Accroissement (constant)
t	P_t	$P_{t,t+1}$	$r = (P_{t+1} - P_t)/P_{t,t+1}$	$\Delta P = (P_{t,t+1}) \times r$
0	100	120	0,3333	40
1	140	160	0,2500	40
2	180	200	0,2000	40
3	220	240	0,1667	40
4	260			
Total	900	720	0,9500	160
Moyenne sur 5(4)	180	180	0,2375	
Moyenne chronologique	180			
Moyenne sur extrémités	180		0,2500	
Moyenne géométrique			0,2295	

$$\bar{P}_5 = \frac{900}{5} = 180 \quad \bar{P}_4 = \frac{720}{4} = 180 \quad \bar{P}_{ch} = \frac{0,5 \cdot (100 + 260) + 540}{4} = 180$$

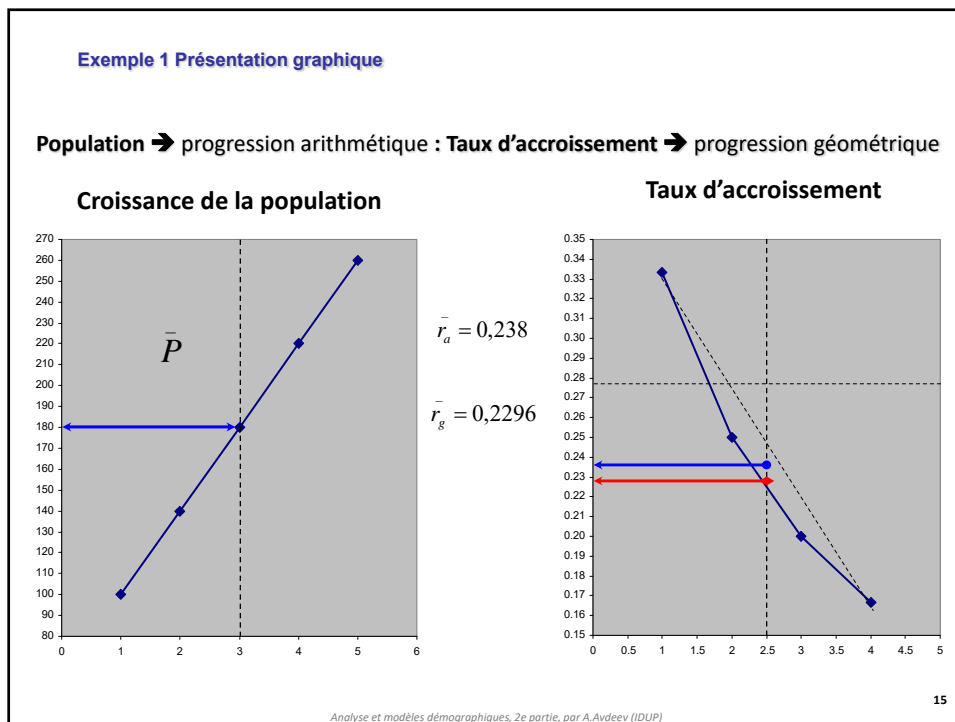
$$\Delta P_{0,T} = 260 - 100 = 160 \quad \Delta P_{0,T} = \sum_{t=0}^{T-1} \bar{P}_t \cdot r_t = 160$$

$(0,3333+0,1667)/2=0,25$
 $(0,3333*0,25*0,2*0,1667)^{0,25}=0,2295$

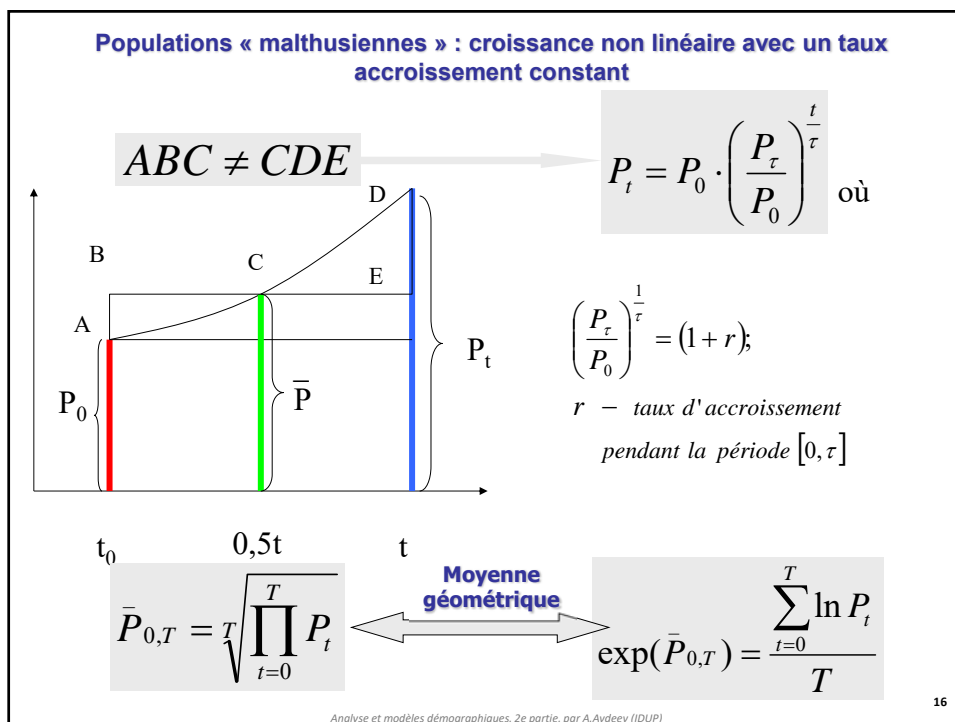
$(140-100)/120=0,3333$
 $(180-140)/160=0,2500$
 $120*0,3333=40$
 $0,95/4=0,2375$

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

14



15



16

Exemple 2: Croissance d'une population « malthusienne » : une progression géométrique

Période	Population au début de période	Population moyenne	Taux d'accroissement	Accroissement
t	P_t	P_{t+1}	$r = (P_{t+1} - P_t)/P_t$	$\Delta P = (P_{t+1} - P_t) \times r$
0	100	115	0,2609	30
1	130	149,5	0,2609	39
2	169	194,4	0,2609	50,7
3	219,7	252,7	0,2609	65,91
4	285,6			
Total	904,31	711,5	1,0435	185,61
Moyenne sur 5(4)	180,9	177,88	0.2609	
Moyenne chronologique	177,9			
Moyenne sur extrémités	192,8	183,83		
Moyenne géométrique	169,0		0.2609	

Le taux est constant 0,2609 puisqu'il ne vient pas de l'effectif, mais des qualités des individus dont une population est composée

$$\bar{P}_5 = \frac{904,31}{5} = 180,9 \quad \bar{P}_4 = \frac{711,5}{4} = 177,88 \quad \bar{P}_{ch} = \frac{0,5 \cdot (100 + 285,6) + 518,7}{4} = 177,88$$

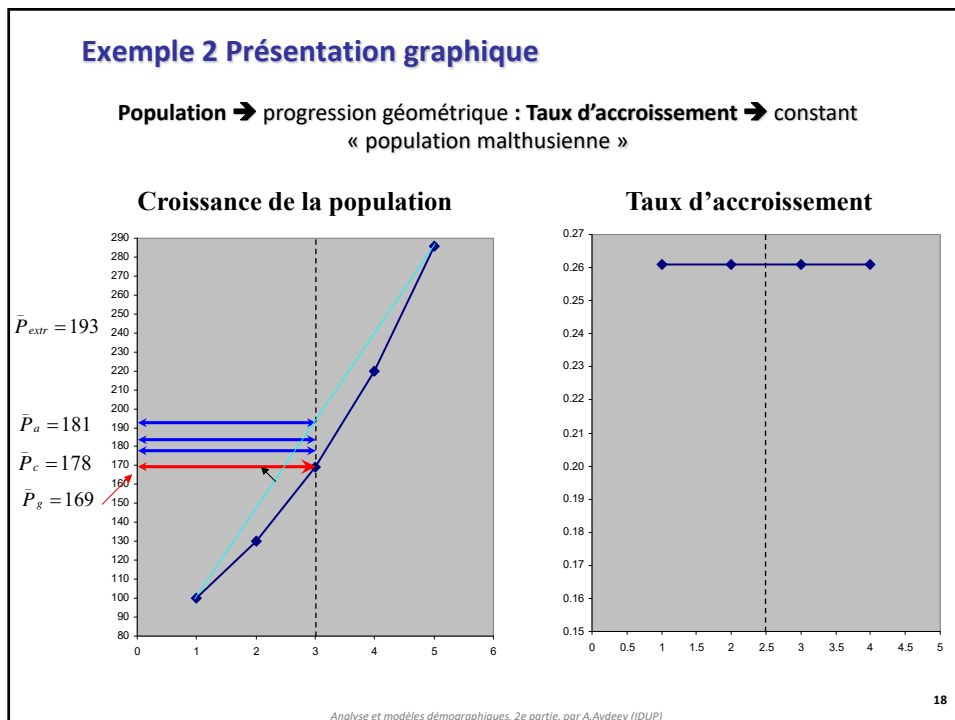
$$\Delta P_{0,T} = 285,6 - 100 = 185,61 \quad \Delta P_{0,T} = \sum_{t=0}^{T-1} \bar{P}_t \cdot r_t = 185,61$$

$k: 130/100=1,3; 169/130=1,3; 219,7/169=1,3$
 $(169+130)/2=149,5; (219,7+169)/2=194,4$
 $(130-100)/115=0,2609; (169-130)/149,5=0,2609$
 $115 \cdot 0,2609=30; 149,5 \cdot 0,2609=39$

$$\bar{P}_g = \sqrt[T]{\prod_t P_t} = 169 \quad \bar{P}_g = \exp\left(\frac{\sum_{t=0}^T \ln(P_t)}{T}\right) = 169$$

17

17



18

Mesurer la croissance d'une population : approche générale

1. Modèle avec le temps discret : Soit $P(t)$ – effectif d'une population au moment t , alors

$$P(t) = k \cdot P(t-1) \quad \text{où } k = \text{taux de croissance,}$$

si $k > 1 \rightarrow$ la population croît,
 si $k = 1 \rightarrow$ la population ne change pas, et
 si $k < 1$ la population diminue

Soit $P(0)$ – effectif initial d'une population au moment $t=0$, alors dans t quantités de temps on aura:

$$P(t) = k \cdot k \cdot k \cdot \dots \cdot k \cdot P(0) = P(t) = k^t \cdot P(0) \tag{1}$$

2. Modèle avec le temps continu : $\frac{dP}{dt} \cdot \frac{1}{P} = r$ si $r > 0 \rightarrow$ la population s'accroît,
 si $r = 0 \rightarrow$ la population ne change pas, et
 si $r < 0$ la population diminue

En intégrant par t on obtient : $P(t) = e^{rt} \cdot P(0) \tag{2}$

sachant que $r = n - d$ n – les naissances normalisées (standardisées) pour une unité de la population (natalité)
 d – les décès normalisés (standardisés) pour une unité de la population (mortalité)

La croissance d'une population dépend du rapport entre la natalité et la mortalité

On voit que l'équation (1) et l'équation (2) sont identiques, alors $k=e^r$, ou $k=\exp(r)$ (3)

Cependant, cela (3) ne signifie pas que les deux modèles de croissances sont équivalents :
 population exponentielle croît plus vite, si $r > 0$;
 et elle décroît moins vite, si $r < 0$,
 que la population « géométrique » (modèle multiplicatif ou puissance)

temps écoulé	$r = 0.005$ exponentielle	$k = 1.005$ puissance	$r = -0.005$ exponentielle	$k = -1.005$ puissance
0	100 000	100 000	100 000	100 000
10	105 127	105 114	96 079	96 069
50	128 403	128 323	77 880	77 831
100	164 872	164 667	60 653	60 577
150	211 700	211 305	47 237	47 148

Exercice : vérifiez cette propriété

19

19

Illustration: modèle de croissance avec le taux de accroissement constant

Echelle linéaire

Echelle logarithmique

Période de doublement de l'effectif \rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } P(t) = 2P(0) \Rightarrow 2 = e^{rt} \\ t = \frac{\ln 2}{r} \end{array} \right. \rightarrow t = \frac{0.693}{r}$

$t = \ln 2 / \ln(k) \quad k = 1,02 \Rightarrow 35,00 \quad \rightarrow \quad r = 0,02 \Rightarrow 34,66$

20

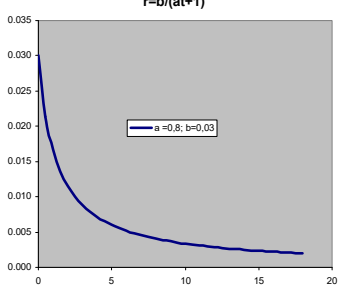
20

Modèle de croissance avec le taux d'accroissement variable

Model de la population exponentielle avec le taux d'accroissement constant présente les populations qui n'ont pas de limites de la croissance. Cela n'est pas réaliste.

L'hypothèse: le taux de accroissement change dans le temps.

$$P_\tau = P_0 \cdot e^{r_0 \cdot \Delta t} \cdot e^{r_1 \cdot \Delta t} \cdot e^{r_2 \cdot \Delta t} \dots = P_0 \cdot e^{r_0 \cdot \Delta t + r_1 \cdot \Delta t + \dots}$$



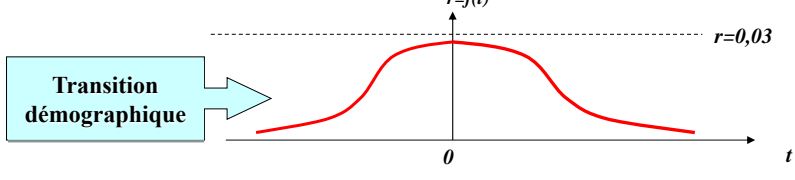
$r = \frac{b}{(a+t+1)}$
a=0,8; b=0,03

puisque $\Delta t \rightarrow 0$

$r \rightarrow$ peut être déterminé avec une fonction analytique $r = f(t)$

$$P_\tau = P(0) \cdot e^{\int_0^\tau r(t) dt}$$

Table de mortalité

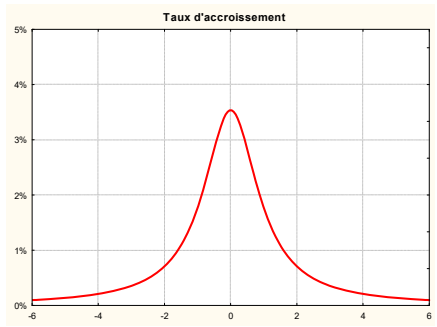


$r = f(t)$
 $r = 0,03$
 t

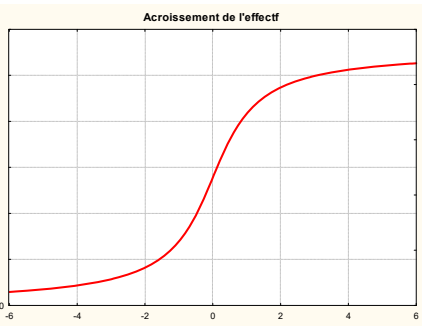
Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

21

Les limites d'accroissement : un modèle de la transition démographique



Taux d'accroissement




Accroissement de l'effectif


Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

22

A la recherche des limites pour la croissance : un modèle logistique...



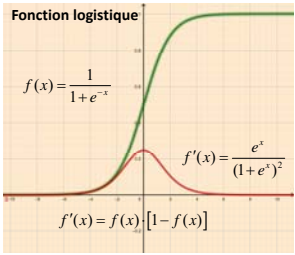
Adolphe Quetelet (1796-1874) *Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale.* Paris, 1835, t. I et II **la résistance ou la somme des obstacles pour la croissance est égale au carré de vitesse de la croissance de population...**



Pierre-François Verhulst (1804-1849): « Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. » Dans: *Correspondance mathématique et physique publiée par A.Quetelet.* Vol.XVIII, Bruxelles, 1847

La croissance de la population est freiné par une force proportionnelle au carré de l'effectif $\rightarrow dP(t) = [r \cdot P(t) - k \cdot P^2(t)] dt$

La solution de cette équation donne une fonction logistique : $P(t) = \frac{K}{1 + e^{\alpha - r \cdot t}}$



Fonction logistique

$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

$f'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$

$f'(x) = f(x) \cdot [1 - f(x)]$

à deux paramètres (à part du taux accroissement r)

K est la limite de croissance : $K = \frac{r}{k} \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$

α - paramètre déterminé par l'écart initial entre la $P(0)$ et K
 si $\alpha = 0 \rightarrow P(0) \approx 0,5K$

23

23

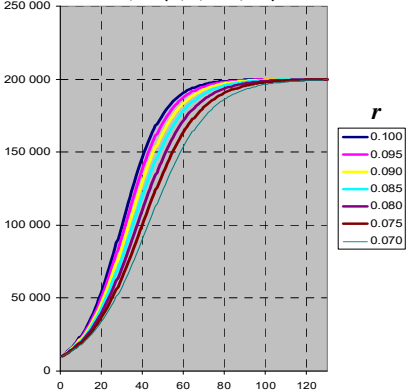
Modèle logistique

1. Les effectifs initiaux et finaux sont égaux, et les taux d'accroissement sont variables

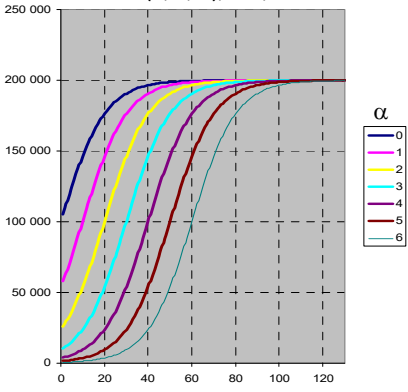
2. Les effectifs initiaux sont différent, mais les effectifs finaux sont égaux et le taux d'accroissement est constant

$P(t) = \frac{K}{1 + e^{\alpha - r \cdot t}} \quad K=200\ 000$

$\alpha=3; r=(0,1; \dots 0,07)$

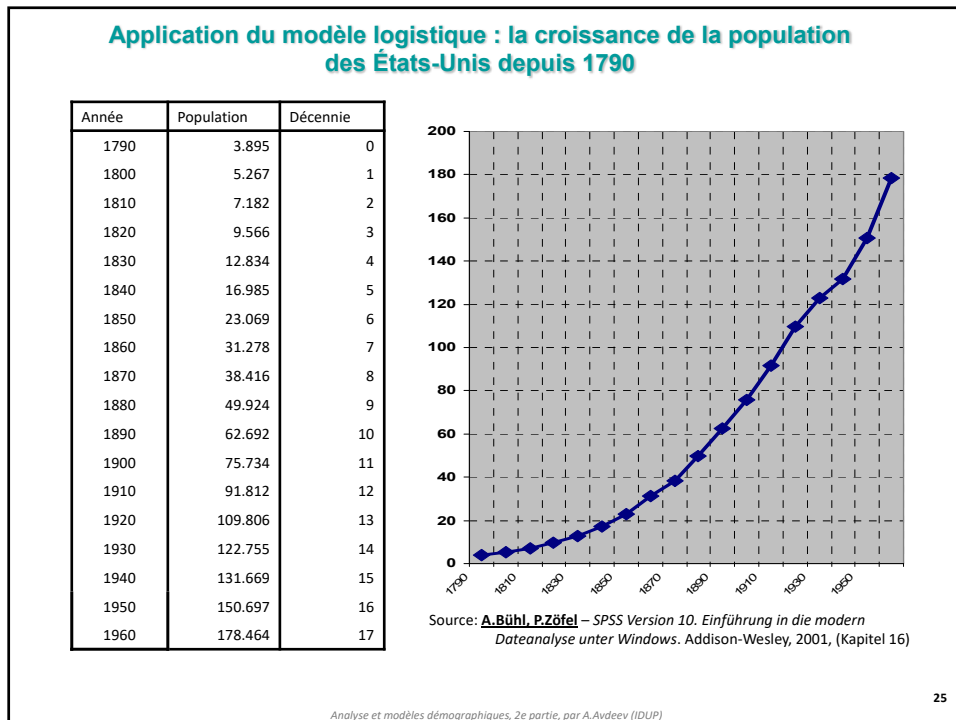


$\alpha=(0; \dots; 6); r=0,1$

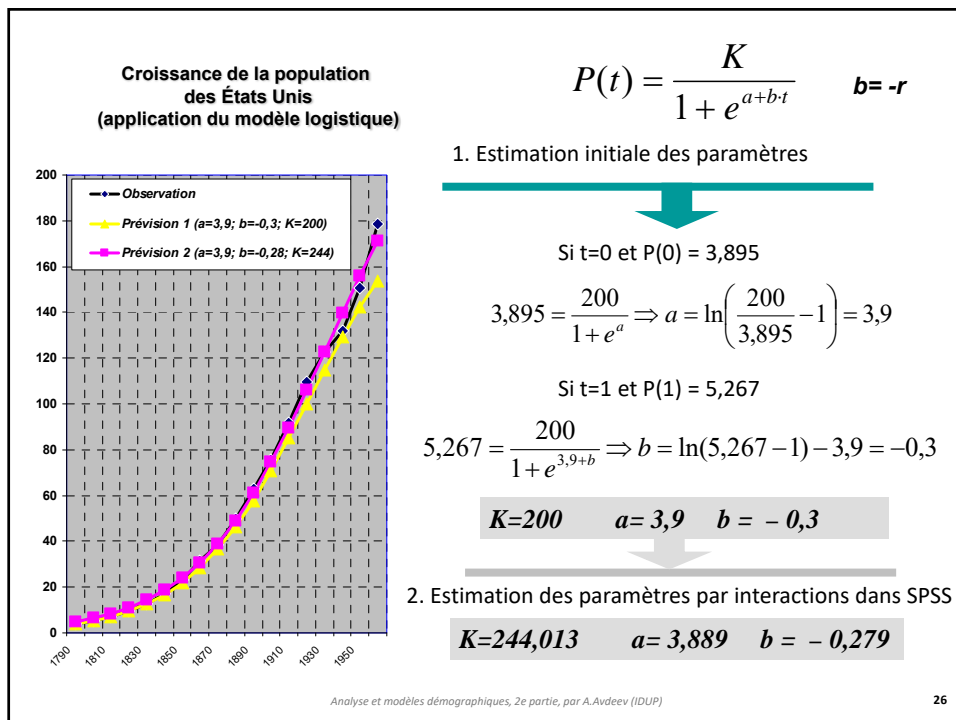


24

24



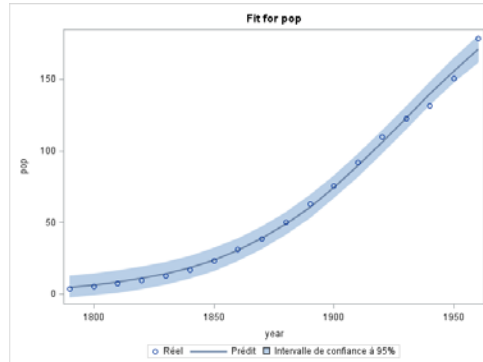
25



26

La croissance de la population des États-Unis depuis 1790 (données 1790-1960)

Estimation Parameter de OLS non-linéaires					
Parameter	Valeur estimée	Err. type approchée.	Valeur du test t	Approx. de Pr > t	Libellé
k	244.0081	17.9740	13.58	<.0001	Maximum Population
a	3.888781	0.0937	41.51	<.0001	Location Parameter
c	0.027884	0.00156	17.88	<.0001	



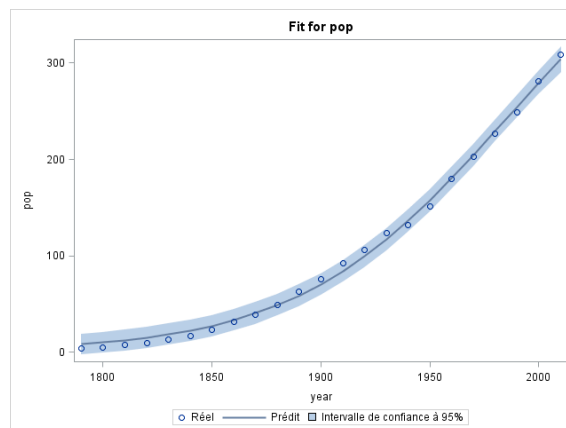
Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtariková (Université Charles)

27

27

La croissance de la population des États-Unis depuis 1790 (données 1790-2010)

Estimation Parameter de OLS non-linéaires					
Parameter	Valeur estimée	Err. type approchée.	Valeur du test t	Approx. de Pr > t	Libellé
k	483.1532	34.8552	13.86	<.0001	Maximum Population
a	4.06382	0.0640	63.48	<.0001	Location Parameter
c	0.020861	0.000894	23.33	<.0001	



Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtariková (Université Charles)

SAS 9.4

28

28

Projections de population active 2003 – 2050 en France applications du modèle logistique

Emmanuelle Nauze-Fichet, Frédéric Lerais, Stéphane Lhermitte *Projections de population active 2003 – 2050*. (Insee. Résultats. Société N°13 p.5

« Le choix d'une forme logistique est particulièrement adapté à la description des phénomènes se diffusant progressivement dans le temps, avec une étape d'émergence, de développement et de saturation progressive. Ce choix paraît pertinent pour la description des évolutions de comportements d'activité. »

$$trend(t, f, \sigma, t_i)(t) = \frac{p + f \cdot \exp[\sigma \cdot (t - t_i)]}{1 + \exp[\sigma \cdot (t - t_i)]} \quad \text{avec}$$

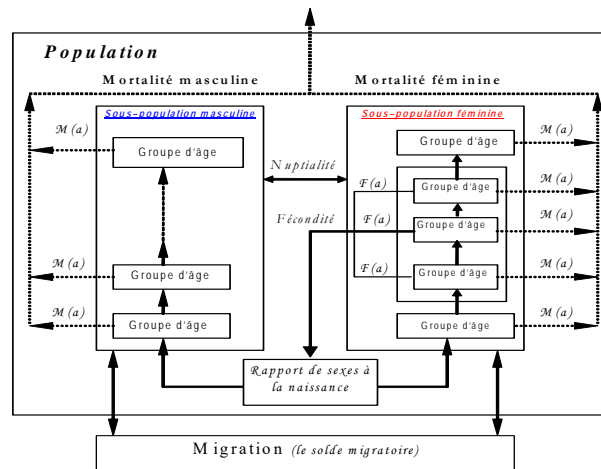
t – temps (0 en 1967);
 p – le taux limite passé;
 f – le taux limite futur ;
 σ – la vitesse de diffusion,
 t_i – la date d'inflexion

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

29

29

II. Modèles de l'évolution de structure par âge population comme un système avec une structure complexe



Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

30

30

Populations stationnaires.

Populations stables.

Potentiel d'accroissement des populations.

Populations semi-stables.

Populations quasi-stables.

31

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

31

Population stationnaire : une table de mortalité est un modèle d'une population avec la croissance zéro ($r = 0$)

L'effectif total d'une population stationnaire $\rightarrow \sum_x L_x = T_0 = S_0 \cdot e_0$

Nombre de naissances (S_0) = nombre de décès ($\sum d_x$) $b = m = \frac{S_0}{T_0} = \frac{1}{e_0}$

Taux d'accroissement est nul $r = b - m = 0$

b taux de natalité d'une population stationnaire
 m taux de mortalité d'une population stationnaire

La structure par âge est constante et ne dépend que de la survie :

$${}_n C_x = \frac{{}_n L_x}{T_0} = \left(\frac{1}{S_0} \cdot \frac{{}_n L_x}{e_0} \right) \equiv p_x$$

L'âge moyen d'une population stationnaire :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{x=0}^{\infty} x \cdot {}_n C_x}{\sum_{x=0}^{\infty} {}_n C_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{{}_n L_x}{T_0}}{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{{}_n L_x}{T_0}} = \frac{\sum_{x=0}^{\infty} x \cdot {}_n L_x}{\sum_{x=0}^{\infty} {}_n L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\infty} x \cdot {}_n L_x}{T_0}$$

L'âge moyen d'une population stationnaire n'est pas égal à l'espérance de vie à la naissance.

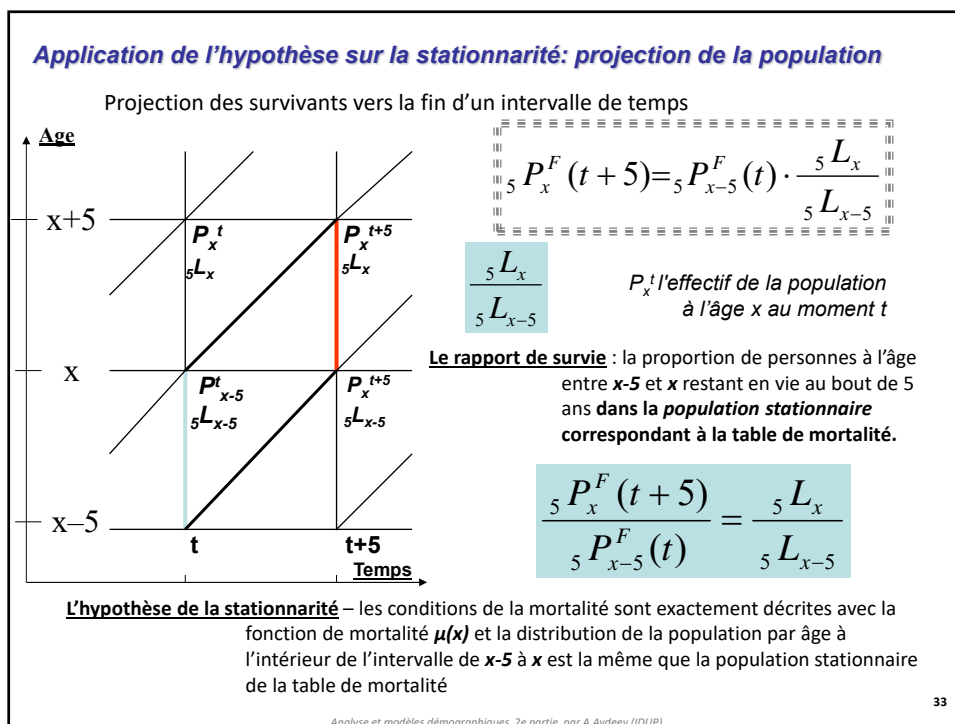
32

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

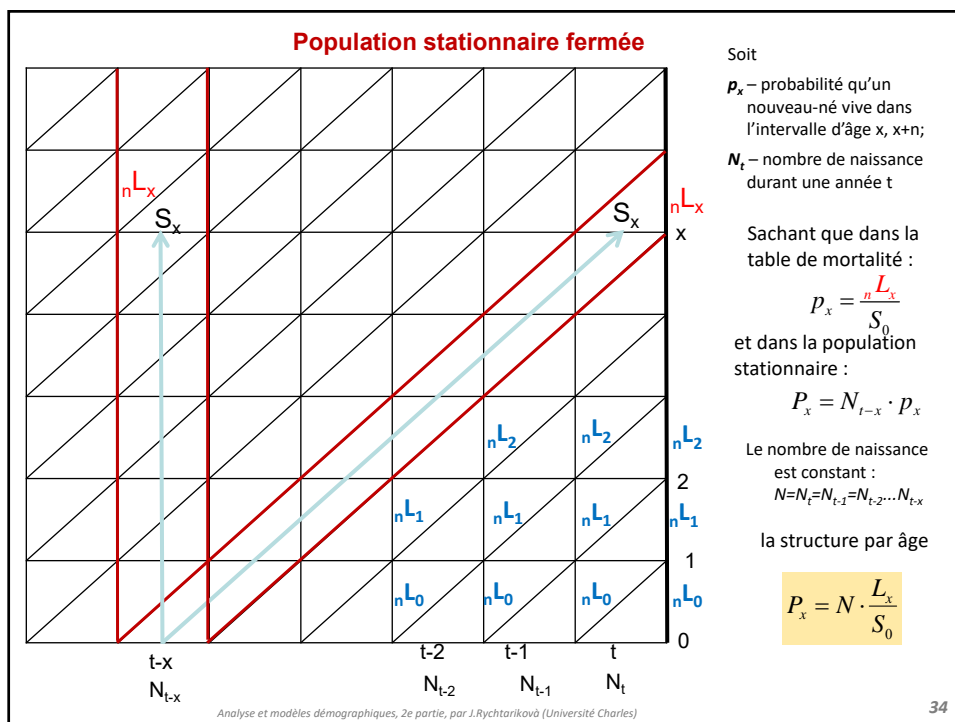
Effectif des populations stationnaires (hommes et femmes) de la table de mortalité (France, 2000-2002)

The figure is a population pyramid for France from 2000-2002. The vertical axis represents age in years, ranging from 0 to 98 in increments of 7. The horizontal axis represents the number of individuals, ranging from -100,000 to 100,000, with 0 in the center. The left side of the pyramid represents males (Homes) and the right side represents females (Femmes). The pyramid is roughly bell-shaped and symmetrical, indicating a stationary population where the number of males and females is nearly equal at every age group.

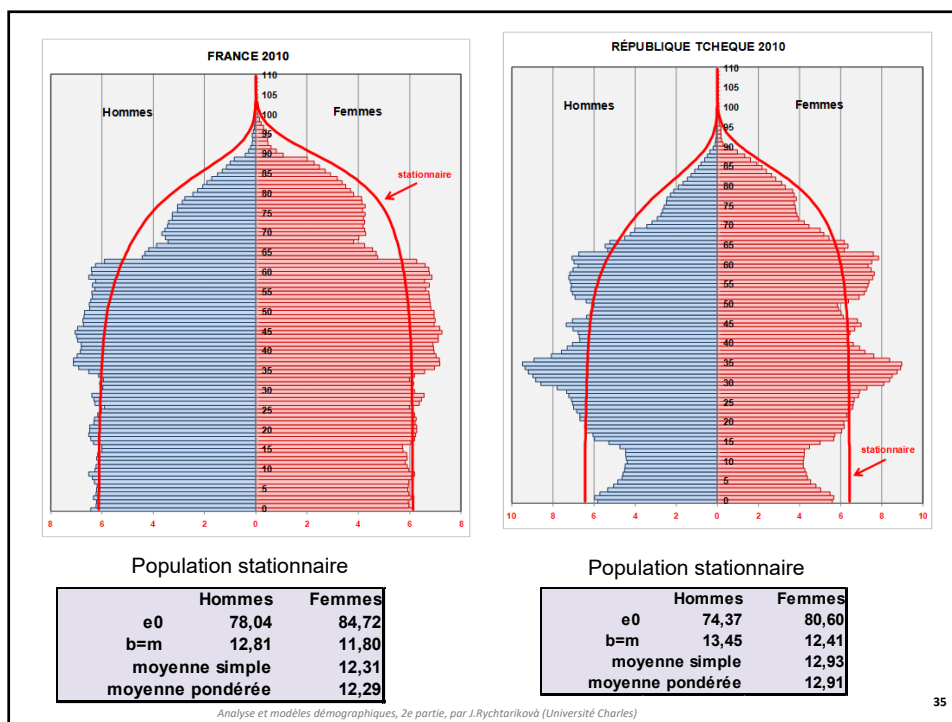
32



33



34



35

Le concept de population stable

Les populations stables sont celles qui s'accroissent à un taux constant; sont appelées aussi les populations malthusiennes (A. Lotka) ou plutôt exponentielles (aujourd'hui).

A. Lotka définit une population malthusienne comme une population dans laquelle la mortalité et la composition par âge restent invariables.

Demopaedia:

On démontre que si une *population fermée* se trouvait indéfiniment soumise à des **lois invariables de mortalité et de fécondité selon l'âge**, cette population tendrait à se développer avec un **taux d'accroissement constant**, et à acquérir une **structure par âge invariable**. Le **taux instantané limite d'accroissement** correspondant, appelé **taux intrinsèque d'accroissement naturel**, caractérise cette *population exponentielle* asymptotique, dénommée **population stable**. La composition par âge de la population stable, ou **composition par âge stable**, est indépendante de la **composition par âge initiale** de la population fermée considérée.

Le **taux intrinsèque d'accroissement naturel** correspondant à la mortalité et à la fécondité par âge observées dans une population est utilisé pour caractériser les virtualités de croissance impliquées par ces conditions de mortalité et de fécondité.

On appelle **population stationnaire** une *population stable* particulière dont le **taux d'accroissement est nul**.

http://fr-i.demopaedia.org/wiki/Population_stable

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtařiková (Université Charles)

36

36

Présentation simplifiée d'une population stable (selon A. Lotka)

Soit

- 1) $N(t)$ nombre de naissances vivantes croissant selon la loi exponentielle dans une population P avec un taux d'accroissement r :

$$N(t) = N(0) \cdot e^{rt}$$

- 2) $l(x)$, ou $S(x)$, une fonction de survie dans la même population P présentée par une table de mortalité hypothétique :

Age exact (x)	Fonction de survie $S(x)$	Fonction de survie réduite $p(x) = S(x)/S(0) \leq 1$ *
0	100 000	1,000
1	60 000	0,600
2	40 000	0,400
3	20 000	0,200
4	5 000	0,050
5	0	0,000

Exemple emprunté de Preston et al., p.139

- 3) Migration = 0

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

37

37

Population (non-humaine) au 1 janvier de 1800 à 1806¹⁾

Age (a)	1/1/1800	1/1/1801	1/1/1802	1/1/1803	1/1/1804	1/1/1805	1/1/1806
0	1000	1000 e ^r	1000 e ^{2r}	1000 e ^{3r}	1000 e ^{4r}	1000 e ^{5r}	1000 e ^{6r}
1		600	600 e ^r	600 e ^{2r}	600 e ^{3r}	600 e ^{4r}	600 e ^{5r}
2			400	400 e ^r	400 e ^{2r}	400 e ^{3r}	400 e ^{4r}
3				200	200 e ^r	200 e ^{2r}	200 e ^{3r}
4					50	50 e ^r	50 e ^{2r}
5						0	0

Au 1 janvier 1805 le rapport entre les naissances et les autres groupes d'âge devient proportionnel à e^{-r}

$$\frac{600 \cdot e^{4r}}{1000 \cdot e^{5r}} = 0,6 \cdot e^{-r} \rightarrow \frac{P(1)}{N} = e^{-r} \cdot p_1$$

$$\frac{400 \cdot e^{3r}}{1000 \cdot e^{5r}} = 0,4 \cdot e^{-2r} \rightarrow \frac{P(2)}{N} = e^{-2r} \cdot p_2$$

$$\frac{400 \cdot e^{3r}}{600 \cdot e^{4r}} = 0,667 \cdot e^{-r} \rightarrow \frac{P(2)}{P(1)} = e^{-r} \cdot p_1$$

Population stable

structure par âge révolu (a) est constante, définie par un couple p(a) et r la variation de l'effectif de chaque classe d'âge est définie par le facteur e^r

$$P(a,t) = N(t) \cdot e^{-ra} \cdot p(a)$$

en divisant par l'effectif total $\int P(a,t) da$ on obtient :

$$c(a) = b \cdot e^{-ra} \cdot p(a)$$

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

1) cf. Preston et al.(2001), p.139

38

38

Conditions d'une population stable :

1. le taux d'accroissement des naissances annuelles est constant
2. les taux de mortalité par âge (table de mortalité) sont constants
3. le solde migratoire = 0 dans tous les âges

Alfred Lotka (1939) a démontré que la **condition 1 ≡ taux de fécondité par âge sont constants**

(1)
$$N(t) = \int_0^t P(a,t) \cdot f(a) da$$
 a – l'âge (comme une fonction continue)
 $N(t)$ – le nombre de naissance des filles au moment t
 $P(a,t)$ – l'effectif (nombre) des femmes d'âge a au moment t
 $f(a)$ – taux de fécondité féminine (naissances des filles uniquement)

sachant que $P(a,t) = N(t-a) \cdot p(a); t > 0$

(2) on peut réécrire (1) $\rightarrow N(t) = \int_0^t N(t-a) \cdot p(a) \cdot f(a) da; t > 50$

(3) et puisque par définition $\rightarrow N(t) = N \cdot e^{\rho \cdot t}$

(4) on peut substituer $N(t)$ et $N(t-a)$ dans (2) $\rightarrow N \cdot e^{\rho \cdot t} = \int_0^t N \cdot e^{\rho(t-a)} \cdot p(a) \cdot f(a) da$

(5) et en divisant (4) par $N \cdot e^{\rho \cdot t}$ on obtient

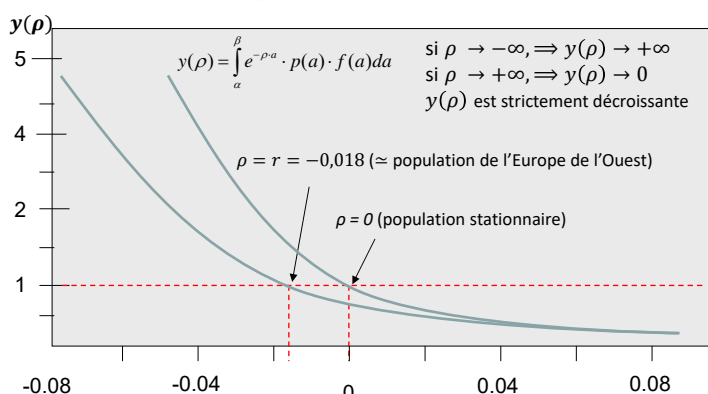
l'équation intégrale de reproduction de la population $1 = \int_0^t e^{-\rho \cdot a} \cdot p(a) \cdot f(a) da$ $t > 50$
 (équation de Lotka)

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

39

39

Solution graphique de l'équation de Lotka



Solution unique pour (5) \rightarrow une seule racine réelle $\rho = r \rightarrow$ **taux intrinsèque d'accroissement**

(5a) $1 = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\rho \cdot a} \cdot p(a) \cdot f(a) da$ α et β sont les limites naturelles de l'âge fécond
 $p(a)$ probabilité de survie de la naissance à l'âge a

(5b) $1 = \sum_x e^{-r \cdot (x+0,5 \cdot n)} \cdot {}_n L_x \cdot {}_n f_x$ \rightarrow l'équation (5a) en application aux âges discrets avec $S_0 = 1$

Conclusion : une seule et unique population stable correspondre à chaque couple de $p(a)$ et $f(a)$

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

40

40

Estimation du taux intrinsèque (Egypte, 1997); itérations

en trois itérations on obtient $r = 1,475\%$ *Source*: Preston et al. (2001), p.149

Age (x)	(table de mortalité féminine) ${}_5L_x$	(fécondité féminine) ${}_5f_x$	(naissances de filles) ${}_5L_x \cdot {}_5f_x$	$r_0 =$	$r_1 =$	$r_2 =$	$r_3 =$
				0.01569	0.01473	0.01475	0.01475
				${}_5L_x \cdot {}_5f_x \cdot \exp[-r_n(x+2.5)]$			
15	4.66740	0.00567	0.026464	0.02010998	0.02045166	0.02044383	0.02044413
20	4.63097	0.06627	0.306894	0.21561160	0.22033300	0.22022453	0.22022867
25	4.58518	0.11204	0.513724	0.33368930	0.34264172	0.34243557	0.34244342
30	4.53206	0.07889	0.357534	0.21471382	0.22153813	0.22138062	0.22138662
35	4.46912	0.05075	0.226808	0.12593024	0.13055968	0.13045258	0.13045666
40	4.39135	0.01590	0.069822	0.03584237	0.03733931	0.03730460	0.03730592
45	4.28969	0.00610	0.026167	0.01241901	0.01300011	0.01298660	0.01298712
$\Sigma =$			1.5274	0.97400633	1.0005909	0.99997749	1.00000085

1) $AMM \approx 27$

2) $r_0 = \frac{\ln TNR}{AMM} = \frac{\ln \left(\sum_{x=15}^{45} {}_5L_x \cdot {}_5f_x \right)}{AMM}$

$\frac{\ln(1,5274)}{27} = 0,01569$

3) $y(r_n) = \sum_{x=15}^{45} e^{-r(x+2,5)} \cdot {}_5L_x \cdot {}_5f_x$ $\exp(-0.01569 \cdot 17.5) \cdot 0.026464 = 0.02010998$

4) $r_{n+1} = r_n + \frac{y(r_n) - 1}{AMM}$

$r1 = 0.01569 + (0.97400633 - 1)/27 = 0.01473$
 $r2 = 0.1473 + (1.0005909 - 1)/27 = 0.1475$
 $r3 = \text{etc...}$

Utilisation d'un chiffre 27 ou 25 ou 30 ans (âge moyen) n'a aucune conséquence sur l'exactitude du résultat final, et très peu même sur le nombre d'itérations nécessaire pour arriver au degré d'exactitude exigée. Également sans importance est la valeur du départ de la série d'approximation.

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP) 41

41

Approches de l'estimation du taux intrinsèque de croissance à partir d'une table de mortalité et les taux de fécondité par âge

Equation fondamentale du modèle de la population féminine stable (unités d'âge) $1 = \sum_x e^{-r(x+0.5)} \cdot L_x \cdot f_x$

Soit r = taux intrinsèque d'accroissement naturel, et R_0 = taux net de reproduction

Lotka : μ_1 étant l'âge moyen des mères ou la distance entre les générations

$$\mu_1 = \frac{\sum x_c \cdot L_x^{femmes} \cdot f_x^{filles}}{\sum L_x^{femmes} \cdot f_x^{filles}}$$

$r = \mu_1 \sqrt{R_0}$

$r \approx \frac{\ln R_0}{\mu_1}$

Kuczynski : $\alpha = \frac{R_1}{R_0}$ - moyenne $\beta = \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - \frac{R_2}{R_0}$ - variance

$$R_0 = \frac{\sum L_x^{femmes} \cdot f_x^{filles}}{S_0}$$

$$R_2 = \frac{\sum x_c^2 \cdot L_x^{femmes} \cdot f_x^{filles}}{S_0}$$

$$R_1 = \frac{\sum x_c \cdot L_x^{femmes} \cdot f_x^{filles}}{S_0}$$

}

$$r = \frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + 2 \cdot \beta \cdot \ln R_0)}}{-\beta}$$

x_c centre d'intervalle d'âge

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtaříková (Université Charles) 42

42

Caractéristiques d'une population stable

Étant :

$$P(a,t) = N \cdot e^{r(t-a)} \cdot p(a) = (N \cdot e^{rt}) \cdot e^{-ra} \cdot p(a) \rightarrow P(a,t) = N(t) \cdot e^{-ra} \cdot p(a) \quad (6)$$

En intégrant (6) par a , on obtient : $\int_0^{\omega} P(a,t) da = N(t) \cdot \int_0^{\omega} e^{-ra} \cdot p(a) da \quad (6a)$

Soit $b = \frac{N(t)}{P(t)}$ – le taux (brut) de natalité, en substituant (6a) à $P(t)$, on obtient :

$$b = \frac{N(t)}{\int_0^{\omega} P(a,t) da} \Rightarrow b = \frac{1}{\int_0^{\omega} e^{-ra} \cdot p(a) da} \rightarrow \text{taux de natalité d'une population stable :} \quad (7)$$

définie par r et $p(a)$

Soit $c(a,t)$ la structure (proportionnelle) par âge d'une population stable :

on substitue (6) à $P(a,t)$

$$c(a,t) = \frac{P(a,t)}{P(t)} = \frac{N(t)}{P(t)} \cdot e^{-ra} \cdot p(a) \Rightarrow c(a) = b \cdot e^{-ra} \cdot p(a) \quad (8)$$

Propriété ergodique forte : la structure d'une population stable ne dépend que de sa mortalité et de la fécondité (taux par âge) =>
 une population avec $p(a)$ et $f(a)$ constantes « oublie » sa structure initiale

Propriété ergodique faible : les structures par âge des populations convergent, si leurs fonctions de survie $p(a)$ et de fécondité $f(a)$ évoluent dans la même direction

43

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

43

Illustration de la propriété ergodique des population stables

Hypothèses sur la mortalité et la fécondité.

Résultats de la projection sur 100 ans de deux populations avec les structures initiales différentes

44

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

44

Population stable équivalente: $e^{-r(x+0,5)} \times L_x$

Opérant des valeurs discrètes, on peut réécrire (7), (8) et (5) :

Taux de natalité dans la population stable :
$$b = \frac{1}{\sum_{x=0,1,\dots}^{\omega} e^{-r(x+0,5)} \cdot \frac{L_x}{S_0}} \quad (7a)$$

Structure proportionnelle :
$${}_1c_x = b \cdot e^{-r(x+0,5)} \cdot \frac{L_x}{S_0} \quad (8a)$$

Equation intégrale :
$$1 = \sum_{x=\alpha}^{\beta} e^{-r(x+0,5)} \cdot \frac{L_x}{S_0} \cdot {}_1f_x^F \quad (5a)$$

Exercice : réécrivez ces formules pour les groupes d'âge quinquennaux.

Soit TNR – taux net de reproduction ; on trouve le **taux intrinsèque d'accroissement naturel** par itérations à partir d'approximation suivante :

$$r_0 = \frac{\ln TNR}{AMM}$$

T=AMM âge moyen à la maternité dans la population stable

$$T = AMM = \frac{\sum_{x=0,1,\dots}^{\omega} (x+0,5) \cdot e^{-r(x+0,5)} \cdot \frac{L_x}{S_0} \cdot {}_1f_x}{\sum_{x=0,1,\dots}^{\omega} e^{-r(x+0,5)} \cdot \frac{L_x}{S_0} \cdot {}_1f_x}$$

45

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

45

Population stable équivalente (calculs) avec les groupes d'âges quinquennaux

Population féminine, les États-Unis, 1991 (source S.Preston et al., 2001, *Demography*. p.150)

âge	Population observée	Table de mortalité	Taux de fécondité	Calculs intermédiaires	Population stable équivalente
x	${}_5C_x$	${}_5L_x$	${}_5f_x$	$\exp(Z)^\dagger$	${}_5c_x^S$
0	0.0726	495 804		4.9615	0.0624
5	0.0689	495 002		4.9603	0.0624
10	0.0667	494 603		4.9632	0.0625
15	0.0648	493 806	0.0007	4.9621	0.0624
20	0.0729	492 552	0.0303	4.9564	0.0624
25	0.0799	491 138	0.0566	4.9490	0.0623
30	0.0861	489 356	0.0578	4.9379	0.0621
35	0.0801	486 941	0.0388	4.9204	0.0619
40	0.0735	483 577	0.0157	4.8932	0.0616
45	0.0556	478 475	0.0027	4.8483	0.0610
50	0.0464	470 374	0.0001	4.7728	0.0601
55	0.0422	457 712		4.6508	0.0585
60	0.0436	438 502		4.4618	0.0562
65	0.0429	410 756		4.1852	0.0527
70	0.0365	371 990		3.7955	0.0478
75	0.0294	319 192		3.2613	0.0410
80	0.0203	249 203		2.5498	0.0321
85	0.0176	237 044		2.4287	0.0306
	1			79.4581	1.0000

$b = 0.012585$
 $d = 0.01286$

1) Calculer r le taux intrinsèque d'accroissement (voir la diapositive 41) :

$$r = -0,00028$$

2) Calculer b le taux de natalité de la population stable :

$$b = \frac{1}{\sum_{x=0}^{80} e^{-r(x+2,5)} \cdot \frac{L_x}{S_0}} = \frac{1}{79,4581}$$

3) Calculer ${}_5c_x^S$ la structure par âge de la population stable équivalente :

$${}_5c_x^S = b \cdot e^{-r(x+2,5)} \cdot \frac{L_x}{S_0}$$

4) Calculer d le taux de mortalité de la population stable :

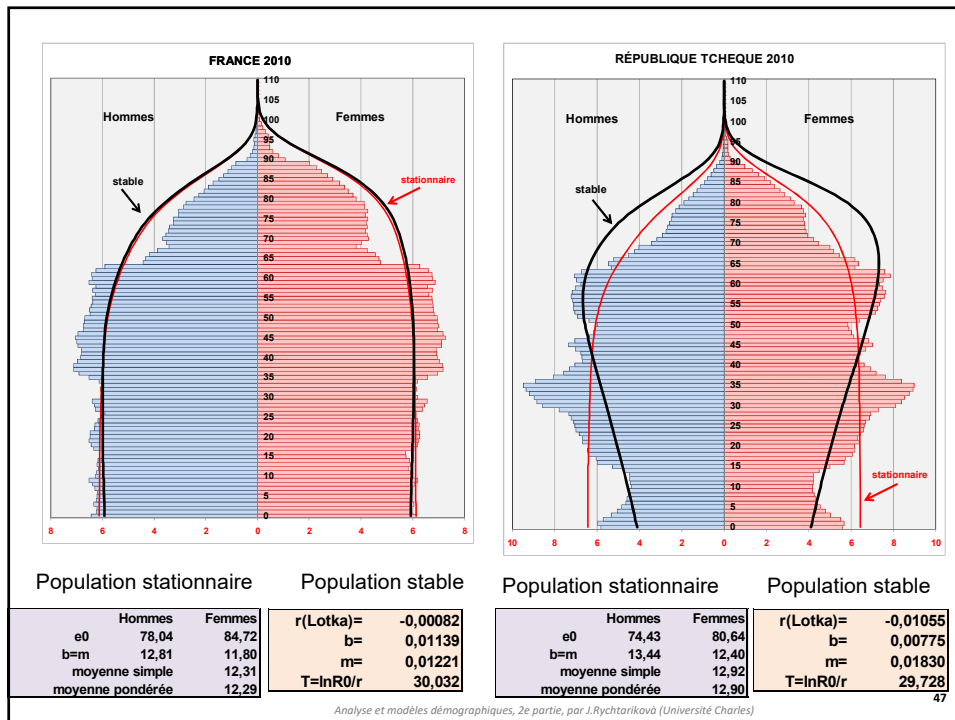
$$d = b - r$$

† - les calculs intermédiaires pour estimer taux de natalité : $\exp(Z) = e^{-r(x+2,5)} \cdot \frac{L_x}{S_0}$

46

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

46



47

Inertie de la population, potentiel de l'accroissement (population momentum)

Paul Vincent, « Potentiel d'accroissement d'une population » // Journal de la Société de Statistique de Paris, n°1-2, Janvier-Fevrier 1945, p.16-39

Nathan Keyfitz, « On the Momentum of Population Growth » // Demography, 1971, vol.8, no 1, p.71-80

Roland Pressat « Potentiel d'accroissement des populations », dans Éléments de la démographie mathématiques, Paris, édition de l'AIDEL, 1995, p 176-181

Si une population réelle devient stationnaire, (i.e. $r_0 = 0$ et $R_0 = 1$), sa croissance pourrait continuer jusqu'au moment de la stabilisation définitive de sa structure à cause de son inertie ou de son « potentiel de accroissement » accumulé dans sa structure par âge vers le moment de passage à la stationnarité. Ce potentiel (ou *momentum* démographique) peut être mesurer comme **le rapport entre l'effectif initial de la population et son effectif limite stationnaire**.

Les conditions implicites d'estimation de l'inertie d'une population

1. Que la population initiale soit « stable », i.e. qu'elle connaît la mortalité et la fécondité constantes (il n'y a que peu voire aucune population contemporaine qui a connu une telle expérience historique).
2. Que la population passe à la fécondité de simple remplacement des générations moyennant un changement proportionnel à tous les âges – inverse à TNR antérieur à la stationnarité (on a vu que les changement du niveau de la fécondité générale implique la transformation simultanément du niveau et de la forme de la distribution des fécondité par âge)

Par ailleurs, la description mathématique de l'inertie (du potentiel) est assez complexe et les facteurs de sa variation ne sont pas évidents.

48

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

48

Potentiel d'accroissement

Facteur par lequel une population serait multipliée à long terme si la fécondité baissait aujourd'hui et restait durablement au niveau du remplacement des générations.

Fécondité et mortalité par âge correspondent à une population stationnaire. Pour autant, la population continuera à croître du fait que les jeunes générations déjà nées sont plus nombreuses que dans le cas stationnaire, puis oscillera avant de finalement se fixer à une certaine taille.

Cette inertie est déterminée par la structure par âge au moment du changement de la fécondité et au facteur d'agrandissement en résultant.

Le potentiel d'accroissement a été surtout utilisé pour apprécier l'effet d'une baisse de fécondité sur la taille d'une population d'un pays en voie de développement.

Le facteur multiplicatif v (sous la condition que la population initiale est une population stable) est obtenu par la formule:

$$v = \frac{n \cdot e_0}{\sqrt{R_0}}$$

n est taux de natalité; e_0 espérance de vie à la naissance; R_0 taux net de reproduction

Exemple: $e_0=60$; $n=45\%$; $R_0=2.35$; $\rightarrow v = 0.045 \times \frac{60}{\sqrt{2.35}} = 0.045 \times 39.14 = 1.75$; $v=1.76$

Dans les pays développés, un facteur important d'accroissement résulte de la baisse de mortalité au-delà des âges féconds.

Dictionnaire de Démographie, Armand Colin 2011, p.380

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtaříková (Université Charles)

49

49

Estimation de l'inertie de la population (potentiel d'accroissement) avec les notions en temps continu

Soit N_s est le nombre de naissances vivantes sur une année de la durée moyenne de procréation dans une population dès le moment où la **stationnarité** correspondante à $f^*(x)$ – une fonction de fécondité féminine nette (naissances des filles) et à $p(x)$ – une fonction de survie; A^* - âge moyen des mères dans la population stationnaire .

$$N_s = \frac{\int_0^a P(x) \cdot \int_a^\beta \frac{P(y)}{P(x)} \cdot f^*(y) dy dx}{A^*} \quad (1)$$

On peut simplifier l'écriture de la formule (1) en y introduisant l'expression : $w(x) = \frac{1}{A^*} \cdot \int_a^\beta p(y) \cdot f^*(y) dy$ (2)

qui exprime la part de la totalité des naissances vivantes chez les femmes à l'âge « x » au moment 0 (passage à la stationnarité) sur une année de vie dans l'attente d'une naissance (ce qui correspond à l'âge moyen des mères). Par ailleurs, il est facile de démontrer que $\int_0^\beta w(x) dx = 1$

On peut donc réécrire la formule (1) comme suit : $N_s = \int_0^\beta \frac{P(x)}{P(x)} \cdot w(x) dx$ et sachant la durée de vie moyenne (e_0^o) (3)

en déduire l'effectif final de la population stationnaire $P_s = N_s \cdot e_0^o = e_0^o \cdot \int_0^\beta \frac{P(x)}{P(x)} \cdot w(x) dx$ (4)

Par conséquent, on peut mesurer l'inertie (**potentiel d'accroissement**) M qui est, par définition, un rapport entre l'effectif final de la population stationnaire et celui au moment de passage à la stationnarité :

$$M = \frac{P_s}{P} = \int_0^\beta \frac{P(x)}{P} \cdot \frac{e_0^o}{P(x)} \cdot w(x) dx \rightarrow M = \int_0^\beta \frac{c(x)}{c_s(x)} \cdot w(x) dx \quad \text{dépendant ainsi de trois distributions (c, } c_s \text{ et } w) \text{ sur l'intervalle entre 0 et 1} \quad (5)$$

P population totale; P(x) population (d'habitude féminine) par âge; p(x) probabilité de survie entre la naissance et l'âge x

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

50

50

Estimation de l'inertie d'une population (potentiel de l'accroissement) à la base des statistiques disponibles

Soit
 ${}_5P_x^F$ - nombre des femmes âgées de x à $x+n$ dans une population observée et $P^F = \sum_x {}_n P_x^F$
 P^M - nombre des hommes dans une population observée
 ${}_5L_x^F$ - nombre d'années vécues dans l'intervalle d'âge $x, x+n$ selon la table de mortalité pour le sexe féminin
 e_0^F et e_0^M - l'espérance de vie à la naissance des femmes et des hommes respectivement
 ${}_5f_x^F$ - taux de fécondité féminine par âge observés; (*naissances vivantes des filles aux femmes à l'âge x divisées par l'effectif moyen des femmes à l'âge x*)

Alors on peut estimer
 le taux net de reproduction = $TNR = \sum_{x=15}^{45} {}_5f_x^F \cdot {}_5L_x^F \leftarrow$ fonction nette de maternité Amener le taux net de reproduction à valoir unité, et donc réaliser les conditions intrinsèques de stationnarité, revient à substituer à $f(x)$ la fonction $f^*(x) = f(x)/R_0$, $R_0 = TNR$
 les taux par âge de la fécondité correspondante au régime stationnaire = ${}_n f_x^F = \frac{{}_n f_x^F}{TNR}$
 c'était $f^*(x)$ - fonction de densité de naissances des filles dans le temps continue
 l'âge moyen des mères dans la population stationnaire $AMM^s = \sum_{x=15}^{45} (x+2.5) \cdot {}_n f_x^F \cdot {}_n L_x^F$
 (ou la durée moyenne de la procréation)
 l'âge moyen net à la fécondité
 c'était A^* dans le temps continue;

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

51

51

Calculs du nombre de naissances féminines et de l'effectif de population stationnaire finale et le potentiel d'accroissement

Il faut maintenant estimer le nombre de naissances produites par les femmes, qui avait l'âge $x < \beta$ (β - âge limite de fécondité)

Soit ${}_n W_x = \frac{0.5 \cdot {}_n L_x^F \cdot {}_n f_x^F + \sum_{y=x+5}^{45} {}_n L_y^F \cdot {}_n f_y^F}{AMM^s}$ une part de naissances dans l'état stationnaire réduites à une année de l'âge moyen des mères, (chez les femmes âgées de x à $x+n$ au moment de passage au régime stationnaire)

pour les âges < 15 ans, ${}_n W_x = 1/AMM$
 pour les âges > 15 ans, ${}_n W_x = (1/AMM) \cdot (K1+K2)$ où
 $K1 = 0.5 \cdot {}_n L_a^F \cdot {}_n f_a^F$ les naissances à l'âge « a » au moment zéro
 $K2 = \sum_{y=a+5}^{\beta} {}_n L_y^F \cdot {}_n f_y^F$ les naissances après l'âge $a+5$

Alors $N_s^F = 5 \cdot \sum_{x=0}^{45} \frac{{}_5 P_x^F}{{}_5 L_x^F} \cdot {}_5 W_x^F$ - le nombre de naissances féminines dans la population stationnaire

Plus exactement il faudrait écrire : $N_s^F = \sum_{x=0}^{45} \frac{{}_5 P_x^F}{{}_5 L_x^F / 5} \cdot {}_5 W_x^F$ puisque ${}_5 L_x^F / 5$ sert un estimateur de la fonction de survie (voir formule 3 sur la diapositive 51)

$P_s^F = N_s^F \cdot e_0^F$ - le nombre des femmes dans la population stationnaire

$P_s^M = N_s^F \cdot RSN \cdot e_0^H$ - le nombre des hommes dans la population stationnaire (RSN - rapport des sexes à la naissances)

Potentiel d'accroissement : $M = \frac{P_s^F + P_s^H}{P^F + P^H}$

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

52

52

Calculs pratiques : groupes d'âges quinquennaux

Soit $l_0 = 1$

1) l'âge moyen net à la fécondité : $\longrightarrow A^* = \sum_{x=15}^{45} (x + 2.5) \cdot {}_5f_x^F \cdot {}_5L_x^F$

2) le nombre de naissances féminines dans la population stationnaire :

$$N_s^F = \frac{1}{A^*} \cdot \sum_{x=0}^{45} {}_5P_x^F \cdot \left(\frac{{}_5L_x^F \cdot {}_5f_x^F + \sum_{y=x+5}^{45} {}_5L_y^F \cdot {}_5f_y^F}{\frac{{}_5L_x^F}{5}} \right)$$

3) le nombre des femmes dans la population stationnaire : $\longrightarrow P_s^F = N_s^F \cdot e_0^F$

4) le nombre des hommes dans la population stationnaire : $\longrightarrow P_s^M = N_s^F \cdot 1.05 \cdot e_0^H$

5) le potentiel d'accroissement : $\longrightarrow M = \frac{P_s^F + P_s^M}{P^F + P^H}$

Samuel H. Preston, Michel Guillot: Population dynamics in age of declining fertility. *Genus*, LXV, p.83-98 53

53

Exemple numérique de calcul du potentiel d'accroissement

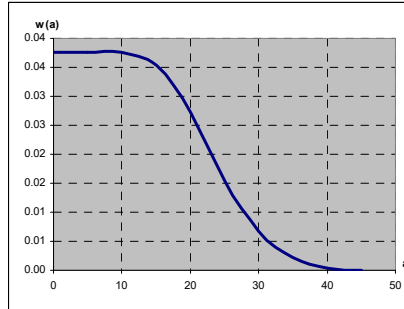
Asie de l'Ouest 1995-2000

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Age	a	5NFa	5La	f(a)	⁴ a x ³ a	⁴ 7/2 ⁵ a	⁶ b x ³ a	(¹ 1+2.5) x ⁷ a	⁵ x ⁹ x ² / ¹ 3	
	a				5f(a) * 5La	5fb(a)	5fb(a) * 5La		w(a)	Bs
0	12 023	4.834							0.03759	468
5	11 027	4.803							0.03759	432
10	9 856	4.789							0.03759	387
15	8 614	4.773	0.043	0.205	0.025	0.121	2.11	0.03533	0.03533	319
20	7 694	4.748	0.112	0.532	0.066	0.312	7.03	0.02719	0.02719	220
25	6 893	4.716	0.112	0.528	0.066	0.310	8.53	0.01549	0.01549	113
30	6 135	4.678	0.058	0.271	0.034	0.159	5.18	0.00667	0.00667	44
35	5 318	4.631	0.029	0.134	0.017	0.079	2.96	0.00219	0.00219	13
40	4 376	4.57	0.007	0.032	0.004	0.019	0.80	0.00035	0.00035	2
45	3 510	4.483	0	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00000	0.00000	0
Somme			1.805	1.703	0.212	1.000	26.600	0.200		1 996

Population actuelle
 Femmes 87176
 Hommes 91845
 N = 179021
 Eo = 70.3
 AMM = 26.600

Population stationnaire
 N = 140332.2
 Bs = 1996
 SR = 1.05

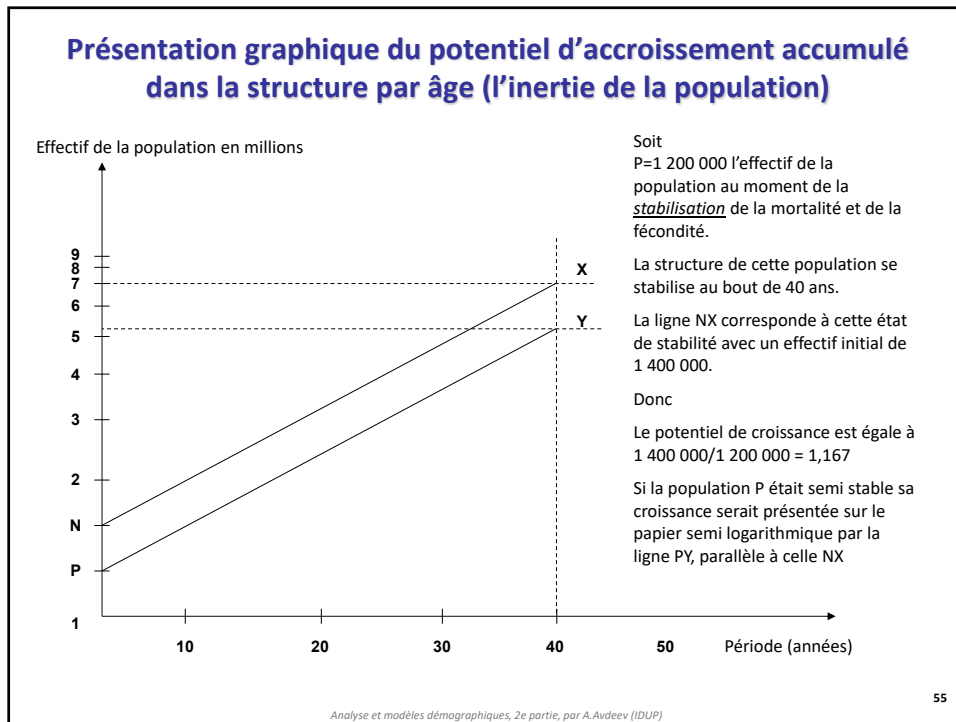
Momentum = 1.56



Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

54

54



55

Potentiel d'accroissement France 2010																															
Population momentum																															
x	P_x^F	L_x^F	f_x^F	$f_x^F \cdot L_x^F$	f_x^{F*}	$f_x^{F*} \cdot L_x^F$	$(x+0,5) \cdot f_x^{F*} \cdot L_x^F$	cumul de base	$f_x^{F*} \cdot L_x^F \cdot 0,5$	w_x	N_0^F $(P_0/L_0^F) \cdot w_x$																				
0	385 898	0.99704						1.00000	0.0000	0.03331	12 893																				
1	374 975	0.99669						1.00000	0.0000	0.03331	12 532																				
2	373 261	0.99646						1.00000	0.0000	0.03331	12 478																				
3	380 265	0.99633						1.00000	0.0000	0.03331	12 714																				
4	374 115	0.99624						1.00000	0.0000	0.03331	12 509																				
5	371 908	0.99617						1.00000	0.0000	0.03331	12 436																				
6	373 203	0.99611						1.00000	0.0000	0.03331	12 480																				
7	375 064	0.99603						1.00000	0.0000	0.03331	12 544																				
8	382 386	0.99594						1.00000	0.0000	0.03331	12 790																				
9	388 433	0.99587						1.00000	0.0000	0.03331	12 993																				
10	374 381	0.99580						1.00000	0.0000	0.03331	12 524																				
11	371 459	0.99573						1.00000	0.0000	0.03331	12 427																				
12	365 244	0.99565	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00005	1.00000	0.0000	0.03331	12 220																				
13	370 662	0.99556	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00037	0.99997	0.0000	0.03331	12 402																				
14	369 092	0.99546	0.00013	0.00013	0.00013	0.00013	0.00187	0.99984	0.0001	0.03331	12 350																				
15	359 953	0.99535	0.00051	0.00050	0.00052	0.00052	0.00800	0.99932	0.0003	0.03330	12 042																				
50	436 210	0.97186	0.00005	0.00005	0.00005	0.00005	0.00280	0.00008	0.0000	0.00000	2																				
51	428 758	0.96944	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00168	0.00005	0.0000	0.00000	1																				
52	427 107	0.96691	0.00003	0.00003	0.00003	0.00003	0.00143	0.00002	0.0000	0.00000	1																				
53	428 655	0.96428	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00055	0.00001	0.0000	0.00000	0																				
54	424 412	0.96137	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00056	0.00000	0.0000	0.00000	0																				
Total			0.98406	0.97582	1.00845	1.00000	30.01977	A*		1.00000	383 551																				
<table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td>$P_F = 32\ 379\ 225$</td> <td>$e_0^F = 84.72$</td> <td>$N_F = 392\ 084$</td> </tr> <tr> <td>$P_M = 30\ 409\ 593$</td> <td>$e_0^M = 78.04$</td> <td>$N_M = 410\ 140$</td> </tr> <tr> <td>NRR = 0.976</td> <td>A* = 30.02</td> <td>TBN = 0.012109 pour les femmes</td> </tr> <tr> <td>$N_0^F = 383\ 551$</td> <td></td> <td>TBN = 0.013487 pour les hommes</td> </tr> <tr> <td>$P_S^F = 32\ 494\ 469$</td> <td></td> <td>r = -0.00082</td> </tr> <tr> <td>$P_S^M = 31\ 310\ 771$</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>M = 1.016</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>											$P_F = 32\ 379\ 225$	$e_0^F = 84.72$	$N_F = 392\ 084$	$P_M = 30\ 409\ 593$	$e_0^M = 78.04$	$N_M = 410\ 140$	NRR = 0.976	A* = 30.02	TBN = 0.012109 pour les femmes	$N_0^F = 383\ 551$		TBN = 0.013487 pour les hommes	$P_S^F = 32\ 494\ 469$		r = -0.00082	$P_S^M = 31\ 310\ 771$			M = 1.016		
$P_F = 32\ 379\ 225$	$e_0^F = 84.72$	$N_F = 392\ 084$																													
$P_M = 30\ 409\ 593$	$e_0^M = 78.04$	$N_M = 410\ 140$																													
NRR = 0.976	A* = 30.02	TBN = 0.012109 pour les femmes																													
$N_0^F = 383\ 551$		TBN = 0.013487 pour les hommes																													
$P_S^F = 32\ 494\ 469$		r = -0.00082																													
$P_S^M = 31\ 310\ 771$																															
M = 1.016																															

56

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtaříková (Université Charles)

56

Le potentiel d'accroissement démographique (*population momentum*)

Deux facteurs de croissance de la population mondiale :

1. Le régime démographique avec le remplacement élargi des générations (la génération des filles est plus nombreuse que la génération des mères : on dit « le taux net de reproduction > 1 ») ;
2. L'effet de la structure par âge des populations, désigné comme « **population momentum** » en anglais (on pourrait dire « le moment de croissance démographique » ou « le moment de population ») = croissance (ou décroissance) provenant de l'inertie de la structure de la population.

On mesure le moment de croissance comme un rapport entre les effectifs initiaux d'une population au moment de stabilisation et d'une population stable correspondante la l'état finale de cette première population .

Source : Preston S.H., M. Guillot (1997) « Population dynamic in an Age of Declining Fertility' *Genus*, vol.53, n°3-4, p.15-31

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

Valeurs estimées du « population momentum » pour les régions et quelques pays du monde

Région ou pays	Population momentum
Afrique	1,56
Asie de l'Est	1,22
Asie Sud-centrale	1,47
Asie Sud-est	1,48
Asie de l'Ouest	1,56
Europe	0,98
Amérique Latine	1,48
Amérique du Nord	1,10
<hr/>	
Australie	0,96
Russie	0,94
Italie	0,91
Allemagne	0,88
Population mondiale	1,35

57

57

Matériaux et illustrations supplémentaires

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par A.Avdeev (IDUP)

58

58

Figure 1.1a Relation between the average number of children per woman (FFR) and life expectancy (e₀) in historical and present-day populations

Figure 1.1b Relation between FFR and e₀ in historical populations

Figure 1.1c Relation between life expectancy (e₀) and average number of children per woman (FFR) for 23 large less-developed countries (1950-5)

Espérance de vie à la naissance

Indice synthétique de fécondité

Taux d'accroissement d'une population stable (r)

Les isolignes de r

Localisation des populations humaines

59

59

2010

http://www.insee.fr/fr/themes/detail.asp?reg_id=0&ref_id=ir-sd20101

TABLEAU 49 - NÉS VIVANTS SELON L'ANNÉE DE NAISSANCE DE LA MÈRE

Année 2010 France métropolitaine 2010

Année de naissance de la mère	Enfants nés vivants					
	Ensemble		Nés dans le mariage		Nés hors mariage	
	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
1997	11	8	2	1	9	7
1996	51	39	0	0	51	39
1995	204	147	5	4	199	143
1994	683	452	3	1	680	451
1993	1 659	1 047	27	21	1 632	1 026
1992	3 617	2 163	129	95	3 488	2 068

a. Total

b. Dont après anniversaire de la mère

Population moyenne

$$\bar{P}_g = \exp\left(\frac{\sum_{t=0}^{T-1} \ln(P_t)}{T}\right)$$

$$\bar{P}_g = \sqrt[T]{\prod_{t=0}^{T-1} P_t}$$

Nés vivants	Total	Garçons	Filles
2010	802 224	410 140	392 084

Proportion des filles: 392084/802224=0,488746

Naissances vivantes:
 12 ans révolus: 0+3=3
 14 ans révolus: 39+57=96

60

60

France métropolitaine 2010																
a _x	Naissances vivantes		Population 1.1.2010		Population 1.1.2011		Population moyenne		f _x	f _x (filles)	L _x (femmes)	R ₀ S _{x=1} =1	R ₁ (a _x +0,5)* L _x (femmes)*	R ₂ (a _x +0,5)*2* L _x (femmes)*	S _{x=1} =1 (a _x +0,5)* L _x (femmes)*	S _{x=1} =1 (a _x +0,5)* L _x (femmes)*
	toutes	filles	femmes	femmes	femmes	f _x	f _x (filles)	f _x (filles)								
12	3	1	365 244	372 496	368 852	0,0001	0,0000	99 565	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
13	20	10	370 662	369 277	369 463	0,0005	0,0003	99 556	0,0005	0,0003	0,0003	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006
14	96	47	369 092	371 648	370 368	0,0026	0,0013	99 546	0,0026	0,0013	0,0013	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025
15	378	185	359 953	370 278	365 079	0,0104	0,0051	99 535	0,0104	0,0051	0,0051	0,0101	0,0101	0,0101	0,0101	0,0101
16	1 064	520	359 411	361 291	360 350	0,0029	0,0014	99 521	0,0029	0,0014	0,0014	0,0027	0,0027	0,0027	0,0027	0,0027
17	2 501	1 222	379 988	360 430	370 055	0,0076	0,0039	99 507	0,0076	0,0039	0,0039	0,0072	0,0072	0,0072	0,0072	0,0072
18	5 092	2 489	388 423	380 910	384 648	0,0134	0,0067	99 490	0,0134	0,0067	0,0067	0,0129	0,0129	0,0129	0,0129	0,0129
19	9 404	4 596	391 845	389 182	390 511	0,0248	0,0117	99 468	0,0248	0,0117	0,0117	0,0229	0,0229	0,0229	0,0229	0,0229
20	13 477	6 587	394 628	392 251	393 438	0,0342	0,0174	99 446	0,0342	0,0174	0,0174	0,0313	0,0313	0,0313	0,0313	0,0313
21	19 014	8 804	394 091	395 165	394 629	0,0455	0,0231	99 423	0,0455	0,0231	0,0231	0,0419	0,0419	0,0419	0,0419	0,0419
22	22 947	11 215	390 209	394 756	392 476	0,0587	0,0288	99 400	0,0587	0,0288	0,0288	0,0539	0,0539	0,0539	0,0539	0,0539
23	28 976	14 162	392 762	391 121	391 941	0,0739	0,0363	99 377	0,0739	0,0363	0,0363	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681	0,0681
24	35 038	17 125	388 843	394 075	391 450	0,0891	0,0437	99 353	0,0891	0,0437	0,0437	0,0782	0,0782	0,0782	0,0782	0,0782
25	41 845	20 452	383 213	390 233	386 707	0,1021	0,0509	99 326	0,1021	0,0509	0,0509	0,0892	0,0892	0,0892	0,0892	0,0892
26	48 939	22 941	375 804	384 715	380 233	0,1235	0,0603	99 300	0,1235	0,0603	0,0603	0,1044	0,1044	0,1044	0,1044	0,1044
27	53 722	26 256	400 292	377 466	388 711	0,1382	0,0675	99 272	0,1382	0,0675	0,0675	0,1170	0,1170	0,1170	0,1170	0,1170
28	59 582	29 120	406 062	402 373	404 213	0,1470	0,0720	99 239	0,1470	0,0720	0,0720	0,1270	0,1270	0,1270	0,1270	0,1270
29	62 179	30 390	411 478	408 559	410 016	0,1515	0,0742	99 206	0,1515	0,0742	0,0742	0,1343	0,1343	0,1343	0,1343	0,1343
30	60 295	29 469	389 099	413 974	401 344	0,1523	0,0734	99 175	0,1523	0,0734	0,0734	0,1291	0,1291	0,1291	0,1291	0,1291
31	54 703	26 736	381 120	391 463	386 257	0,1462	0,0692	99 144	0,1462	0,0692	0,0692	0,1210	0,1210	0,1210	0,1210	0,1210
32	50 193	24 532	386 706	382 898	384 797	0,1304	0,0637	99 111	0,1304	0,0637	0,0637	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100	0,1100
33	44 234	21 619	376 032	388 022	381 980	0,1158	0,0560	99 072	0,1158	0,0560	0,0560	0,9943	0,9943	0,9943	0,9943	0,9943
34	35 112	18 527	389 695	377 137	382 927	0,0954	0,0469	99 030	0,0954	0,0469	0,0469	0,8622	0,8622	0,8622	0,8622	0,8622
35	34 780	16 999	413 115	389 633	401 202	0,0869	0,0427	99 985	0,0869	0,0427	0,0427	0,7484	0,7484	0,7484	0,7484	0,7484
36	30 028	14 676	437 813	413 843	425 659	0,0704	0,0348	99 933	0,0704	0,0348	0,0348	0,6438	0,6438	0,6438	0,6438	0,6438
37	25 000	12 248	450 545	438 521	444 492	0,0568	0,0275	99 873	0,0568	0,0275	0,0275	0,5524	0,5524	0,5524	0,5524	0,5524
38	19 868	9 710	449 928	451 032	450 480	0,0410	0,0215	99 806	0,0410	0,0215	0,0215	0,4739	0,4739	0,4739	0,4739	0,4739
39	15 280	7 468	442 146	450 393	446 250	0,0342	0,0174	99 734	0,0342	0,0174	0,0174	0,4052	0,4052	0,4052	0,4052	0,4052
40	10 848	5 302	436 471	442 445	439 448	0,0249	0,0126	99 655	0,0249	0,0126	0,0126	0,3450	0,3450	0,3450	0,3450	0,3450
41	7 162	3 500	435 257	436 626	435 941	0,0164	0,0083	99 564	0,0164	0,0083	0,0083	0,2910	0,2910	0,2910	0,2910	0,2910
42	4 589	2 233	434 280	435 207	434 743	0,0101	0,0051	99 460	0,0101	0,0051	0,0051	0,2404	0,2404	0,2404	0,2404	0,2404
43	2 729	1 334	446 317	434 145	440 189	0,0062	0,0033	99 353	0,0062	0,0033	0,0033	0,1994	0,1994	0,1994	0,1994	0,1994
44	1 464	716	447 362	446 038	446 700	0,0038	0,0019	99 233	0,0038	0,0019	0,0019	0,1652	0,1652	0,1652	0,1652	0,1652
45	772	377	455 358	446 885	451 102	0,0021	0,0008	99 099	0,0021	0,0008	0,0008	0,1359	0,1359	0,1359	0,1359	0,1359
46	397	194	450 562	454 635	452 693	0,0008	0,0004	97 951	0,0008	0,0004	0,0004	0,1092	0,1092	0,1092	0,1092	0,1092
47	195	90	436 770	449 881	443 277	0,0042	0,0020	97 786	0,0042	0,0020	0,0020	0,0897	0,0897	0,0897	0,0897	0,0897
48	88	43	438 603	436 037	437 268	0,0020	0,0010	97 605	0,0020	0,0010	0,0010	0,0746	0,0746	0,0746	0,0746	0,0746
49	63	31	436 073	437 726	436 899	0,0014	0,0007	97 404	0,0014	0,0007	0,0007	0,0620	0,0620	0,0620	0,0620	0,0620
50	46	22	436 210	435 236	435 723	0,0011	0,0005	97 186	0,0011	0,0005	0,0005	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523	0,0523
51	29	14	428 758	435 140	431 937	0,0007	0,0003	96 944	0,0007	0,0003	0,0003	0,0444	0,0444	0,0444	0,0444	0,0444
52	24	12	427 107	427 689	427 388	0,0006	0,0003	96 691	0,0006	0,0003	0,0003	0,0374	0,0374	0,0374	0,0374	0,0374
53	9	4	426 655	426 053	426 354	0,0002	0,0001	96 428	0,0002	0,0001	0,0001	0,0314	0,0314	0,0314	0,0314	0,0314
54	9	4	424 412	425 527	424 969	0,0002	0,0001	96 137	0,0002	0,0001	0,0001	0,0256	0,0256	0,0256	0,0256	0,0256
Total	802 224	392 084	17 589 264	17 589 562	17 582 099	2,01343	0,98406					0,97582	29,29374	906,40131	30,04231	1,00000
Total	802 224	Garçons 410 140	Files 392 084	Proportion filles 0,48875			taux brut de reproduction					taux net de reproduction à la maternité R ₀	29,29374	906,40131	30,04231	1,00000
												30,01977	928,86587	30,042		

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtaříková (Université Charles)

61

61

France métropolitaine 2010			
r(Lotka)=	-0,00082	b=	0,01139
		m=	0,01221
α=R1/R0	30,019767		
β=α^2-R2/R0	-27,67945	T=lnR₀/r	30,032
r(Kuczynski)=	-0,00082	T=alfa + 0,5*beta*r	30,031
T étant l'intervalle entre générations successives et correspond à l'âge moyen à la maternité dans la population stable		r = b - m	
		r taux intrinsèque d'accroissement naturel	
		b taux de natalité d'une population stable	
		m taux de mortalité d'une population stable	

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtaříková (Université Charles)

62

62

Population stable équivalente par âge: $L_x * e^{-r(x+0.5)}$ **France métropolitaine 2010**

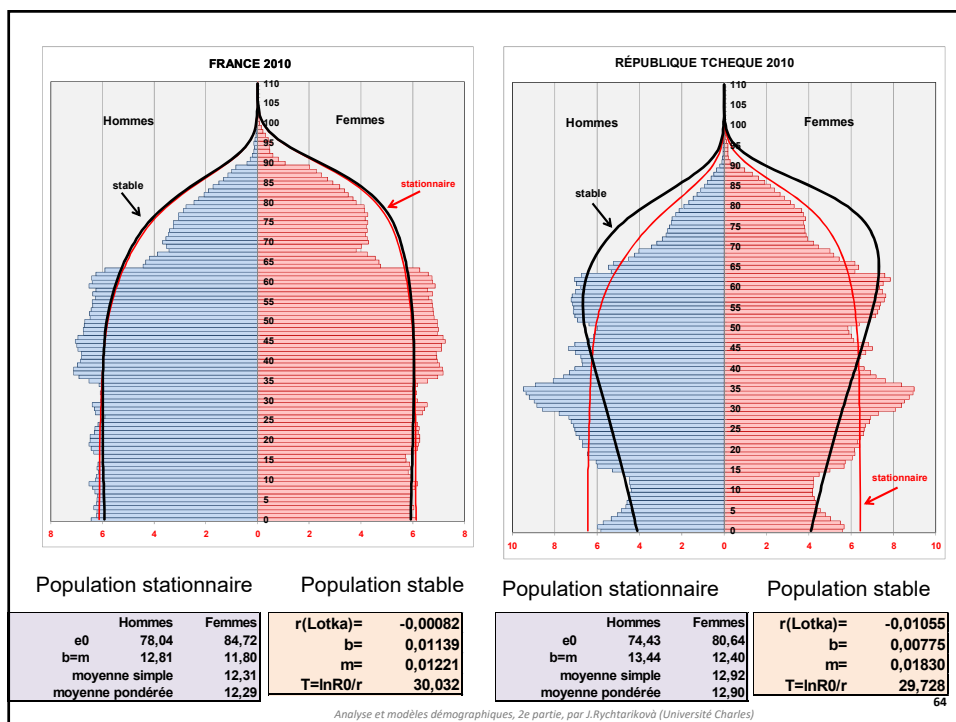
Chiffres absolus *Chiffres relatifs*

	Réelle		Stationnaire		Stable			Réelle		Stationnaire		Stable	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes		Hommes	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
0	403 659	385 898	99 639	99 704	99 680	99 745	0	6,429	6,146	6,122	6,126	5,917	5,920
1	391 549	374 975	99 605	99 669	99 727	99 791	1	6,236	5,972	6,120	6,124	5,919	5,923
2	389 755	373 261	99 582	99 646	99 785	99 849	2	6,207	5,945	6,118	6,122	5,923	5,927
3	398 106	380 265	99 564	99 633	99 848	99 918	3	6,340	6,056	6,117	6,121	5,927	5,931
4	390 797	374 115	99 552	99 624	99 918	99 990	4	6,224	5,958	6,116	6,121	5,931	5,935
5	389 641	371 908	99 541	99 617	99 988	100 065	5	6,206	5,923	6,116	6,120	5,935	5,939
6	388 965	373 203	99 528	99 611	100 057	100 140	6	6,195	5,944	6,115	6,120	5,939	5,944
7	394 692	375 064	99 518	99 603	100 128	100 214	7	6,286	5,973	6,114	6,120	5,943	5,948
8	399 840	382 386	99 510	99 594	100 202	100 287	8	6,368	6,090	6,114	6,119	5,948	5,953
9	409 343	388 433	99 502	99 587	100 276	100 361	9	6,519	6,186	6,113	6,119	5,952	5,957
10	393 179	374 381	99 493	99 580	100 348	100 436	10	6,262	5,963	6,113	6,118	5,956	5,961
11	390 584	371 459	99 483	99 573	100 420	100 511	11	6,221	5,916	6,112	6,118	5,960	5,966
12	386 213	365 244	99 472	99 565	100 491	100 585	12	6,151	5,817	6,112	6,117	5,965	5,970
13	389 921	370 662	99 462	99 556	100 563	100 658	13	6,210	5,903	6,111	6,117	5,969	5,975
14	387 050	369 092	99 451	99 546	100 634	100 730	14	6,164	5,878	6,110	6,116	5,973	5,979
15	376 876	359 953	99 430	99 535	100 694	100 801	15	6,002	5,733	6,109	6,115	5,977	5,983
16	376 776	359 411	99 397	99 521	100 743	100 869	16	6,001	5,724	6,107	6,115	5,980	5,987
17	398 157	379 968	99 358	99 507	100 786	100 937	17	6,341	6,052	6,105	6,114	5,982	5,991
18	404 074	388 423	99 313	99 490	100 822	101 002	18	6,435	6,186	6,102	6,113	5,984	5,995
19	409 412	391 845	99 255	99 468	100 845	101 062	19	6,520	6,241	6,098	6,111	5,986	5,999
20	406 307	394 628	99 190	99 446	100 862	101 122	20	6,471	6,285	6,094	6,110	5,987	6,002
105	40	395	52	294	57	320	105	0,001	0,006	0,003	0,018	0,003	0,019
106	19	220	27	159	29	173	106	0,000	0,004	0,002	0,010	0,002	0,010
107	9	112	13	83	14	91	107	0,000	0,002	0,001	0,005	0,001	0,005
108	3	55	6	42	7	46	108	0,000	0,001	0,000	0,003	0,000	0,003
109	1	24	3	20	3	22	109	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,001
110	0	16	2	17	2	19	110	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,001
	30 409 593	32 379 225	7 804 081	8 471 925	8 068 142	8 779 484		484	516	479	521	479	521
									1000,000		1000,000		1000,000

63

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtaříková (Université Charles)

63



Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtaříková (Université Charles)

64

MORTPAK STABLE

Calculates a stable age distribution based on a set of age-specific central death rates (nm_x values) or age-specific probabilities of dying (nq_x values) or survivors (l_x) and the intrinsic rate of natural increase.

TITLE:	France Femmes 2010
Sex:	Females
Data Type:	l(x)
Rate of Natural Increase:	-0.00078
(Output) open age group:	100+

Age Group	l(x)
0	100000
1	99685
5	99620
10	99584
15	99541
20	99457
25	99340
30	99191
35	99010
40	98696
45	98167
50	97300
55	95985
60	94205
65	91853
70	88584
75	83729
80	75631
85	61693
90	40608
95	18021
100	4119

Intrinsic Vital Rates	
Birth rate=	0.01141
Death rate=	0.01219

Age Group	Proportion of Population in Indicated Age Group	Age	Proportion of Population Under Indicated Age
0 - 1	0.01138	1	0.01138
1 - 5	0.04557	5	0.05694
5 - 10	0.05713	10	0.11408
10 - 15	0.05733	15	0.17141
15 - 20	0.05752	20	0.22894
20 - 25	0.05769	25	0.28663
25 - 30	0.05784	30	0.34447
30 - 35	0.05797	35	0.40243
35 - 40	0.05806	40	0.46049
40 - 45	0.05804	45	0.51853
45 - 50	0.05786	50	0.57639
50 - 55	0.05744	55	0.63383
55 - 60	0.05674	60	0.69057
60 - 65	0.05574	65	0.74631
65 - 70	0.05429	70	0.80060
70 - 75	0.05210	75	0.85271
75 - 80	0.04849	80	0.90120
80 - 85	0.04211	85	0.94331
85 - 90	0.03152	90	0.97483
90 - 95	0.01776	95	0.99259
95 - 100	0.00627	100	0.99886
100+	0.00114		

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtaříková (Université Charles)

65

Les modèles matriciels de population

Le Modèle (Matrice) de Leslie

	N_x	
P_x		

$$M = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_{\omega-1} & F_{\omega} \\ P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{\omega-1} & 0 \end{pmatrix}$$

P_x étant les probabilités perspectives annuelles de survie: L_{x+1}/L_x

F_x étant les quotients perspectifs nets de fécondité: fx^*

$$F_x = N_x/P_x * L_0/S_0$$

N_x naissances vivantes des filles
P_x femmes à l'âge x au 1^{er} janvier
L₀/S₀ probabilité de survie entre naissance et à l'âge 0 révolu pour les filles

Lecture :
 Leslie, P. H. (1945). On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics. *Biometrika*, 33(3), 183–212. <https://doi.org/10.2307/2332297>
 Tabah, L. (1968). Représentations matricielles de perspectives de population active. *Population (French Edition)*, 23(3), 437–476. <https://doi.org/10.2307/1529009>

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtaříková (Université Charles)

66

France métropolitaine 2010; femmes; données initiales Âges: 0-110 ans

Femmes: effectifs des femmes au 1er janvier 2010

age	Femmes	Lx_fem	px_fem	fx_fi_p_L0
0	385 898	99704	0,99965	0
1	374 975	99669	0,99977	0
2	373 261	99646	0,99987	0
3	380 265	99633	0,99991	0
4	374 115	99624	0,99993	0
5	371 908	99617	0,99994	0
6	373 203	99611	0,99992	0
7	375 064	99603	0,99991	0
8	382 386	99594	0,99993	0
9	388 433	99587	0,99993	0
10	374 381	99580	0,99993	0
11	371 459	99573	0,99992	0
12	365 244	99565	0,99991	0,00001
13	370 662	99556	0,99990	0,00007
14	369 092	99546	0,99989	0,00027
15	359 953	99535	0,99986	0,00092
16	359 411	99521	0,99986	0,00225
17	379 968	99507	0,99983	0,00464
18	388 423	99490	0,99978	0,00905
19	391 845	99468	0,99978	0,01417
20	394 628	99446	0,99977	0,01946

$px_fem = Lx+1_femmes/Lx_femmes$; probabilité perspective de survie
 $fx_fi_p_L0$ quotient perspectif net de fécondité $N_x/P_x * L_0/S_0$

SAS 9.3 Module: PROC IML: langage matriciel

1) Matrice M de Leslie: M0

```
proc IML;
use d;
read all var {PX_FEM
FX_FI_p_L0}into A0;
read all var {Femmes}into
PF;
M0= j(111,111,0);
P0= j(111,1,0);
Pstab= j(111,1,0);
do j=1 to 111;
M0[j,j]= A0[j,2];
P0[j,1]=PF[j,1];
end;
do i=2 to 111;
M0 [i,i-1]=A0[i-1,1];
end;
```

69

69

Matrice de Leslie France 2010

	COL1	COL2	COL3	COL4	COL5	COL6	COL7	COL8	COL9	COL10	COL11	COL12	COL13	COL14	COL15	COL16
ROW1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00001	0,00007	0,00027	0,00092
ROW2	0,99965	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW3	0	0,99977	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW4	0	0	0,99987	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW5	0	0	0	0,99991	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW6	0	0	0	0	0,99993	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW7	0	0	0	0	0	0,99994	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW8	0	0	0	0	0	0	0,99992	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW9	0	0	0	0	0	0	0	0,99991	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,99993	0	0	0	0	0	0	0
ROW11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,99993	0	0	0	0	0	0
ROW12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,99993	0	0	0	0	0
ROW13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,99992	0	0	0	0
ROW14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,99991	0	0	0
ROW15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,9999	0	0
ROW16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,99989	0
ROW17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,99986
ROW18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ROW20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2) Calcul des valeurs et des vecteurs propres

```
V=eigval(M0);
r=V[1,1];
r=log(r);
Psta=eigvec(M0);
do i=1 to 111;
Pstab[i,1]=Psta[i,1];
end;
```

3) Calcul de la population stable équivalente

```
i=0;
do until (Dif<=0.1);
i=i+1;
Pi=M0**i*P0;
Pis=Pi[+,];
Pir= Pi/Pis[1,1]*1000;
sstab=Pstab[+,];
Stab=Pstab/sstab[1,1]*1000;
R=Pir-Stab;
Dif=ABS(R);
sumdif=sum(Dif);
end;
```

70

70

France métropolitaine 2010

	POPULATION Effectifs relatifs p.1000		
	population stable	stable équivalente	différence stable - équivalente
0	11,3969	11,3774	0,0194
1	11,4013	11,3784	0,0229
2	11,4072	11,3816	0,0256
3	11,4142	11,3869	0,0273
4	11,4216	11,3937	0,0279
5	11,4293	11,4019	0,0274
6	11,4371	11,4114	0,0257
7	11,4447	11,4219	0,0228
8	11,4521	11,4333	0,0189
9	11,4598	11,4459	0,0140
10	11,4676	11,4592	0,0083
11	11,4753	11,4732	0,0021
12	11,4829	11,4873	-0,0045
13	11,4904	11,5014	-0,0111
14	11,4977	11,5152	-0,0174
15	11,5050	11,5282	-0,0232
16	11,5120	11,5402	-0,0282
17	11,5189	11,5511	-0,0322
18	11,5255	11,5603	-0,0348
19	11,5315	11,5675	-0,0360
20	11,5375	11,5732	-0,0357

Population stable :
 Calcul à partir de matrice M; i.e. d'une table de mortalité et d'une série des probabilités nets de fécondité.

Population stable équivalente :
 Une population qui approche l'état stable avec une condition de différence définie.

Après 114 multiplications de matrice M

Taux intrinsèque d'accroissement naturel $r = -0,00074$

La valeur de r ainsi calculée n'est pas identique à sa valeur selon l'équation intégrale de Lotka, qui donne $r = -0,00082$. La différence vient du fait qu'il s'agit de deux approximations.

Effectif des femmes 1.1. 2010 32 379 225
Effectif des femmes 1.1. 2124 30 488 547

71

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtařiková (Université Charles)

71

```

proc IML;
use d;
read all var {PX_FEM
FX_FI_p_L0} into A0;
read all var {Femmes} into PF;
M0= j(111,111,0);
P0= j(111,1,0);
Pstab= j(111,1,0);
do j=1 to 111;
M0[j,1]= A0[j,2];
P0[j,1]= PF[j,1];
end;
do i=2 to 111;
M0[i,i-1]= A0[i-1,1];
end;
V=eigval(M0);
r=V[1,1];
r=log(r);
Psta=eigvec(M0);
do i=1 to 111;
Pstab[i,1]=Psta[i,1];
end;
Print M0 r [format=10.5];

i=0;
do until (Dif<=0.1);
i=i+1;
Pi=M0**i*P0;
Pis=Pi[+,];
Pir= Pi/Pis[1,1]*1000;
sstab=Pstab[+,];
Stab=Pstab/sstab[1,1]*1000;
R=Pir-Stab;
Dif=ABS(R);
sumdif=sum(Dif);
end;
print i [format=5.0] Stab [format=10.5]
Pir [format=10.5] Dif[format=10.5];
create strur from Pir [colname='popr'];
append from Pir;
create strua from Pi [colname='popa'];
append from Pi;
quit;
data dd;
set d;
merge d strua;
run;
proc means data=dd sum maxdec=0;
var femmes popa;
run;
    
```

SAS 9.3

72

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J.Rychtařiková (Université Charles)

72

Populations semi-stables et quasi-stables

- La **population semi-stable** est un **concept mathématique**. C'est une population, qui à chaque instant, coïncide avec une population stable correspondant aux conditions de mortalité et de fécondité du moment. C'est une population qui garde, au cours du temps, une composition par âge constante. La propriété fondamentale d'une population semi-stable: **la fonction de survie selon l'âge $p(a,t)$, la fécondité par âge $f(a,t)$ et le taux de variation $r(t)$ dépendent du temps t , mais sont liés à un instant donné t par des relations qui sont celles de la population stable à l'instant t** . Dans la population semi-stable l'état stable est atteint immédiatement.
- On appelle **population quasi stable** une population à fécondité constante et à mortalité variable (dans un univers de tables types de mortalité; de $e_0=30$ à $e_0=70$; TBR=3; AMM=29); les caractéristiques des populations de ce type sont voisines de celles des populations semi stables puisque leurs structures par âge varient très peu restant très proche à l'état stable. Telles sont les populations dans la première phase de la transition démographique mais *surtout celles des pays en voie de développement après la deuxième guerre mondiale*, quand l'espérance de vie commence à augmenter, mais la fécondité reste encore invariable. C'est un **concept expérimental**.

Analyse et modèles démographiques, 2e partie, par J. Rychtařiková (Université Charles)

73